UNIVERSIDAD APEC
BIBLIOTECA

UNAPEC
UNIVERSIDAD APEC

Decanato de posgrado

Trabajo final para optar por título de:
Maestría en Matemática Superior

Título

ESTRATEGIAS DIDACTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DEL RESIDUO PARA EL CALCULO DE INTEGRALES REALES.

Postulante:
Julio Enrique De Los Santos
2007-1838

Tutor
Msc. Carlos R. Valdez C.

Santo Domingo, D.N.
República Dominicana
Agosto 2020

LIBRO DE RESERVA
Este libro de reserva
NO debe ser sacado
de la Biblioteca.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. Planteamiento del problema

1.1. Planteamiento del problema

En la actualidad, es de conocimiento general, que las integrales son constante dolor de cabeza para los estudiantes de las distintas carreras de las ingenierías, así como para los profesores que imparten esta asignatura; pues los alumnos muestran un bajo desempeño y como consecuencia bajo nivel de aprobación cuando son evaluados en exámenes.

Entendemos que la forma cómo se imparten estos temas, puede mejorarse, a fin de garantizar que los alumnos se sientan más motivados, comprendan mejor la aplicación del teorema del residuo para calcular integrales reales, así como la enorme ventaja que ofrecen estos métodos en la simplificación de la cantidad de trabajo y esfuerzo para realizar los ejercicios.

Consideramos firmemente, que el alumno debe estar en contacto con problemas (en este caso aplicación del teorema del residuo para calcular integrales reales) que ellos puedan realizar los cálculos por los métodos convencionales del cálculo integral. Luego mediante la aplicación del teorema del residuo; y que de esta manera puedan palpar las bondades que ofrecen el método del Teorema del Residuo.

Los Beneficios que este proyecto serán a mediano y largo plazo una importancia colosal en la contribución de la creación del punto de inicio de un espíritu de comprensión y análisis de cualquier proyecto de investigación, especialmente en los campos de la Ingeniería y las Matemáticas, como fuentes imprescindibles de toda la creación o fabricación que el Género humano ha adicionado a las cosas dadas por la naturaleza , desde la Palanca concebida por el Padre de la Ingeniería Arquímedes, hasta nuestros días.

Finalmente, me permito expresar que el desarrollo de este proyecto lograremos los objetivos planteados, toda vez que pondremos a una sección de las Matemáticas como es el análisis complejo en la resolución de Integrales reales, al servicio de la investigación y el desarrollo de la Ingeniería las Ciencias y la Tecnología en sentido General. Me produce una inmensa satisfacción tener la sensación de poder contribuir o apoyar a través de las Matemáticas a la superación y desarrollo de la humanidad y de mi pueblo en particular, esta situación alinea mi profunda sensibilidad social, con el deber al que estoy compelido de socorrer al necesitado, y que bueno que sea desde lo que se hacer, trabajos de ingeniería y la aplicación de las Matemáticas para la solución de problemas cotidianos en cualquier sociedad del mundo.

1.2. Formulación del Problema

¿Qué factores afectan la estrategia de enseñanza-aprendizaje a los docentes en la aplicación del teorema del residuo para calcular integrales reales?

1.3. Sistematización del Problema

- ¿Cuáles factores afectan la enseñanza en la aplicación del teorema del residuo para calcular integrales reales?
- ¿Qué dificultades presentar los docentes en la aplicación del teorema del residuo para calcular integrales reales?
- ¿Cuáles estrategias podemos utilizar para optimizar el aprendizaje en la aplicación del teorema del residuo para calcular integrales reales?

UNIVERSIDAD APEC
BIBLIOTECA

1.4. Objetivos

1.5. Objetivo General:

plantear estrategias didácticas mediante la aplicación del teorema del residuo para el cálculo de integrales reales.

1.6. Objetivos Específicos:

- Determinar las ventajas que nos ofrece la aplicación del teorema del residuo para el cálculo de integrales reales.

- Identificar actividades donde el docente pueda desarrollar estrategia didáctica en la enseñanza aprendizaje mediante la aplicación del teorema del residuo para calcular integrales reales.

- Diseñar practicas controladas para que los estudiantes tomen confianza y puedan desarrollar las competencias esperadas.

- presentar las ventajas que ofrece la aplicación del teorema del residuo para el cálculo de integrales reales frente a los métodos tradicionales del cálculo integral.

- Identificar técnicas que le permitan al docente mejorar su didáctica en el análisis complejo para el cálculo de integrales definidas.

1.7. Justificación

Los procedimientos en la enseñanza aprendizaje que presentan los estudiantes de ingeniería y matemática durante su formación en las universidades es motivo de preocupación para la sociedad ya que de ellos depende el desarrollo de los adelanto científico y tecnológico que pueda alcanzar una nación. El desarrollo y los avances de la ciencia y la tecnología depende de lo que hoy llamamos estudiantes, que mañana serán los profesionales que tendrán el compromiso de seguir brindando el conocimiento en los avance tecnológico y científico.

La falta de motivación de los alumnos, desinterés de los alumnos, miedo a las matemáticas y otros factores han incrementado el bajo nivel en el aprendizaje de la Matemática. Por lo que se hace necesario crear un espíritu de motivación del docente hacia los alumnos. Además, desarrollar estrategia metodológica con la finalidad de que los estudiantes puedan alcanzar los objetivo y metas trazada en el aprendizaje.

Debemos de reconocer que no todos los estudiantes tienen la misma capacidad de aprendizaje o entendimiento, En ese sentido el docente debe tomar las medidas necesarias para lograr un ritmo idóneo en el aprendizaje y la enseñanza.

Consciente de la importancia capital que posee una buena base educativa para el desarrollo de las Ciencias y las Tecnologías, que puestas a servicio de la población de nuestro país servirán de punta de lanza para la creación tecnológica que permita elevar su calidad de vida en términos económicos y sociales, De ahí surge nuestra primera gran inquietud en aportar desde mi ámbito de acción en las ramas profesionales en las que me he formado : Ingeniería Eléctrica y Ciencias Matemáticas, poniéndolas a disposición del fortalecimiento de la enseñanza -Aprendizaje, tanto del docente como de los Estudiantes de Ingeniería y Matemáticas de la República Dominicana.

Lo expresado precedentemente tiene como base de sustentación el hecho de que las naciones que han logrado superar la pobreza y la marginalidad de sus habitantes lo han hecho fortaleciendo su sistema educativo lo que le ha permitido incentivar la inventiva y crear patentes de fabricación en diversas tecnologías, como son las ciencias computacionales, Fabricación Automotriz, Desarrollos de Software - Hardware, Fabricación de Equipos Electrónicos e Industriales de todos los tipos, Etc. A modo de ejemplo podemos citar: Japón, China, Estados Unidos, así como a todas las naciones que ocupan el sitial del primer mundo.

Otro aspecto no menos relevante, que debemos resaltar es recordar que nuestro país por su condición en la educación no tiene una tradición de investigaciones sostenidas en el ámbito de las ciencias Matemáticas por lo que esta iniciativa constituye un aporte singular en el desarrollo de la cultura investigativa aplicada a las ciencias Matemáticas.

CAPÍTULO 2. Marco referencial

2.1. Marco Teórico

2.1.1. Estrategias Didácticas

Es la Forma reflexiva que el instructor o Docente diseña para lograr el aprendizaje del Alumno. Todo lo que Contribuya con Guiar, Ayudar o apoyar al Estudiante a comprender una determinada disciplina del saber Humano se inscribe en el marco de la Estrategia Didáctica.

Para el logro de este propósito el Maestro o Docente debe emplear los procedimientos apropiados al nivel de desarrollo de los receptores de sus enseñanzas, valiéndose de las técnicas y métodos educativos probados científicamente, y los debe reforzar con sus propia experiencia y con las vivencias o cosas de modas que puedan llamar la atención de los Estudiantes, debe ser flexible y empático y si es posible aplicar estrategias pedagógicas segmentando o personalizando en algunos casos el tipo de clases a ser impartidas.

Es decir que la Estrategia pedagógica, tiene que lograr por todos los medios de transmitir la enseñanza que tiene el docente como propósito final de la impartición de una clase en particular, debe irradiar entusiasmo, de lo que se pretende enseñar a tal punto que el Alumno haga propio el deseo de aprender.

Se recomienda que el Docente no debe hacer que el estudiantado perciba que se es arrogante por el nivel de conocimiento que posee frente a Ellos, sino todo lo contrario debe mostrar sencillez, para conseguir atraerlos y que se sientan en confianza de que el profesor tiene la intención de transmitirle los conocimientos que permitirán desarrollarse profesionalmente, transformar a la sociedad en que viven y alcanzar una mejor calidad de vida para él y sus relacionados.

Es de vital importancia mostrar al Alumno, la utilización de la asignatura que se imparte en su vida profesional, además cuál es la utilización de esa materia en la Ciencia, la Tecnología y en la Sociedad en sentido General. Si Por ejemplo la Materia a ser enseñada es MATEMÁTICAS, el Docente debe tratar de que los Alumnos conozcan lo imprescindible que es para la realización de los cálculos que hacen posible los diseños de fabricación de todas los Dispositivos Electrónicos, Los Automóviles, Los puentes, Los Trenes, Las Viviendas, la Electricidad y todas las cosas que usamos en el diario vivir.

El procedimiento citado precedentemente, sin dudas contribuirá alejar el pensamiento negativo que frecuentemente padece la clase estudiantil de que lo que se le intenta enseñar en las aulas no tiene aplicación práctica en la vida y que solo se hace para cumplir con un requisito de las entidades educativas, entonces los estudiantes reaccionan con mayor interés por aprender que el mismo docente por enseñar. y en este punto se habrá logrado una verdadera Estrategia Didáctica, porque los alumnos aprenderán mucho más con menos esfuerzo del docente.

2.1.2. Teorema del Residuo

Este importantísimo teorema nos ayuda a calcular integrales reales que son bastante laboriosa, además podemos resolver integrales de funciones trigonométricas, integrales de contorno semicircular, contorno dentado, integración a lo largo de un corte de rama con funciones multivaluadas.

Este maravilloso teorema del residuo fue desarrollado y aplicado por Cauchy, con este descubrimiento hoy podemos calcular integrales a lo largo de un camino. También podemos decir que sin este teorema sería muy difícil resolver algunas integrales de contorno.

2.1.3. Integrales reales

Cómo Integral se entiende la parte del cálculo y el análisis matemático que comprende o contiene todas las partes necesarias para formar el todo, son una operación inversa a la Derivación que procura descomponer ese todo en cada una de sus partes mediante la utilización de artificios o reglas o métodos Matemáticos preestablecidos.

La Integral Real posee una estructura que contiene una función real de una Variable real, asignados a un intervalo. La función se suele designar con la letra (f) y la variable con (x), mientras el intervalo podría estar comprendido entre a y b.

El uso de las integrales reales es frecuente en el desarrollo de aplicaciones computacionales, para la interpretación de Gráficos, cálculos y diseños, en el desarrollo de los dispositivos Electrónicos, en las diversas soluciones de Ingeniería eléctrica, Ingeniería Civil y Medio Ambiente.

En el Campo de la Investigación científica para el desarrollo de Tecnologías con diversas aplicaciones para el diseño y fabricación de Equipos, Maquinarias, se emplean las integrales en tareas tales como:

1. Gráficos de interpretación de distintas situaciones en sayos de Física (Gráficos en Sistemas de Coordenadas Cartesianas)
2. Interpretación Algebraica (Planteando, operando y solucionando Integrales)
3. Interpretación Numérica (Donde se puede conseguir aproximaciones numéricas, etc.)

2.2. Marco Conceptual:

2.2.1. Numero Complejo

Es cualquier número de la forma $Z = a + bi$, donde a y b son número reales e i la unidad imaginaria. (Zill, 2011)

2.2.2. Formula de Moivre:

La fórmula de Moivre es útil para ciertas identidades trigonométricas que implican $\cos n\theta$ y $\sin n\theta$.

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. (Zill, 2011)

2.2.3. Potencia y Raíces

las n raíces n-ésima de un número complejo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ diferente de cero están dadas por

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Donde k=0, 1, 2...... n-1. (Zill, 2011)

2.2.4. Residuo y Teorema del Residuo:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots. \text{ (Zill, 2011)}$$

2.2.5. Residuo de un polo simple:

$$Res(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Demostración:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0) + \cdots,$$

Donde $a_{-1} \neq 0$. Al multiplicar ambos lados de esta serie por $(z - z_0)$ y luego tomando el limite cuando $(z \to z_0)$ obtenemos:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} [a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots]$$

$$= a_{-1} = Res\,(f(z), z_0). \text{ (Zill, 2011)}$$

2.2.6. Residuo de un polo de orden n:

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$$

Demostración:

$$f(z) = \frac{a_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

Donde $a_{-n} \neq 0$. Multiplicamos la última expresión por $(z - z_0)^n$

$$\begin{aligned}(z - z_0)^n f(z) \\ &= a_n + \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n \\ &+ a_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots\end{aligned}$$

Y después derivando n-1 veces ambos lados de la igualdad:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] = (n-1)!\,a_{-1} + n!\,a_0(z-z_0) + \cdots$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] = (n-1)!\,a_{-1}$$

Resolviendo la última ecuación para a_{-1} se obtiene:

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$ (Zill, 2011)

Aplicaciones del Teorema de Residuo para calcular integrales del tipo:

2.2.7. Evaluación de integrales reales trigonométricas

Integrales de la forma $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ La idea básica aquí es convertir una integral trigonométrica real de la forma (1) en una integral compleja, donde el contorno C es la circunferencia unitaria $|z| = 1$ centrada en el origen. Para esto partimos de (10) de la sección 2.2 para parametrizar este contorno por $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Podemos entonces escribir

$$dz = ie^{i\theta}d\theta, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2i},$$

Las dos últimas expresiones son consecuencia de (2) y (3) de la sección 4.3. Dado que $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ y $z^{-1} = 1/z = ie^{-i\theta}$, estas tres cantidades son equivalentes a

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(z+z^{-1}), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}(z-z^{-1}) \tag{4}$$

La conversión de la integral en (1) en una integral de contorno se lora sustituyendo, a su vez, $d\theta$, $\cos\theta$ y $\sin\theta$ con las expresiones en (4):

$$\oint_C F\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)\frac{dz}{iz},$$

Donde C es la circunferencia unitaria $|z| = 1$. (Zill, 2011)

2.2.8. Evaluación de integrales reales trigonométricas

Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ Supongamos que $y = f(x)$ es una función real que está definida y es continua en el intervalo $[0, \infty)$. En cálculo elemental la integral $I_1 = \int_0^{\infty} f(x)\,dx$ se define como el límite

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} f(x)\,dx \tag{5}$$

Si el límite existe, se dice que la integral I_1 es **convergente**, de lo contrario, es **divergente**. La integral impropia $I_2 = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ se define de manera similar

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} f(x)\,dx \tag{6}$$

Por último, si f es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx = I_1 + I_2, \tag{7}$$

Siempre que *ambas* integrales I_1 y I_2 sean convergentes, si cualquiera de ellas, I_1 o I_2, es divergente, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente. Es importante recordar que el lado derecho de (7) no es igual que

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{R} f(x)\,dx\right] = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \tag{8}$$

Para que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ sea convergente, los límites (5) y (6) deben existir independientemente uno del otro, *Pero,* en caso de que conozcamos (*a priori*) que una integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converja, entonces se puede evaluar por medio del proceso al límite dado en (8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \tag{9}$$

Por otro lado, el límite simétrico en (9) puede existir aun cuando la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ sea divergente, por ejemplo, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ es divergente ya que $\lim_{R\to\infty} \int_0^R x\, dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} R^2 = \infty$, sin embargo, con (9) se obtiene

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R x\, dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} [R^2 - (-R)^2] = 0 \tag{10}$$

El límite en (9), si existe, se llama **valor principal de Cauchy** (V.P.) de la integral y se escribe como

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \tag{11}$$

En (10) hemos demostrado que $V.P. \int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = 0$. En resumen:

Valor principal de Cauchy

Cuando una integral de la forma (2) converge, su valor principal de Cauchy es igual que el valor de la integral. Si la integral diverge, aún puede tener un valor principal de Cauchy (11).

Un último punto sobre el valor principal de Cauchy; Supongamos que $f(x)$ es continua en (-∞, ∞) y es una función *par*, es decir $f(-x) = f(x)$, entonces su gráfica es simétrica con respecto al eje y, y como consecuencia

$$\int_{-R}^{0} f(x)\, dx = \int_0^R f(x)\, dx \tag{12}$$

$$y \quad \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-R}^{0} f(x)\, dx + \int_0^R f(x)\, dx = 2\int_0^R f(x)\, dx \tag{13}$$

De (12) y (13) concluimos que *si* el valor principal de Cauchy (11) existe, entonces tanto $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ convergen. Los valores de las integrales son

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

De acuerdo con el teorema 6.5.3 de la sección 6.5 (Zill, 2011)

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\,(f(z), z_k),$$

donde z_k $k= 1, 2..., n$ denota polos en el semiplano superior. Si podemos demostrar que la integral $\oint_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ cuando $R \to \infty$, entonces tenemos

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\,(f(z), z_k) \qquad (14)$$

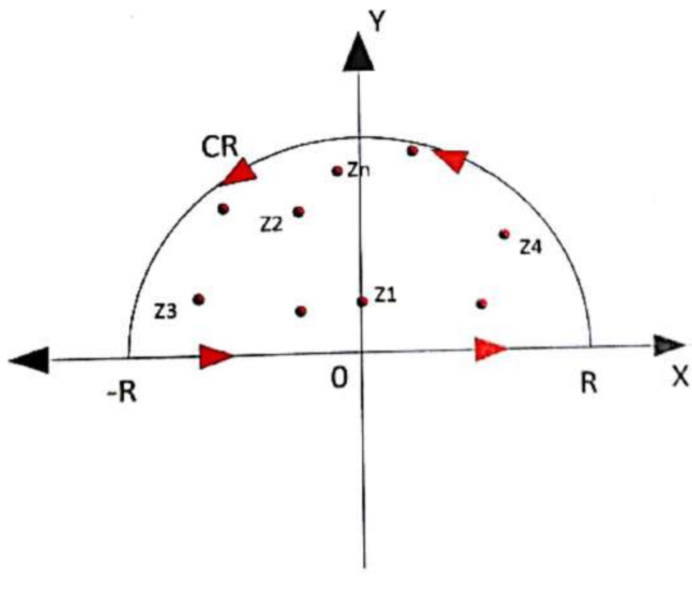

Figura 1. Contorno semicircular

2.2.9. Integrales de la forma

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \propto x\,dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \propto x dx$. Debido a que las integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \propto x dx$ se encuentran en las aplicaciones del análisis de Fourier, con frecuencia se conocen como **integrales de Fourier.** Éstas se presentan como las partes real e imaginaria de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\propto x} dx$. Usando la fórmula de Euler $e^{i\propto x} = \cos \propto x + i \sin \propto x$, donde $\propto$ es un número real positivo, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\propto x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \propto x\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \sin \propto x dx \qquad (16)$$

Siempre que ambas integrales del lado derecho converjan. Suponga que $f(x) = {}^{p_{(x)}}/_{q_{(x)}}$ es una función racional que es continua en (-∞, ∞). Entonces, ambas integrales de Fourier en (10) se pueden evaluar al mismo tiempo, considerando la integral compleja $\int_C f(z) e^{i\propto z} dz$, donde ∝>0, y el contorno. (Zill, 2011)

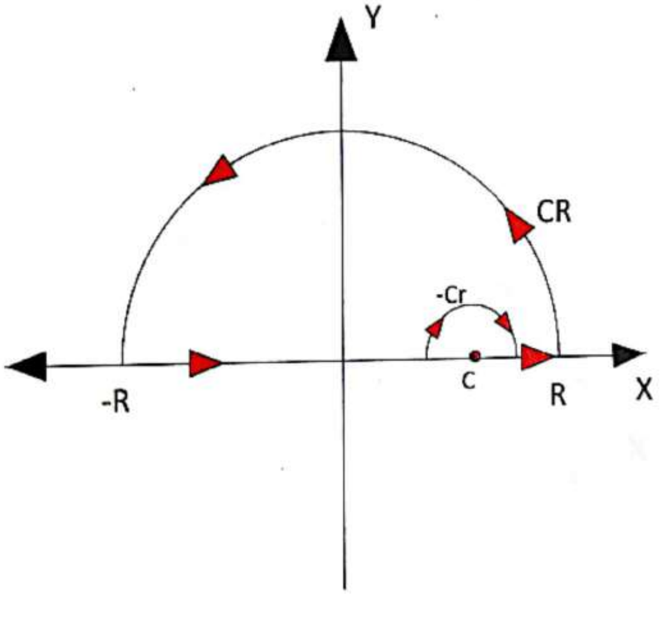

Figura 2. Contorno dentado

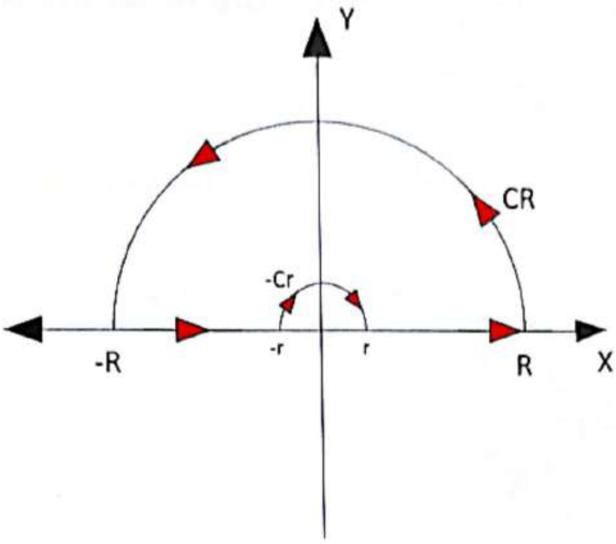

Figura 3. Contorno dentado

$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$ Este contorno es utilizado cuando trabajamos con funciones multivaluadas

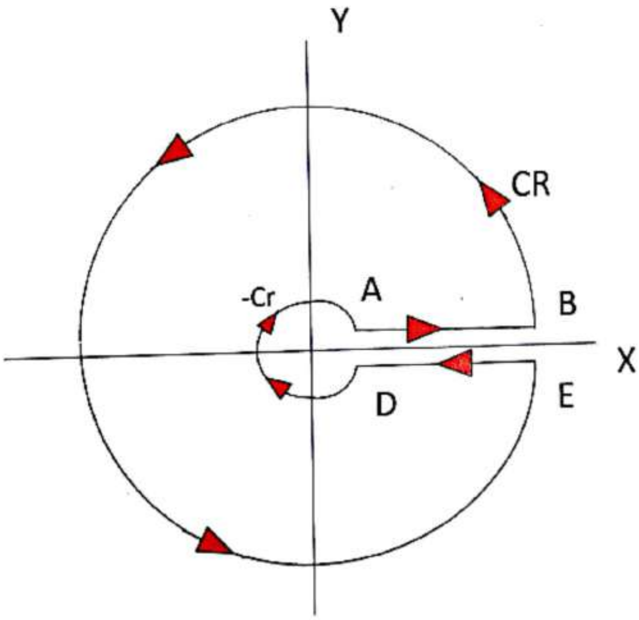

Figura 4. Contorno a lo largo de una función multivaluada

Ejemplo 1. Cálculo del residuo de una función $f(z)$:

Sea $f(z) = \frac{1}{(Z-4)^2(Z-6)}$ **encuentra los polos y residuo:**

Podemos decir que $z-6=0 \rightarrow z=6$ es un polo simple. Aplicando el residuo para un polo simple

$$[Res\,(f(z), Z_0)] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

$$[Res\,(f(z), 6)] = \lim_{z\to 6}(z-6)\left[\frac{1}{(z-4)^2(z-6)}\right]$$

$$[Res\,(f(z), 6)] = \lim_{z\to 6}\frac{1}{(z-4)^2} = \frac{1}{4}$$

Para $(z-4)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (z-4)(z-4) = 0 \qquad z = 4\ es\ un\ polo\ de\ orden\ 2$

Aplicando residuo para un polo de orden n:

$$\left(Res\,(f(z), z_0)\right) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

$$\left(Res\,(f(z), 4)\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 4}\frac{d}{dz}\left((z-4)^2\frac{1}{(z-4)^2(z-6)}\right)$$

$$\left(Res\,(f(z), 4)\right) = \lim_{z\to 4}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-6}\right)$$

$$\left(Res\,(f(z), 4)\right) = \lim_{z\to 4}\left(-\frac{1}{(z-6)^2}\right)$$

$$\left(Res\,(f(z), 4)\right) = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo 2. Cálculo del residuo de una función $f(z)$:

Sea $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$ **encuentra los polos y residuo:**

Hallamos las singularidades

$$z^6 = -1 \quad \rightarrow \quad z = (-1)^{1/6} \quad \theta = \pi \quad n = 6$$

$$w = (1)^{1/6}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

$$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad para\, k = 0$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \qquad Z_2 = i \qquad para\, k = 1$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad Z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad para\, k = 2$$

Aplicando el teorema del Residuo de Cauchy

$$Res\,(f(z), z_1) = \frac{1}{(6z_1)^5} = \frac{1}{6\left(\sqrt{3}/_2 + {}^{i}/_2\right)^5} = \frac{1}{12}(\sqrt{3} + i)$$

$$Res\,(f(z), z_2) = \frac{1}{(6z_2)^5} = \frac{1}{6(i)^5} = \frac{1}{6i}$$

$$Res\,(f(z), z_3) = \frac{1}{(6z_3)^5} = \frac{1}{6\left(-\sqrt{3}/_2 + {}^{i}/_2\right)^5} = \frac{1}{12}(\sqrt{3} - i)$$

Ejemplo 3. Cálculo de una integral trigonométrica de la forma $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+0.5\ \sin\theta} d\theta$$

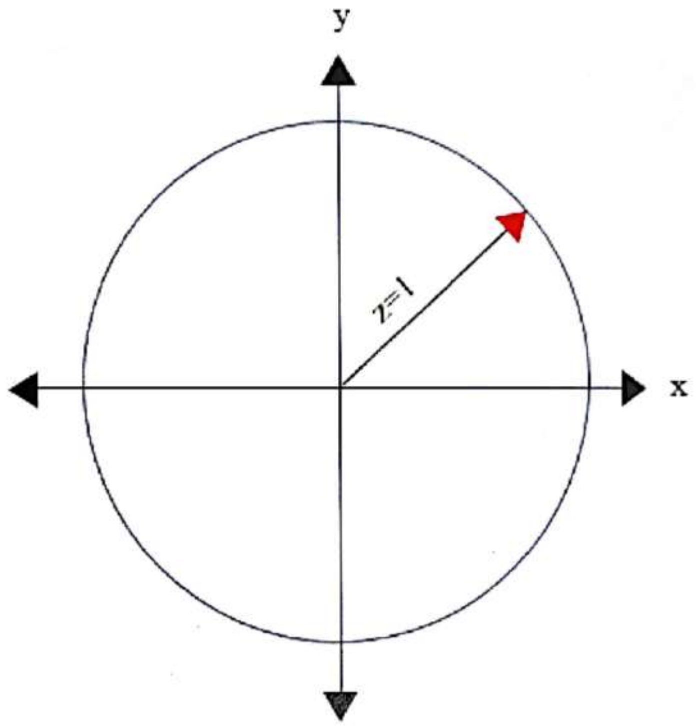

Figura 5. Circulo unitario

Hacemos $Z = \ e^{i\theta} \ = \cos\theta + i\sin\theta$ donde $dz = ie^{i\theta}d\theta$

Despejando a $dz = iz\ d\theta$ $\quad C\colon |Z| = 1$

$\frac{dz}{iz} = d\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Usamos las identidades

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

UNIVERSIDAD APEC
BIBLIOTECA

$$\oint_C \frac{1}{\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\right]}\frac{dz}{2i} = \oint_C \frac{dz}{\left[iz+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{4}\right]} \qquad multiplicamos\ por\ \frac{4}{4}$$

$$\oint_C \frac{4}{z^2+4iz-1}dz \qquad z^2+4iz-1=0$$

Hallamos las singularidades.

$$z=-4i\pm\frac{\sqrt{(4i)^2-4(1)(-1)}}{2(1)} = -4i\pm\frac{\sqrt{-12}}{2} = -4i\pm\frac{2\sqrt{3i}}{2}$$

$$z=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)i \qquad z_1=\left(-2+\sqrt{3}\right)i \qquad z_2=\left(-2-\sqrt{3}\right)i$$

Solo Z1 está dentro de la circunferencia unitaria C.

Aplicando el teorema del Residuo de Cauchy

$$\oint_C \frac{dz}{\left[z-(-2+\sqrt{3})i\right]\left[z-(-2-\sqrt{3})i\right]} = 4(2\pi i)\ \ [Res\ (f(z),Z_1)]$$

$$[Res\ (f(z),Z_1)] = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)$$

$$= \lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i}\left[z-\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right]\frac{1}{\left[z-\left(-2+\sqrt{3}\right)i\right]\left[z-\left(-2-\sqrt{3}\right)i\right]}$$

$$= \lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i}\frac{1}{\left[z-\left(-2-\sqrt{3}\right)i\right]} = \frac{1}{\left(-2+\sqrt{3}\right)i+\left(2+\sqrt{3}\right)i}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}i}$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z^2+4iz-1} = 4(2\pi i)\frac{1}{2\sqrt{3}i} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+0.5\sin\theta}d\theta = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 4. Integrales trigonométricas

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\, d\theta \;=\; \frac{a\pi}{\left(\sqrt{a^2-1}\right)^3} \quad , \qquad a > 1$$

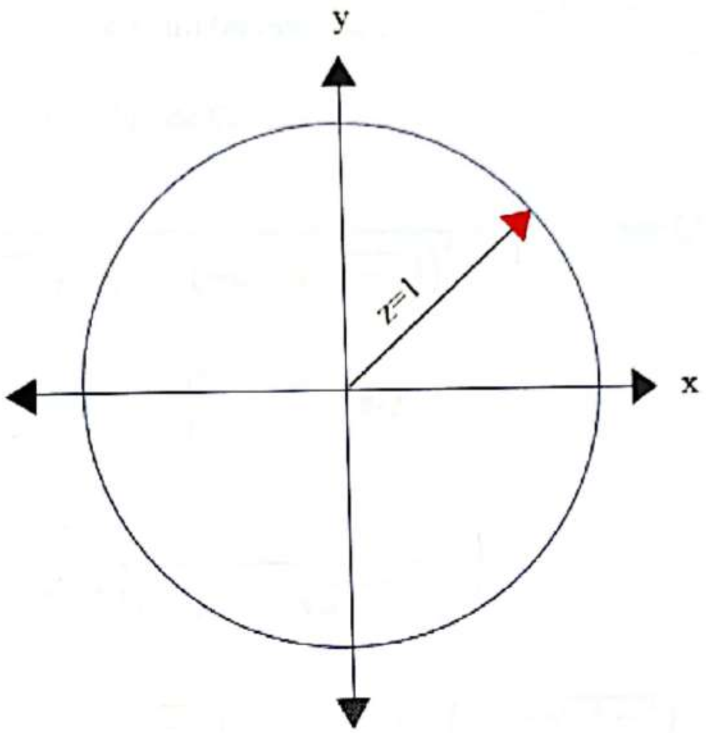

Figura 6. Circulo unitario

$$z = \; e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\, d\theta \qquad d\theta = \tfrac{dz}{iz} \qquad \cos\theta = \tfrac{z + {}^{1}/_{z}}{2}$$

$$\oint_C \frac{1}{\left[a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{4z^2}{(2az + z^2 + 1)^2 .\, iz}\, dz$$

$$\oint_C \frac{{}^{4z}/_{i}}{(z^2 + 2az + 1)^2}\, dz \;=\; \frac{4}{i}\oint_C \frac{zdz}{(z^2 + 2az + 1)^2}$$

Hallamos las singularidades.

$$z^2 + 2az + 1 = 0 \qquad z = \frac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = \frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 - 1}}{2}$$

$$z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \qquad z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \qquad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

z_1: *es un punto dentro de la circunferencia unitaria.*

z_2: *es un punto fuera de la circunferencia unitaria.*

Aplicando el teorema del Residuo de Cauchy

$$\frac{4}{i}\oint_C \frac{zdz}{\left(z - \left(-a + \sqrt{a^2 - 1}\right)\right)^2 \left(z - \left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right)\right)^2} = \frac{4}{i}(\pi i)(Res\,(f(z), z_1))$$

$$\left(Res\,(f(z), z_1)\right) = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z - z_1)^n f(z))$$

$$= \lim_{z \to -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\left(z - \left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right)\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{z \to -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{\left(z - \left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right)\right)^2 - z\,(2)(z - \left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right)}{\left(z - \left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right)\right)^4}$$

$$= \lim_{z \to -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{-2z + \left(z - \left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right)\right)}{\left(z - \left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right)\right)^3}$$

$$= \frac{-2\left(-a + \sqrt{a^2 - 1}\right) + \left(-a + \sqrt{a^2 - 1} + a + \sqrt{a^2 - 1}\right)}{\left(-a + \sqrt{a^2 - 1} + a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^3} = \frac{2a}{\left(2\sqrt{a^2 - 1}\right)^3}$$

$$= \frac{a}{4\sqrt[3]{(a^2 - 1)^2}}$$

$$= \oint_C \frac{dz}{(z^2 + 4az + 1)^2} = \frac{4}{i}(\pi i)\left(\frac{a}{4(a^2 - 1)^{3/2}}\right) = \frac{a\pi}{(a^2 - 1)^{3/2}}$$

$$\therefore \int_0^\pi \frac{1}{(a + \cos\theta)^2} d\theta \;=\; \frac{a\pi}{\left(\sqrt{a^2 - 1}\right)^3} \quad , \qquad a > 1$$

Ejemplo 5. Contorno semicircular

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^6+1}dx$$

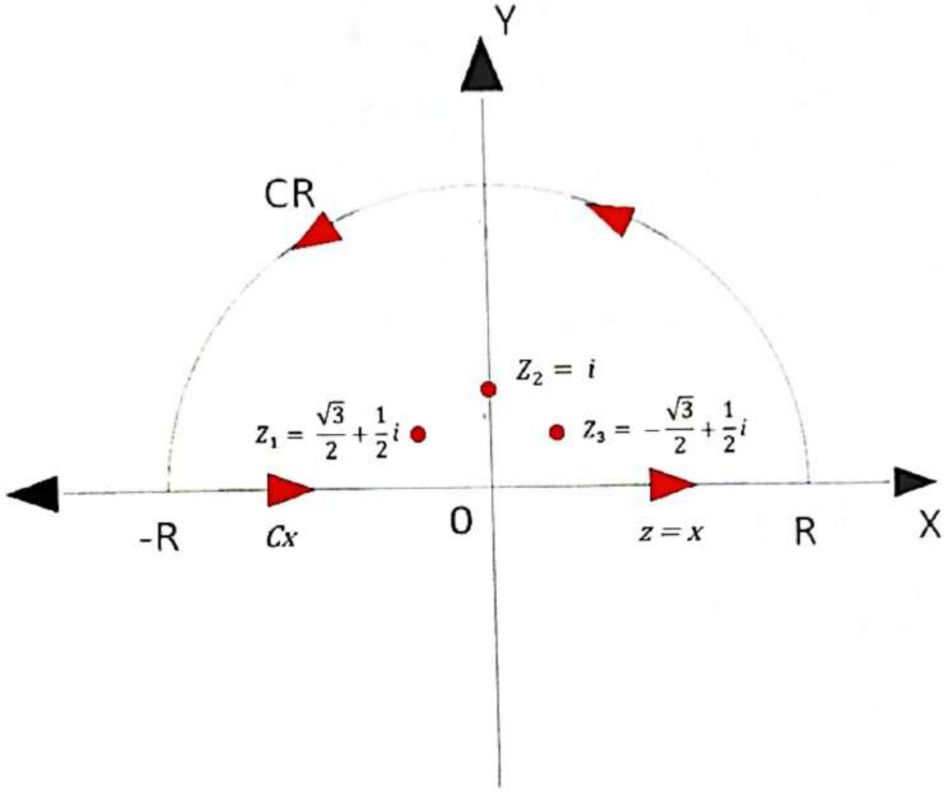

Figura 7. Contorno semicircular

$$\oint_C \frac{1}{z^6+1}dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^6+1}dx + \int_{CR} \frac{1}{z^6+1}dz$$

$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$

Hallamos las singularidades

$z^6 = -1 \quad \rightarrow \quad z = (-1)^{1/6} \quad \theta = \pi \quad n = 6$

$$w = (1)^{1/6}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)$$

$$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad para\ k = 0$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \qquad Z_2 = i \qquad para\ k = 1$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad Z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad para\ k = 2$$

Aplicando el teorema del Residuo de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z^6+1}dz = \pi i\,(Res\,(f(z), z_1) + Res\,(f(z), z_2) + Res\,(f(z), z_3))$$

$$Res\,(f(z), z_1) = \frac{1}{(6z_1)^5} = \frac{1}{6\left(\sqrt{3}/_2 + i/_2\right)^5} = \frac{1}{12}(\sqrt{3} + i)$$

$$Res\,(f(z), z_2) = \frac{1}{(6z_2)^5} = \frac{1}{6(i)^5} = \frac{1}{6i}$$

$$Res\,(f(z), z_3) = \frac{1}{(6z_3)^5} = \frac{1}{6\left(-\sqrt{3}/_2 + i/_2\right)^5} = \frac{1}{12}(\sqrt{3} - i)$$

$$\oint_C \frac{1}{z^6+1}dz = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12} + \frac{1}{6i} + \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}\right)$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{2i}{12} - \frac{1}{6}i\right)$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{2}{6}i\right) = \frac{2}{3}\pi$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3}$$

Ejemplo 6. Contorno semicircular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx$$

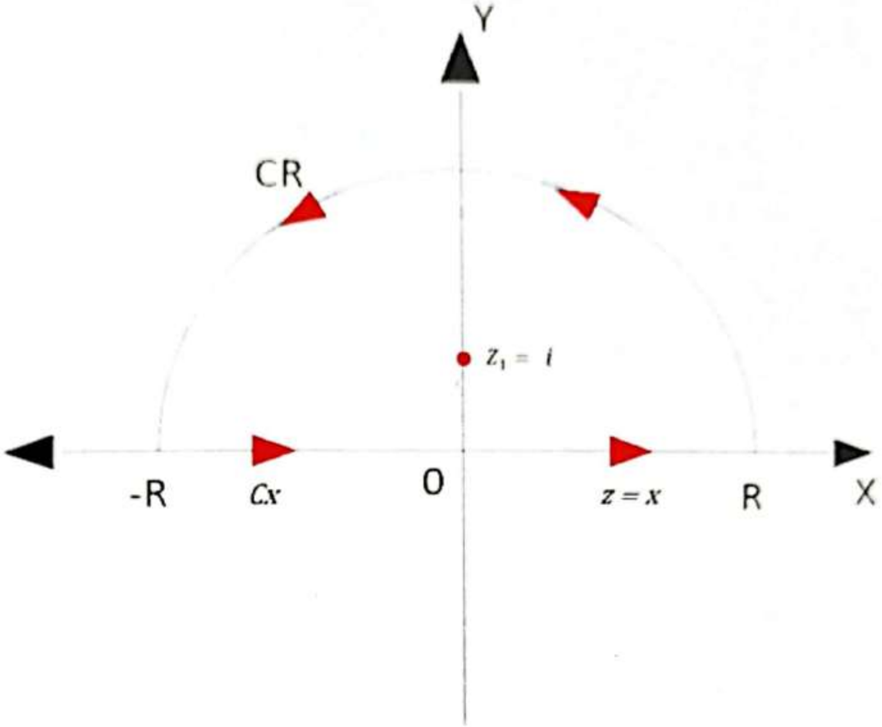

Figura 8. Contorno semicircular

$$\oint_C \frac{e^{i2z}}{z^2+1} dz$$

$$\left|\frac{e^{i2(x+iy)}}{z^2+1}\right| = \frac{|e^{-2y+2ix}|}{|z^2+1|} = \frac{|e^{2ix}||e^{-2y}|}{|z^2+1|} = \frac{e^{-2y}}{|z|^2-1}$$

$$\frac{e^{-2y}}{|z|^2-1} \leq \frac{1}{R^2-1}$$

$$LCR = \pi R$$

$$\left|\int_{CR} \frac{e^{i2z}}{z^2+1} dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \rightarrow 0 \quad para\ R \rightarrow \infty$$

Cx: $y = 0$ $\qquad z = x \qquad dz = dx$

$$\int_{Cx} \frac{e^{i2z}}{z^2+1} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i2x}}{x^2+1}$$

La singularidad

$z^2+1 \;\rightarrow\; z^2 = -1 \qquad z_1 = i \;\; in \qquad z_2 = -i \;\; out$

Aplicando el teorema del Residuo de Cauchy

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i\, (Res\, f(z), i) \qquad f(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2+1}$$

$$Res\,(f(z), i) = \frac{e^{i2z_1}}{2z_1} = \frac{e^{i2(i)}}{2(i)} = \frac{e^{-2}}{2i}$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i2x}}{x^2+1} dx + \int_{CR} \frac{e^{i2z}}{z^2+1} = 2\pi i \left(\frac{e^{-2}}{2i}\right) = \pi e^{-2}$$

$Para\; R \rightarrow \infty$

$$C.P.V. = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2+1} dx = \pi e^{-2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx = \pi e^{-2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx = \pi e^{-2}$$

Ejemplo 7. Contorno dentado

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

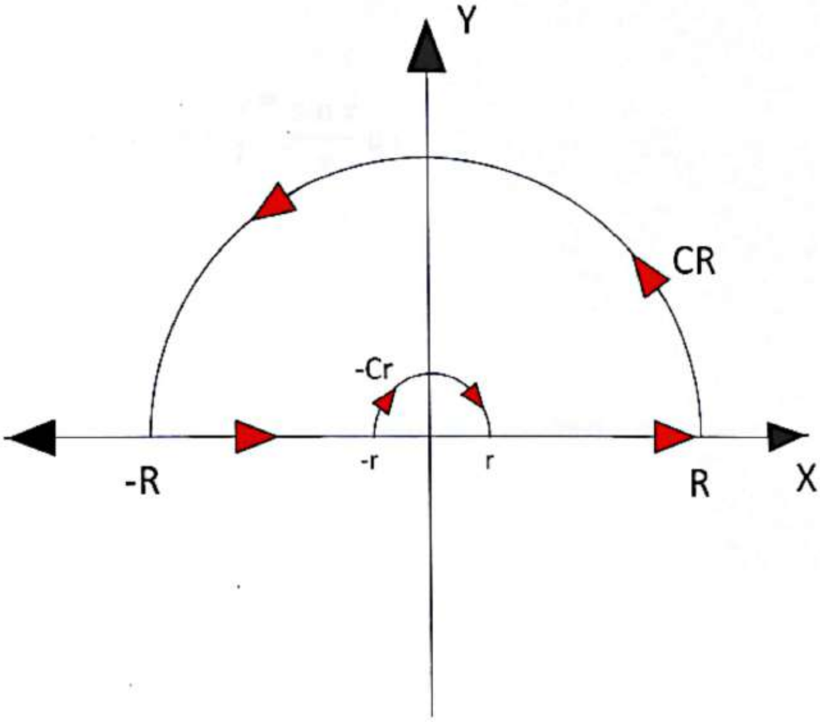

Figura 9. Contorno dentado

$$\oint_{C}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

La función tiene un polo $z = 0$

En el semiplano superior el contorno C está dentado en el origen.

$$\oint_{C}^{\cdot} = \int_{CR}^{\cdot} + \int_{R}^{-r} + \int_{-Cr}^{\cdot} + \int_{r}^{R} = 0$$

$$donde \int_{-Cr}^{\cdot} = -\int_{r}^{R} = Si\ tomamos\ limite\ cuando\ R \to \infty\ y\ r \to 0$$

$$V.P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i\ (Res\ f(z), 0) = 0$$

$$(Res\, f(z), 0) = \frac{e^{iz}}{1} = 1 \qquad\qquad f(z) = e^{iz}/_{z}$$

$$V.P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i\ (1) = \pi i$$

$$V.P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\pi i = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Ejemplo 8. Contorno a lo largo de un corte de rama

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

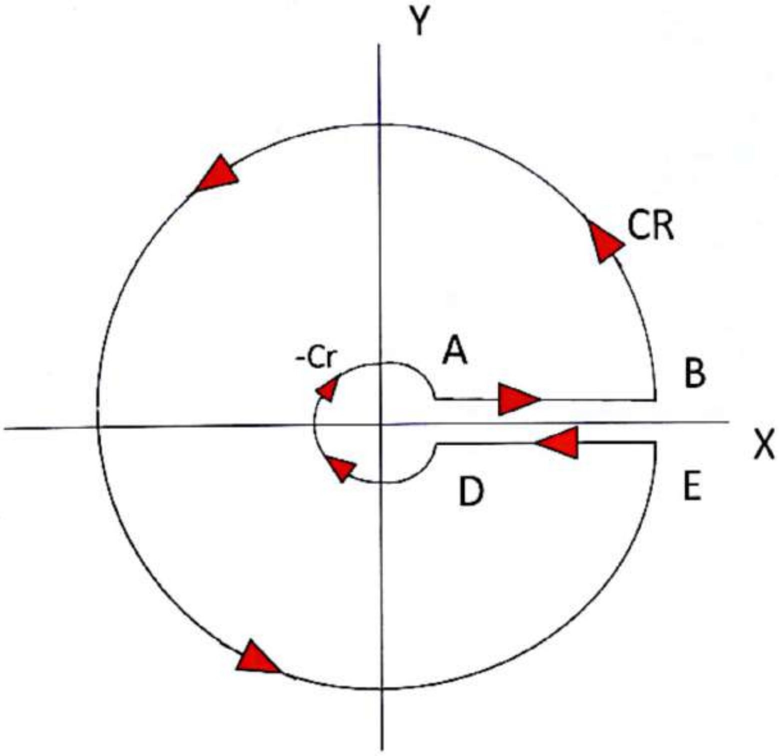

Figura 10. Contorno a lo largo de un corte de rama

$$\oint_C \frac{1}{z^{1/2}(z^2+1)}dz$$

$z^2+1=0$ $\quad z=\pm i$ $\quad z=i \ \ in$ $\quad z=-i \ \ in$ $\quad z=e^{\frac{\pi}{2}i}$

$$\oint_C \frac{1}{z^{1/2}(z^2+1)}dz = 2\pi i\,(Res\, f(z), i)$$

ó $\int_{CR} + \int_{ED} + \int_{Cr} + \int_{AB} = 2\pi i\,(Res\, f(z), i)$

- Los segmentos de recta AB y DE se encuentran sobre el eje real positivo.
- AB coincide con la parte superior del eje real positivo $\theta = 0$
- ED coincide con la parte inferior del eje real positivo $\theta = 2\pi$

$AB, z = xe^{oi}$ $\qquad ED, z = xe^{i(0+2\pi)} = xe^{2\pi i}$

$$\int_{ED} = \int_R^r \frac{\left(xe^{2\pi i}\right)^{-1/2}}{(xe^{2\pi i})^2 + 1}\, e^{2\pi i}\, dx$$

$$\int_R^r \frac{x^{-1/2}\, e^{-\pi i}.\, e^{2\pi i}}{(x^2 e^{4\pi i}) + 1} dx = \int_R^r \frac{x^{-1/2}\, e^{\pi i}}{x^2 e^{4\pi i} + 1}\, dx - \int_R^r \frac{x^{-1/2}}{x^2 + 1}\, dx$$

$$= \int_r^R \frac{x^{-1/2}}{x^2 + 1}\, dx \qquad \textbf{ec. 1}$$

$$\int_{AB} = \int_r^R \frac{\left(xe^{oi}\right)^{-1/2}}{(xe^{oi})^2 + 1} dx = \int_r^R \frac{x^{-1/2}}{x^2 + 1} dx \qquad \textbf{ec. 2}$$

Ahora $z = re^{io}$ y $z = Re^{io}$ sobre Cr y CR respectivamente por el teorema 6.6.1 (Zill, 2011) $\int_{CR} \to 0$ $siendo\ r \to 0$ y $\int_{CR} + \to 0\ cuando\ R \to 0$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left[\int_{CR} + \int_{ED} + \int_{Cr} + \int_{AB} = 2\pi i\ (Res\ f(z), i)\right]$$

$$2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx = 2\pi i\ [Res(f(z), i) + Res(f(z), -i)]$$

$$Res(f(z), i) = \left.\frac{z^{-1/2}}{z + i}\right|_{z = i} = \frac{(i)^{-1/2}}{i + 1} = \frac{i^{-1/2}}{2i} = -\frac{1}{2} i^{-1/2}$$

$$Res(f(z), i) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} i$$

$$Res(f(z), -i) = \left.\frac{z^{-1/2}}{z - i}\right|_{z = -i} = \frac{(-i)^{-1/2}}{-2i} = \frac{(-i)^{1/2}}{-2} = \frac{(-1)^{1/2} .\, i^{1/2}}{-2}$$

$$= \frac{i.\, i^{1/2}}{-2} = \frac{-i\, .\, i^{1/2}}{2}$$

$$Res(f(z),-i) = -\frac{i}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4}i+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx = 2\pi i\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx = \pi i\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

CAPÍTULO 3. Diseño Metodológico

3.1. Descriptivo no experimental

El diseño descriptivo no experimental es el que se desarrolla conservando las variables sin controlar ni manipular. La persona que efectúa la investigación se circunscribe a observar el comportamiento de los eventos según van ocurriendo de forma natural o espontánea y posteriormente los analiza.

Por tratarse de un trabajo de Tesis, necesariamente estaríamos hablando de una investigación no experimental, debido a que las variables objeto del presente estudios corresponden a las integrales mediante la aplicación del teorema del Residuo y la metodología de enseñanza para los Estudiantes de Matemáticas y las Ingenierías en sus distintas ramas, serán observadas sin la manipulación o intervención del investigador.

La investigación no experimental se desarrolla sin modificar las variables, solamente se realiza la observación de los fenómenos en su forma o condición natural sin alteración o modificación de su estado original.

La selección del diseño no experimental es la forma o estrategia definida para conseguir las respuestas a las preguntas formuladas en torno a una determinada hipótesis, para lograr satisfacer el propósito del análisis o estudio.

Es decir, presentaremos una perspectiva de la condición de uno o varios conjuntos de objetos o indicadores en un determinado tiempo. Los diseños descriptivos procuran definir una situación mediante la utilización de preguntas a los actores participantes u observaciones hechas por el investigador.

Podríamos resumir diciendo, que la investigación descriptiva es una forma científica que se vale de la observación y narrar el comportamiento de un fenómeno sin intervenir sobre El para modificar su estado o ambiente natural.

3.2. Enfoque Cualitativo

Los datos cualitativos se caracterizan por brindar informaciones detalladas que se requieren para comprender sus consecuencias, mientras que los datos cuantitativos ofrecen las cifras generales de la investigación o estudio.

El enfoque cualitativo se puede utilizar para obtener informaciones detalladas y brindar un toque personal a la investigación. La forma de conseguir datos mediante el uso cuestionario cualitativo debe contener:

Preguntas abiertas, Información Particular, Resultado subjetivos, observación de comportamientos y Estudios de Casos.

La data cualitativa puede ser utilizada para recopilar información detallada de un tema específico, por lo que se recomienda para formular la Hipótesis, así como para iniciar una investigación indagando sobre los fenómenos o problemas y as posibles soluciones que se consideren relevantes para su posible solución futura.

La investigación cualitativa puede tener diversas formas: entrevistas, Estudios de casos, Opiniones de personas entendidas sobre el tema en cuestión, y Grupos Focales.

En nuestra condición de sustentante de una tesis sobre la aplicación de integrales mediante la aplicación del teorema del Residuo, en la enseñanza de las Matemáticas a los alumnos que las cursen y a los Estudiantes de las diversas ramas de la Ingeniería, por tratarse de un tema apéndice de las Matemáticas, que a su vez pertenecen al Calculo Infinitesimal, emplearemos en desarrollo de esta investigación. indistintamente las diferentes formas de investigación cualitativa descritas en el párrafo anterior.

CAPÍTULO 4. Elaboración de la propuesta

Nuestra propuesta va dirigida a mejorar la estrategia de enseñanza aprendizaje fundamentada en la aplicación del teorema del residuo para el cálculo de integrales reales. Nuestro interés es presentar una estrategia que pueda aportar, colaborar y reforzar la enseñanza aprendizaje. Aquí trabajaremos en el campo de los complejos para resolver integrales que son de difícil solución en el campo de los reales.

En este estudio tenemos cuatro etapas o fases donde presentaremos algunas recomendaciones que serán valiosa para alcanzar los objetivo deseados.

4.1. Método IDSE:

1. **Identificar:** el tipo de integral que deseamos resolver.

2. **Definir:** el contorno apropiado para resolver la integral.

3. **Sustituir:** cada elemento de la integral real con elementos complejos de igual equivalencia para convertirla en una integral compleja.

4. **Evaluar:** la integral con los límites de la función para obtener su valor.

En la **Primera fase** proponemos ***el método IDSE*** para la evaluación de integrales trigonométricas de la forma $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$.

Se propone a continuación los siguientes pasos para la solución de integrales reales de la forma $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$.

Estos pasos se conocen como ***el método IDSE***:

1. **Identificar**

   Identificar que la integral sea trigonométrica.

2. **Definir**

   En esta fase se define la circunferencia unitaria como el contorno sobre el cual se integrará.

3. **Sustituir**

Sustituir cada elemento de la integral real con elementos complejos de igual equivalencia para convertirla en una integral compleja.

$$dz = ie^{i\theta}d\theta, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2i}$$

4. **Evaluar**

Sabiendo que una vez se haya hecho las sustituciones la integral dada se transformara en una integral de contorno. Entonces procedemos a realizar las simplificaciones algebraicas para su posterior evaluación y solución.

Se proponen ejercicios donde aplique el teorema del cálculo de polos y residuos:

1. Cálculo del residuo (**Anexo 1** - 1.1 y 1.2)
2. Integrales trigonométricas (**Anexo 1** - 1.3)

En la **segunda fase** presentaremos estrategias dirigidas a solucionar las integrales reales impropias de las formas $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos\propto x\,dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\sin\propto xdx$.

1. **Identificar**

Identificar que la integral impropia sea de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos\propto x\,dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\sin\propto xdx$.

2. **Definir**

Se utiliza un contorno semicircular para evaluar la integral.

3. **Sustituir**

Cada elemento de la integral real con elementos complejos de igual equivalencia para convertirla en una integral compleja.

4. **Evaluar**

Sabiendo que una vez se haya hecho las sustituciones la integral dada se transformara en una integral de contorno. Entonces procedemos a realizar las simplificaciones algebraicas para su posterior evaluación y solución.

Se proponen ejercicios donde realicen integrales reales impropias con un contorno semicircular para encontrar el valor principal de Cauchy (**Anexo 2**).

En la **tercera fase** presentaremos estrategias dirigidas a solucionar los integrales reales impropias para contornos dentados.

1. **Identificar**

   Que la integral tenga singularidades en el eje "x".

2. **Definir**

   Seleccionamos un contorno dentado para evaluar la integral.

3. **Sustituir**

   Cada elemento de la integral real con elementos complejos de igual equivalencia para convertirla en una integral compleja.

4. **Evaluar**

   Sabiendo que una vez se haya hecho las sustituciones la integral dada se transformara en una integral de contorno. Entonces procedemos a realizar las simplificaciones algebraicas para su posterior evaluación y solución.

Se proponen ejercicios donde realicen integrales reales impropias con un contorno dentado para encontrar el valor principal de Cauchy. (**Anexo 3**).

En la **cuarta fase** presentaremos estrategias dirigidas a solucionar los integrales reales impropias de la forma $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$.

1. **Identificar**

   Que la integral sea una integral impropia de la forma $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$.

2. **Definir**

   Seleccionamos un contorno a lo largo de un corte de rama para evaluar la integral de la forma $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$.

3. **Sustituir**

   Cada elemento de la integral real con elementos complejos de igual equivalencia para convertirla en una integral compleja.

4. **Evaluar**

   Sabiendo que una vez se haya hecho las sustituciones la integral dada se transformara en una integral de contorno. Entonces procedemos a realizar las simplificaciones algebraicas para su posterior evaluación y solución.

Se proponen ejercicios donde realicen integrales a lo largo de un corte rama para encontrar la solución. (**Anexo 4**)

Conclusión

El conocimiento de las Matemáticas es la fuente fundamental para el desarrollo de los pueblos, porque es pilar del desarrollo tecnológico que proporciona los medios para la el cotidiano vivir, las condiciones económicas que permiten alcanzar una mejor calidad de vida.

Para que estos conocimientos puedan extenderse a las diversas capas sociales de un país es preciso disponer de docentes con la formación académica necesaria y las destrezas , técnicas y metodologías que faciliten la transferencia de esas sapiencias en el campo de las Matemáticas y que resulte fácil, entretenido y prometa al estudiantado que los temas Matemáticos en su diferentes vertientes servirán para la solución de problemas de la vida real, como son: El diseño y fabricación de Equipos Electrónicos de comunicación, Automóviles, Naves Espaciales, Construcción de Vías de Comunicación, Puentes , Carreteras, Satélites, Electrodomésticos , Etc.

En el imaginario Popular siempre se ha dicho que aprender correctamente las matemáticas es muy difícil, aunque estas aseveraciones no estén fundamentadas en análisis o estudios científicos que así lo demuestren, lo que influye en que haya una predisposición del estudiante hacia las Matemáticas, por esta razón el docente debe estar consciente de esta situación para emplear las estrategias y técnicas necesarias para que el proceso Enseñanza-Aprendizaje sea entretenido , entusiasta y provechoso para el estudiante que serán quienes por motivos generacionales les corresponderán dirigir el futuro de sus respectivos países, lo que hace que sea imprescindible la sólida formación en Matemáticas, que les permita interpretar las relaciones Comerciales con otros Países, las estadísticas de comportamiento de la Economía Global , Local y lo más importante aún poder insertarse en un mundo cada día mayor tecnificado y competitivo.

Los procedimientos en la enseñanza aprendizaje que presentan los estudiantes de ingeniería

y matemática durante su formación en las universidades es motivo de preocupación para la sociedad ya que de ellos depende el desarrollo de los adelanto científico y tecnológico que pueda alcanzar una nación. El desarrollo y los avances de la ciencia y la tecnología depende

de lo que hoy llamamos estudiantes, que mañana serán los profesionales que tendrán el compromiso de seguir brindando el conocimiento en los avance tecnológico y científico. La falta de motivación de los alumnos, desinterés de los alumnos, miedo a las matemáticas y otros factores han incrementado el bajo nivel en el aprendizaje de la Matemática.

La Presentación de este trabajo de Tesis sobre *las* ***Estrategias*** **didácticas para la enseñanza del Teorema del residuo para el cálculo de Integrales Reales,** tiene como propósito primario hacer un aporte que contribuya con la utilización de técnicas y estrategias que faciliten la formación de las diferentes áreas del saber , enfatizando en dar un nivel de conocimiento afianzado con la calidad suficiente, que permita a los profesionales de las Ingenierías disponer de bases sólidas para el desarrollo de sus trabajos investigativos, de diseño, de fabricación, y de análisis de situaciones complejas de los aspectos tecnológicos.

Tomando en consideración lo expresado anteriormente, se hace necesario crear un espíritu de motivación del docente hacia los alumnos. Los procedimientos en la enseñanza aprendizaje que presentan los estudiantes de ingeniería y matemática durante su formación en las universidades es motivo de preocupación para la sociedad ya que de ellos depende el desarrollo de los adelanto científico y tecnológico que pueda alcanzar una nación.

En el mundo actual se hace imperativo la necesidad del conocimiento de Matemático, porque es un mundo globalizado en el que el país que logre mayor desarrollo tecnológico , será el que marque las pautas del liderazgo, económico y Militar, para todo lo cual es imprescindible tener los recursos humanos capaces con el espertiz de analizar y dar solución a los múltiples y variados problemas que se presentan en la sociedad moderna, siendo esto posible solo con un conocimiento solido de las Matemáticas.

Es preciso resaltar que, por razones de naturales de actitud y aptitud, los estudiantes no tienen la misma propensión hacia las ciencias o en especial para el análisis o estudios de las Matemáticas, sin embargo, lo que procuramos que aun conscientes de esta realidad los estudiantes se les otorguen las mismas y facilidades para aprender conceptos Matemáticos , con la suficiente calidad que le permita interpretar y dar solución a los constantes cambios que la ciencias y las tecnología experimentan con frecuencia

No todas y todos los estudiantes, al finalizar su educación básica y de bachillerato, desarrollarán las mismas destrezas y gusto por la matemática, sin embargo, todos deben tener las mismas oportunidades y facilidades para aprender conceptos matemáticos significativos bien entendidos y con la profundidad necesaria para que puedan interactuar equitativamente en su entorno. El aprender cabalmente Matemática y el saber transferir estos conocimientos a los diferentes ámbitos de la vida del estudiantado, y más tarde de los profesionales, además de aportar resultados positivos en el plano personal, genera cambios importantes en la sociedad. Siendo la educación el motor del desarrollo de un país, dentro de ésta, el aprendizaje de la Matemática es uno de los pilares más importantes ya que además de enfocarse en lo cognitivo, desarrolla destrezas importantes que se aplican día a día en todos los entornos, tales como el razonamiento, el pensamiento lógico, el pensamiento crítico, la argumentación fundamentada y la resolución de problemas.

La gran importancia del proceso Enseñanza-Aprendizaje, en cualquier sociedad es extraordinario en los aspectos de la ciencia y la tecnología, para lo que se requiere conocimientos firmes y las herramientas necesarias para transmitir los cambios que se verifican en las Matemáticas, la que evoluciona conforme se experimentan las nuevas tecnologías. En cuanto a las Alumnos y docentes que desarrollen su formación en las ciencias matemáticas logran alcanzar un pensamiento lógico y creativo, capaz de potencializar sus capacidades y destrezas para la solución de problemas del diario vivir y predecir las soluciones futuras según se vayan desarrollando las tendencias mundiales.

Con la propuesta contenida mi tesis, nos proponemos contribuir con el afianzamiento de las destrezas en las Matemáticas, que permita interactuar con éxito en los diversos tipos de profesiones, ofreciendo las soluciones y análisis necesarios que logran dar con los retos de la vida moderna y estar en condiciones de afrontar con éxito el porvenir. El conocimiento y aplicación de las Matemáticas, permite al hombre poder modificar su entorno, poniendo la naturaleza al servicio de la humanidad, con todos los beneficios que esto representa, siempre y cuando se apliquen con prudencia, ética y tomando en consideración la preservación del medio ambiente.

De lo en realidad se trata es de que los docentes dispongan de las técnicas y estrategia necesaria para trasferir esos conocimientos con eficacia a los Alumnos , así estaremos creando un circulo virtuoso que aportara al desarrollo integral de la sociedad, creando profesionales de mayor nivel, debido a que aprender como es debido las matemáticas forjara las bases más importantes ya que además del aporte en lo cognitivo , permite acrecentar la expertiz aplicables en el día a día en todos los ámbitos de la vida , ampliando el pensamiento lógico y crítico y ofreciendo las más variadas soluciones a los problemas de la sociedad.

ANEXOS

Anexo 1. Ejercicios primera fase: cálculo del residuo y evaluación de integrales reales trigonométricas

1.1. En los problemas 1 a 3 utilice una serie de Laurent adecuada para encontrar el residuo indicado.

1) $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z+4)}$; $Res\,(f(z), 1)$

2) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-1)^3}$; $Res\,(f(z), 0)$

3) $f(z) = \dfrac{4z-6}{z(2-z)}$; $Res\,(f(z), 0)$

1.2. En los problemas 4 a 16 encuentre el residuo en cada polo de la función dada.

4) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+16}$

5) $f(z) = \dfrac{5z^4-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$

6) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z+2)^2}$

7) $f(z) = \dfrac{1}{z\sin z}$

8) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 6z + 8}$

9) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 81}$

10) $f(z) = \dfrac{2z^5 - 4z^2 + 5}{3z^6 - 8z + 10}$

11) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

12) $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$

13) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

14) $f(z) = \dfrac{z^5}{1 + z^5}$

15) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 3}$

16) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 1}$

1.3. En los problemas 1 a 5 evalúe la integral trigonométrica dada.

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 0.5\sin\theta}\, d\theta$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2 + \sin\theta}\, d\theta$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2\theta}\,d\theta$

4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{3+\sin\theta}\,d\theta$

5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$

Anexo 2. Ejercicios segunda fase: evaluación de integrales reales impropias con un contorno semicircular.

2.1. En los problemas 1 a 27 evalúe el valor principal de Cauchy de la integral impropia dada.

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$

4) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)} dx$

7) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx$

8) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$

9) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

10) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$

11) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx$

13) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-a)^2(x-1)}\,dx$

14) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx$

15) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$

16) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^4+1}\,dx$

17) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}\,dx$

18) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2-1}\,dx$

19) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-9}\,dx$

20) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-16}\,dx$

21) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx$

22) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$

23) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx$

24) $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1} dx$

25) $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

26) $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

27) $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-1/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Anexo 3. Ejercicios tercera fase: evaluación de integrales reales impropias con un contorno dentado

3.1. **En los problemas 1 a 3 utilice un contorno dentado y residuos para determinar el valor principal de Cauchy de la integral impropia dada**

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$

2) $\int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 3x + 2} dx = \pi[\sin 1 - 2\sin 2]$

Anexo 4. Ejercicios tercera fase: evaluación de integrales a lo largo de un corte rama.

4.1. **En los problemas 1 a 4 proceda para establecer el valor principal de Cauchy de la integral impropia dada.**

1) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

3) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x + 1)(x + 4)} dx = \frac{\pi}{3}$

4) $\int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{(x^2+1)} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

5) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+a)(x+b)} dx = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}\right) \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq b$

6) $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x^2+1)} dx = \frac{(1-a)\pi}{4\cos\left(\frac{a\pi}{2}\right)} \; (-1 < a < 3), \quad donde \;\; x^a = e^{a\ln x}$

BIBLIOGRAFÍA

- Derrick, W. (1984). *Variable compleja con aplicaciones.* Distrito Federal: Grupo Editorial iberoamérica, S. A. de C. V.

- Duarte, R. (2020). *Teoremas de Cauchy y del Residuo.* Obtenido de ROBERTO PEDRO DUARTE ZAMORANO Web Site: http://rpduarte.fisica.uson.mx/archivos/curso3/05-MetMatFisI.pdf

- Gelbaum, B. (1992). *Problems in real and complex analysis.* New York: Springer Science+Business Media, LCC.

- Kumar, H. (2019). *Complex Analysis and Applications.* Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2019.

- Marden, J., & Hoffman, M. (1996). *Análisis Básico de variable compleja.* Editorial Trillas.

- Shakarchi, R. (1999). *Problems and solutions for complex analysis.* New York: Springer-Verlag.

- Zill, D. (2011). *Introducción al Análisis complejo con aplicaciones.* Distrito Federal: CENGAGE Learning Editores, S.A. de C.V.

- González, A. P., & Alonzo Velazque, J. L. (s.f.). *Métodos Numéricos para Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas.*

- Acevedo, Á. C. (2011). *Aplicación deL Método de Diferencias Finitas Generalizdas a Problemas de Elasto-Dinámica.* Madrid.

- Camacho, M., Depool, R., & Garbín, S. (Diciembre de 2008). *SciELO.* Obtenido de Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos.

- Castillo, C. I. (s.f.). *Funciones de Variable Compleja con Aplicaciones a la Teoría de Números.*

- Catsigeras, E. (2006). *Funciones de variable compleja.*
- Cielos, P. R. (2004). *Derivacion e Integracion de Funciones de Variable Compleja con Derive.* España.
- Cumpa Barrios , P. M., & Estrada Romero , P. A. (215). *Diferencias Finitas Asistidas con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas.* Peru.
- Delgado, J. A. (2012). *Aproximación de las Nuevas Soluciones de las EDP'S Segundo Orden por el Método de Descomposición de Adomian* . Oaxaca.
- Félix, J. M. (2011). *Simulación Numérica del Modelo Fenton-Karma con Diferencias Finitas y Campo de Fase.* Mexico.
- Fernández, O. A. (2016). *Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales en Medios Aleatorios y Heterogéneos.* Colombia.
- García, A. C. (2016). *Aplicaciones del Teorema de los Residuos.* La Rioja, España.
- Gómez, J. A. (2007). *Solución Numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales mediante Funciones Radiales* . Mexico.
- González, F. J. (2004). *Curso de Análisis Complejo.* España.
- González, F. J. (Junio de 2004). *Curso de Análisis Complejo.* Obtenido de https://www.ugr.es/~fjperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf
- Hernández, H., & Númez, L. A. (2015). *Matemáticas Avanzadas: Variable Compleja, Series y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Colombia.
- Hernández, H., & Núñez, L. (2019). *Matematica Avanzadas: Variable Compljea, Series de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, con aplicaciones en Maxima.* Venezuela.
- Landin, R. A. (1999). *Comparación de la Solución de Ecuaciones Diferenciales Usando Diferencias Finitas y Elemento Finito.* Nuevo Leon.

UNIVERSIDAD APEC
BIBLIOTECA

- Lerma, A. A. (2018). *Método de Diferencias Finitas para la Solución de la Onda. Consistencia, Convergencia y Estabilidad.* Peru.
- Levinson, N., & Redheffer, R. (2003). *Curso de Variable Compleja.* España: Reverté.
- Lizama, C. (2013). *Variable Compleja. Teoria, problemas resueltos y propuestos.* Chile.
- Marsden, J., & Hoffman, M. (1999). *Basic Complex Analysis.* Nueva York: W. H. Freeman New York.
- Marsden, J., & Hoffman, M. (s.f.). *Analisis Basico de Variable Compleja.* Editorial Trillas.
- Martin, D. S. (2008). *Métodos de Variable Compleja para la Física.* Mallorca, España.
- Mendoza, F. R. (2001). *Una Introduccion a los Números Complejos.* Venezuela.
- Núñez, L. (2007). *Variable Compleja.* Venezuela.
- Peña, J. S. (2009). *Métodos numéricos para las ecuaciones diferenciales.*
- Ponnusamy, S., & Silverman, H. (2000). *Complex Variables With Applications.* Editorial Birkhauser.
- Rodríguez, A. P. (2016). *Aproximación en Variable Compleja.* Seilla, España.
- Roldán, M. A. (2014). *Actitudes del Docente de Matematicas de Eneñanza Secundaria (ESO y Bachillerato) En la Relación Docente-Estudiante.* Barcelona, España.
- Rueda, D. A. (2020). *Introducción al análisis de funciones de una variavle compleja.* Madrid.
- Sandoval, B., Olate Penroz, M. D., Vasquez Reyes, C. A., & Maricel, P. (2010). *Elementos Iniciales Sobre Variable Compleja.* Chile.
- Solís, L. H. (2006). *Variable Compleja I.* México.

- Spiegel, M., Lipschutz, S., Schiller, J., & Spellman, D. (s.f.). *Variable Compleja.* Mc. Graw Hill.
- Terrazas Porras, S. M., & Antolin, A. (2018). *Variable Compleja con Aplicaciones.* Mexico: Editorial académica española.
- Tristán, L., Sanz, J., Galindo, F., & Nuñez, M. (2015). *Variable Compleja.* España.
- Zuazua, E. (2009). *Métodos Numéricos de resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Bilbao.