



**UNAPÉC**  
**UNIVERSIDAD APEEC**

**VICERRECTORIA DE ESTUDIOS POSGRADO.**

**MAESTRIA EN MATEMATICA SUPERIOR**

**Título**

**EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA DE GAUSS MEDIANTE  
INTEGRACIÓN DE CONTORNO Y EL TEOREMA DEL RESIDUO**

**Sustentante**

Lixon Pérez Elías  
2018-1546

**Asesor:**

Prof. Carlos Robert Valdez Coats

Santo Domingo, República Dominicana.  
Agosto, 2020.

## **RESUMEN**

Esta investigación tiene por objetivo evaluar la integral de la función gaussiana utilizando el teorema del residuo e integración de contorno para determinar la solución analítica.

En esta tesis se demostró que es posible determinar la solución analítica de la integral definida de la función Gaussiana mediante integración de contorno y el teorema del residuo. La integración de la función gaussiana se llevó a cabo sobre un contorno rectangular; de igual forma, se estableció una función meromorfa para obtener un polo ya que la función Gaussiana carece de la misma.

## **ABSTRACT**

This research aims to calculate the analytical solution of the integral of the Gaussian function using the residue theorem and contour integration.

In this thesis, it was demonstrated that it is possible to determine the analytical solution of the definite integral of the Gaussian function using the residue theorem and contour integration. The integration of the Gaussian function was carried out on a rectangular contour; therefore, a meromorphic function was used to obtain a pole since the Gaussian function doesn't have one.

## AGRADECIMIENTOS

Soy más que afortunado por tener el privilegio de haber trabajado con mi asesor Carlos Valdez; este trabajo no hubiese sido posible sin su apoyo y guía. Aprecio su perspectiva sobre investigación, su retroalimentación oportuna, su forma de ayudarme a hacer mi trabajo lo más concreto posible, su forma consistente de ayudarme a simplificar y enfrentar directamente el problema.

Aprecio inmensamente el apoyo de los maestros de la facultad de matemática; posiblemente no pueda mencionar a todos; sin embargo, me gustaría mencionar a Ricardo Valdez, Ángela Martí, Miguel Ángel y a mí querido profesor Apolinar de quien conservo con cariño innumerables conversaciones acerca de clases y mi futuro como docente de matemáticas. Valoro esas conversaciones. Gracias por construir en mí una base matemática compacta y por ser excelentes maestros.

Este trabajo no hubiera sido posible completar sin el apoyo de mis amigos y compañeros de clase. Aprecio inmensamente su apoyo. Me gustaría en particular dar las gracias a Mónica por escuchar y extender una mano amiga en todo este proceso.

Agradezco a mi profesor de básica Juan Evangelista de Jesús Manzanillo por su pasión hacia la enseñanza y por haber sentado las bases matemáticas para mi desarrollo en el ámbito profesional.

Me gustaría dar las gracias a mi amigo y hermano Wander Rojas por siempre motivarme a seguir hacia delante y conquistar lo que me planteo. También quisiera agradecer a mi musa Dilenia A. Peralta por ser una fuente de inspiración. Gracias a Gretchen Mckinney y Arthur Ripley por haber reorientado mi perspectiva sobre la educación.

Por último, pero ciertamente no menos importante, agradezco desde lo más profundo de mi ser a Dios, mi madre Mireya Elias, mi padre León Pérez, y estimada esposa Lilly N. Richardson por su amor y apoyo incondicional. No podría haber logrado nada de esto sin todos ustedes.

## ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO I: ASPECTOS INTRODUCTORIOS</b>	
<b>1.1. Planteamiento del problema de Investigación.....</b>	<b>3</b>
<b>1.2. Preguntas de Investigación.....</b>	<b>4</b>
<b>1.3. Objetivos de la Investigación.....</b>	<b>5</b>
1.3.1. Objetivo General.....	5
1.3.2. Objetivo Especifico.....	5
<b>1.4. Justificación de la Investigación.....</b>	<b>6</b>
<b>1.5. Delimitación del Problema.....</b>	<b>7</b>
<b>CAPITULO II: MARCO REFERENCIAL</b>	
<b>2.1. Antecedentes de la Investigación.....</b>	<b>9</b>
<b>2.2. Marco Teórico.....</b>	<b>11</b>
<b>2.2.1. Integración de Contorno.....</b>	<b>11</b>
2.2.1.1. Definición.....	11
2.2.1.2. Métodos de Integración de Contorno.....	13
2.2.1.3. Métodos Directo de Integración de Contorno.....	13
<b>2.2.2. Teorema del Residuo.....</b>	<b>14</b>
2.2.2.1. Definición.....	14
2.2.2.2. Aplicación.....	18
<b>2.2.3. Integral Definida.....</b>	<b>18</b>
2.2.3.1. Teorema Fundamental.....	19
<b>2.2.4. Integral de Gauss.....</b>	<b>19</b>
2.2.4.1. Integrales Impropia.....	19

2.2.4.2.	Definición e Importancia de la Integral de Gauss.....	20
2.2.4.3.	Evaluación de Integral Definida en el Campo Complejo.....	21
<b>2.3.</b>	<b>Marco Conceptual.....</b>	<b>23</b>
2.3.1.	Teorema Fundamental del Cálculo.....	23
2.3.2.	Integración.....	23
2.3.3.	Contorno.....	23
2.3.4.	Función Meromorfa.....	23
2.3.5.	Función Analítica.....	24
2.3.6.	Números Complejo.....	24
2.3.7.	Residuo.....	24
2.3.8.	Polo.....	24
2.3.9.	Polo Simple.....	24
 <b>CAPITULO III: DISEÑO METODOLÓGICO</b>		
<b>3.1.</b>	<b>Tipo de Investigación.....</b>	<b>27</b>
<b>3.2.</b>	<b>Diseño de la Investigación.....</b>	<b>28</b>
 <b>CAPITULO IV: EVALUACION DE LA INTEGRAL DEFINIDA DE GAUSS</b>		
<b>4.1.</b>	<b>Evaluación Mediante el Teorema del Residuo.....</b>	<b>29</b>
<b>4.2.</b>	<b>Demostración Mediante Integración de Contorno.....</b>	<b>31</b>
<b>CONCLUSIONES.....</b>		<b>36</b>
<b>RECOMENDACIONES.....</b>		<b>37</b>
<b>BIBLIOGRAFIAS.....</b>		<b>38</b>
<b>ANEXOS.....</b>		<b>40</b>

## INTRODUCCIÓN

La integral de Gauss es la integral de la función Gaussiana  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  sobre toda la línea real; es una de las integrales más importante en matemáticas y ciencias, también se le conoce como la integral de Euler-Poisson.

Se puede establecer que la inexistencia de una función elemental imposibilita el análisis de esta función utilizando las herramientas del cálculo; esta aseveración se ha demostrado con el algoritmo de Risch. Cuando no es posible evaluar de forma explícita ciertas integrales reales, se suele utilizar el teorema del residuo para determinar la solución analítica. Es justamente este el motivo por lo que esta investigación está centrada en la siguiente pregunta ¿Es posible evaluar la integral definida de Gauss mediante el teorema del residuo e integración de contorno? Por lo que se considera como objetivo central de la investigación: evaluar la integral definida de Gauss utilizando integración de contorno y el teorema del residuo.

Para llevar a cabo esta investigación, el trabajo se ha estructurado en cuatro capítulos.

En el capítulo I “Aspectos Introdutorios” se definen la problemática de investigación y los objetivos; también se abordan la justificación y la delimitación del problema.

En el capítulo II “Marco Referencial” se efectúan algunas precisiones teórico-conceptuales tanto del teorema del residuo como de la integración de contorno los cuales permiten comprender el proceso que se lleva a cabo para evaluar la integral definida de Gauss.

En el capítulo III “Diseño Metodológico” se hace énfasis en la forma en cómo se abordarán cada método para el análisis y la evaluación de la integral gaussiana.

En el capítulo IV “Evaluación de la Integral de Gauss” se demuestra, evalúa y analiza la solución de la integral impropia de la función Gaussiana mediante integración de contorno y el teorema del residuo.

Por último, se aborda las conclusiones, las recomendaciones, las referencias bibliográficas, en conjunto con sus respectivos anexos para dar cierre a esta investigación.

**CAPITULO I**  
**ASPECTOS INTRODUCTORIOS**

## 1.1. Planteamiento del Problema

### 1.1.1. Definición del Problema

La integral no elemental de Gauss es una herramienta pertinente en muchas situaciones en ingeniería matemática y estadística.

Esta integral se puede utilizar para determinar la constante de normalización de la distribución normal. Siguiendo ese mismo orden de idea, la integral de Gauss con límites finitos guarda una estrecha relación con la función de distribución acumulativa de la distribución normal y con la función error.

A pesar de tener una amplia gama de aplicaciones en diversos campos de la matemática, no hay evidencia que sustente la evaluación de la integral definida gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

utilizando el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_s^t f(x) dx = F(t) - F(s)$$

En las bibliografías existentes, relacionadas a la integral citada anteriormente, se plantea que la dificultad que existe para determinar la solución analítica se debe a la inexistencia de una antiderivada; es decir una función que conduzca a su evaluación.

Sin embargo, a pesar de la inexistencia de una antiderivada el análisis de la integral Gaussiana se suele llevar a cabo mediante un artificio matemático que consiste en aplicar el método de coordenadas polares para determinar la solución analítica cuyo valor es  $\sqrt{2\pi}$ .

Sabiendo que el valor de esta integral ha sido demostrado utilizando coordenadas polares, se plantea ahora poder comprobar dicho resultado aplicando el teorema del residuo e integral de contorno.

Tomando como referencia todo lo anterior surgen las siguientes interrogantes:

## 1.2. Formulación del Problema

- ¿Es posible evaluar la integral definida de Gauss utilizando integración de contorno y el teorema del residuo?

## 1.3. Sistematización del Problema

- ¿En cada caso particular a evaluar, se podrá determinar, utilizando el teorema del residuo, la solución analítica de la integral definida de Gauss?
- ¿Es posible demostrar utilizando integración de contorno la solución analítica de la integral definida de Gauss?
- ¿Es posible analizar la integral impropia de la función Gaussiana utilizando una función e integración de contorno para determinar su solución analítica?
- ¿Es posible analizar la integral impropia de la función Gaussiana utilizando una función y el teorema del residuo para determinar su solución analítica?

## **1.4. Objetivos de la Investigación**

### **1.4.1. Objetivo General**

- Evaluar la integral definida de Gauss utilizando integración de contorno y el teorema del residuo.

### **1.4.2. Objetivo Específicos**

- Determinar mediante el teorema del residuo la solución analítica de la integral definida de Gauss.
- Analizar la integral impropia de la función Gaussiana utilizando una función y el teorema del residuo para determinar la solución analítica.
- Demostrar utilizando integral de contorno la solución analítica de la integral definida de Gauss.
- Analizar la integral impropia de la función Gaussiana utilizando una función e integración de contorno para determinar la solución analítica.

### **1.5. Justificación de la Investigación.**

El interés de esta investigación es dar a conocer diversos métodos y una función que permitan llevar a cabo la evaluación de la integral definida de Gauss en el campo de los números complejos, así como los procedimientos que se deben emplear al aplicar integral de contorno y el teorema del residuo a la integral antes citada.

La investigación servirá para dar a conocer una función, varios métodos y las pautas que permitan demostrar la solución analítica de la integral definida de Gauss sin la necesidad de recurrir a ningún artificio matemático; también servirá como un referente al cual recurrir para evaluar la integral Gaussiana con exponente  $-\frac{x^2}{2}$  pero con coeficiente diferente de un medio  $1/2$ .

Los docentes de matemáticas, los estudiantes del Nivel Secundario, Los alumnos del Nivel superior y la sociedad dominicana serán los mayores beneficiarios de esta investigación; ya que tendrán a su disposición una función equivalente a la función Gaussiana que les servirá como herramienta para evaluar la integral definida Gaussiana utilizando integración de contorno y el teorema del residuo.

## **1.6. Delimitación del Problema**

El alcance de este trabajo investigativo será en el campo de los números complejo, centrándonos en la aplicación de integral de contorno y del teorema del residuo para llevar a cabo la evaluación de la integral definida de Gauss mediante una función sin la necesidad de recurrir a ningún artificio matemático.

**CAPITULO II**  
**MARCO REFERENCIAL**

## 2.1. Antecedentes de la Investigación

Desde hace unas décadas el análisis de la integral de Gauss despertó el interés entre los matemáticos e investigadores. A partir de ese momento, el término integral de Gauss ha estado relacionado o utilizado como sinónimo de integral de probabilidad, integral de Euler-Poisson, entre otros.

Las investigaciones cuyas variables o categorías de estudio abarquen integración de contorno, la integral definida de Gauss y el teorema del residuo son escasas; cabe destacar que las publicaciones o trabajos de investigación que abordan las variables de investigación se centran en el teorema del residuo o la integración de contorno dejando a un lado la integral definida de Gauss.

Sin embargo, entre los primeros antecedentes relacionado con el tema de investigación se encuentra el trabajo realizado a comienzo de la década de los 40's del siglo pasado por Mr. J. H Cardwell citado en (Mirsky, 1949, p. 279). En esta investigación "*The Probability Integral*" se establece que la integral de probabilidad de Gauss puede ser evaluada por medio de la integración de contorno y el teorema del residuo de Cauchy. También, el autor concluye que el método de evaluación de esta integral depende de la aplicación de dos integraciones de contorno consecutivo:

- a) la primera integración ha de llevarse a cabo alrededor de un rectángulo
- b) la segunda integración ha de llevarse a cabo alrededor de un sector circular.

En el mismo sentido, a finales de la década de los 40's en la publicación "*Remarks on computing the Probability Integral in One Dimension and Two*" Pólya, George. (1949) determinó que la integral gaussiana con límites infinitos puede ser evaluada aplicando el teorema de Cauchy. En ese mismo orden, concluye que la evaluación de esta integral se debe realizar en el plano  $z$  de los números complejo por medio de un paralelogramo llamado  $P$  con vértices

$$R + iR, \quad -R - iR, \quad -R + 1 - iR, \quad R + 1 + iR;$$

Donde  $R$  es positivo y lo suficientemente grande, y su centro está situado en el punto  $z = 1/2$ ; de la misma manera establece que dos lados de  $P$  deben ser horizontales de largo 1, y los otros dos lados deben pasar por el punto  $z = 0$  y  $z = 1$ : el lado que pasa por el origen debe bisecar los ángulos entre los ejes de coordenada; finalmente se debe calcular la integral de  $\oint e^{\pi iz^2} \tan \pi z. dz$

en sentido anti horario alrededor del límite de  $P$ . Donde el integrando tiene un solo punto dentro de  $P$ , un polo simple en el punto  $z = 1/2$  y el residuo en ese polo es

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} * 1}{-\pi}. \text{ (Polya, 1949, p. 68).}$$

De la misma forma, ya para la época de los 90's (Remmert, 1991) concluyó en su obra "*Theory of Complex Functions*" que usar la función  $e^{-u^2}$  no conllevaría a ningún resultado debido a la inexistencia de un residuo distinto de cero. Por consiguiente, este sugiere considerar la función

$$\mathcal{G}(u) = \frac{e^{-u^2}}{1 + e^{-2pu}} \quad \in \mathfrak{m}(\mathbb{C}),$$

Donde  $p = (1 + i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot p^2 = i\pi$ ; Por consiguiente,  $p$  es un periodo de  $e^{-2pu}$ , resultando en

$$\mathcal{G}(u) - \mathcal{G}(u + p) = e^{-u^2}.$$

Sin lugar a dudas, los resultados de las investigaciones relacionada al tema de investigación han demostrado que puede ser una tarea engorrosa evaluar la integral definida de Gauss mediante integración de contorno y el teorema del residuo en el campo de los números complejo; no obstante, los métodos de evaluación de la integral definida de Gauss han sufrido varias transformaciones que han resultado, sin lugar a duda, ser más innovadora y eficaz para llevar a cabo su evaluación, como lo demuestra Remmert en su obra "*Theory of Complex Functions*".

Frente al análisis de los métodos expuestos, el método que plantea Remmert, (1991) es el que se ajusta a los parámetros de evaluación de la integral definida de Gauss que pretendemos llevar a cabo; por lo tanto, servirá de columna para sustentar y llevar a cabo nuestra investigación.

A nivel nacional no existe ninguna investigación que abarque las variables relacionada a la investigación que se pretende llevar a cabo "Evaluación de la Integral definida de Gauss Mediante Integración de Contorno y el Teorema del Residuo".

## 2.2. Marco Teórico

El análisis de la integral definida de Gauss ha buscado determinar desde distintas teorías la solución analítica de esta. Sin embargo, para entender cada uno de los elementos que conforman esas teorías; en primer lugar, será de gran importancia definir algunos de los conceptos pertinentes relacionados a las variables de este trabajo investigativo. Entre los cuales se encuentran integración de contorno, teorema del residuo, e integral definida de Gauss, así como las aplicaciones de esta.

### 2.2.1. Integración de Contorno.

Es una técnica súper poderosa, basada en análisis complejo, que nos permite calcular ciertas integrales reales que son difíciles o imposible de resolver. Las integrales de contorno tienen muchas aplicaciones importantes en muchas áreas de la física, particularmente en el estudio de ondas y oscilaciones.

Vista la importancia de esta técnica, resulta de particular interés dar a conocer varios conceptos de integración de Contorno desde las perspectivas de distintos autores:

#### 2.2.1.1. Definición

(Zill & Shanahan, 2003). *Propone la siguiente definición de integral de contorno: una integral sobre una curva  $\Psi$  de la función  $G(z)$  la cual es equivalente al límite cuando  $N$  tiende a infinito de la sumatoria de  $n = 1$  hasta  $N-1$  de la función  $G$  evaluada en  $z_n$  multiplicado delta de  $z_n$ .*

En el mismo sentido, Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2010). *Definen la integración de contorno como el proceso de calcular el valor de una integral de contorno alrededor de un contorno dado en el plano complejo.*

*Del mismo modo, Garling, D. J. (2013). Define una integral compleja  $G(z)$  como una función continua en todos los puntos de un arco simple  $D$  en el plano complejo  $z$  de longitud finita y que conecta dos puntos  $a$  y  $b$ . Donde se subdivide el arco en  $q$  partes con los puntos  $z_1, z_2, \dots, z_{q-1}$ , al tomar  $z_0 = a$  y  $z_q = b$ ; en cada una de las curvas que unen a  $z_{r-1}$  con  $z_r$  ( $r = 1, \dots, q$ ) se selecciona un punto  $z_r^*$ .*

*Entonces, se forma la suma*

$$\mathcal{W}_q = G(z_1^*)(z_1 - z_0) + G(z_2^*)(z_2 - z_1) + \dots + G(z_q^*)(z_q - z_{q-1})$$

Y se redacta  $z_r - z_{r-1} = \Delta z_r$ ,  $\mathcal{W}_q$  obteniendo como resultado

$$\mathcal{W}_q = \sum_{k=1}^n \mathcal{G}(z_r^*) \Delta z_r$$

Si hacemos que  $q$  crezca, de tal forma que la mayor de las longitudes de la curva  $\|\Delta z_r\|$  se acerque a cero, entonces la suma  $\mathcal{S}_q$  se acerca a un límite que no depende de la forma de subdivisión del arco.

Partiendo de los conceptos anteriores se hace necesario dilucidar los procesos a los que se recurren para llevar a cabo la evaluación de una integral definida usando integración de contorno:

Si  $\mathcal{G}$  es continua en una curva suave  $\Psi$  dada la parametrización  $z(\rho) = s(\rho) + it(\rho)$ ,  $a \leq \rho \leq b$  entonces definimos la integral de  $\mathcal{G}$  a lo largo de la curva  $\Psi$  como

$$\int_{\Psi} \mathcal{G}(z) dz = \int_a^b \mathcal{G}(z(\rho)) z'(\rho) d\rho \quad \mathfrak{M}$$

Por hipótesis, el integrando, siendo un producto de funciones continuas, es en sí mismo continuo y por lo tanto existe la integral.

Sea  $\Psi$  un contorno con  $\mathcal{L}$  curvas suaves  $\{\Psi_j\}$  para  $j = 1, 2, \dots, \mathcal{L}$ .

Si  $\mathcal{G}(z)$  es continua en  $\Psi$ , entonces la integral de contorno de  $\mathcal{G}$  a lo largo de  $\Psi$  se define como

$$\int_{\Psi} \mathcal{G}(z) dz = \sum_{j=1}^{\mathcal{L}} \int_{\Psi_j} \mathcal{G}(z) dz = \int_{\Psi_1} \mathcal{G}(z) dz + \int_{\Psi_2} \mathcal{G}(z) dz + \dots + \int_{\Psi_{\mathcal{L}}} \mathcal{G}(z) dz,$$

Donde cada una de la  $\int_{\Psi_j} \mathcal{G}(z) dz$  está definida por  $\mathfrak{M}$  respecto de cada parametrización.

Después de haber analizado las distintas concepciones podemos concluir que la integración de contorno es el proceso de calcular el valor de una integral de contorno alrededor de un contorno dado.

### 2.2.1.2. Métodos de Integración de Contorno

Como se pudo observar en el apartado anterior las integrales de contorno tienen diversos usos, entre lo que podemos citar el análisis de integrales reales cuyas soluciones analíticas se tornan engorrosa determinar.

En tal sentido, nos enfocaremos en destilar los métodos de integración de contorno que viabilizan el análisis de integrales reales. Sin embargo, dada las dimensiones de este trabajo nos limitaremos al análisis del método directo que compete a esta investigación.

Stalker, John (1998). En su obra “*Complex Analysis: Fundamental of the Classical Theory of Functions*” hace mención de los elementos que componen los métodos de integración de contorno entre las que se pueden destacar:

- a. La Integración directa de una función  $G(z)$  de valor complejo a lo largo de un arco en el plano complejo.
- b. La aplicación de la fórmula de Cauchy.
- c. La aplicación del teorema del residuo

Se puede observar que uno o varios métodos de integración de contorno se pueden aplicar para determinar el análisis de integrales reales.

### 2.2.1.3. Métodos directo de Integración de Contorno

Este método de integración consiste en evaluar la integral usando métodos con características similares a las que se aplican al cálculo de integrales de línea de funciones multivariantes.

Esto implica el uso de los siguientes pasos:

- a. Parametrización de un contorno  
Este método se lleva a cabo parametrizando el contorno de una función de variables reales valuada y diferenciable.  
Del mismo modo, se suele separar cada parte del contorno para ser parametrizado por separado.
- b. Sustitución del contorno parametrizado en el integrando  
Al hacer la sustitución de esta integral se obtiene una integral de variable real.
- c. Evaluación directa.

Consiste en aplicar los mismos parámetros de evaluación de una integral de variable real.

En conclusión, se observa que para llevar a cabo la evaluación de la integral de contorno se toma en cuenta tres pasos que son sencillos de ejecutar. Del mismo modo, cabe destacar que para la evaluación de una integral de contorno a lo largo de un contorno normalmente se aplica el siguiente teorema de integración que veremos a continuación:

### 2.2.2. Teorema del Residuo

En análisis complejos, la teoría de residuos es un potente conjunto de herramientas utilizadas para evaluar integrales de contorno. Los residuos se utilizan muy a menudo para la evaluación de integrales reales encontradas en la física y la ingeniería cuyas evaluaciones son difíciles y a veces imposible de realizar por técnicas elementales.

El teorema de los residuos se limita a evaluar ciertas integrales de funciones racionales, pero extender este teorema produce una gama más amplia de aplicaciones. El teorema de residuo que se reconoce en este trabajo simplemente servirá para mostrar cuán poderoso y ampliamente útil puede ser el Teorema de Residuos al evaluar integrales.

Los aportes de Ponnusamy, S., & Silverman, Remmert, R serán los pilares que darán sustento a este apartado, ya que la mismas ilustran de manera concisa las diferentes concepciones del término teorema del residuo.

#### 2.2.2.1. Definición

Ponnusamy, S., & Silverman, H. (2007). Plantean que si  $G(z)$  es analítica en la región  $A$  excepto en un conjunto de singularidades aisladas, debemos de suponer que  $P_{\perp}$  es un arco cerrado simple en  $A$  que no atraviesa ninguna de las singularidades de  $G$  y que está orientada en sentido contrario a la manecilla del reloj; en tal sentido entonces

$$\oint_{P_{\perp}} G(z) dz = 2\pi i \sum_{s=1}^p \text{Res } [G(z); z_s]$$

#### *Demostración:*

Supongamos que  $G(z)$  es una función compleja con distintas singularidades  $z_1, z_2, \dots, z_n$

$$\oint_{P_1} \mathcal{G}(z) dz = \oint_{P_1} \mathcal{G}(z) dz + \oint_{P_2} \mathcal{G}(z) dz + \oint_{P_3} \mathcal{G}(z) dz,$$

$$\oint_{P_1} \mathcal{G}(z) dz, \quad z_1$$

$$\oint_{P_2} \mathcal{G}(z) dz, \quad z_2$$

$$\oint_{P_3} \mathcal{G}(z) dz, \quad z_3$$

Procedemos a expandir  $\mathcal{G}(z)$  en serie de Laurent alrededor de la singularidad  $z_1$

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k_1} (z - z_1)^k + \sum_{j=1}^{\infty} b_{j_1} (z - z_1)^{-j} = a_{0_1} + a_{1_1} (z - z_1) + \dots + \frac{b_{1_1}}{(z - z_1)} + \frac{b_{2_1}}{(z - z_1)^2} + \dots$$

$$\oint_{P_1} \mathcal{G}(z) dz = \oint_{P_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k_1} (z - z_1)^k + \oint_{P_1} \frac{b_{1_1}}{(z - z_1)} dz + \oint_{P_1} \sum_{j=2}^{\infty} b_{j_1} (z - z_1)^{-j} dz$$

$$\oint_{P_1} \mathcal{G}(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{P_1} a_{k_1} (z - z_1)^k + \oint_{P_1} \frac{b_{1_1}}{(z - z_1)} dz + \sum_{j=2}^{\infty} \oint_{P_1} b_{j_1} (z - z_1)^{-j} dz$$

$$\oint_{P_1} \mathcal{G}(z) dz = \oint_{P_1} \frac{b_{1_1}}{(z - z_1)} dz + \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{P_1} b_{j_1} (z - z_1)^{-j} dz$$

Sea

$$\oint_{P_1} b_{j_1} (z - z_1)^{-j} dz, \quad \text{donde} \quad P_1: z = z_1 + \rho_1 e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

sí diferenciamos a  $z$ ,  $\Rightarrow \quad dz = i\rho_1 e^{i\theta} d\theta$

$$\int_0^{2\pi} b_{j_1} (\rho_{\perp} e^{i\theta})^{-j} (i\rho_{\perp} e^{i\theta}) d\theta$$

$$\frac{ib_{j_1}}{\rho_{\perp}^{j-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(j-1)\theta} d\theta = \frac{ib_{j_1}}{\rho_{\perp}^{j-1}} * \frac{-1}{i(j-1)} [e^{-i(j-1)\theta}]_0^{2\pi}$$

$$\frac{ib_{j_1}}{\rho_{\perp}^{j-1}} * \frac{-1}{i(j-1)} [1 - 1] = 0, \quad \forall j \neq 1$$

$$\oint_{P_{\perp}} \mathcal{G}(z) dz = \oint_{P_{\perp}} \frac{b_{11}}{(z - z_1)} dz$$

$$\oint_{P_{\perp}} \frac{b_{11}}{(z - z_1)} dz, \text{ por la formula de la integral de Cauchy } 2\pi i(b_{11})$$

El coeficiente  $b_{11}$  es el residuo puesto que es el único término restante cuando aplicamos integral de contorno a la serie de Laurent.

Después de haber demostrado el resultado de una singularidad dentro de un contorno cerrado  $P_{\perp}$ , podemos aplicar el mismo procedimiento para demostrar el resultado de las singularidades  $z_2, z_3$ ; por lo tanto, obtendremos:

$$\oint_{P_{\perp}} \mathcal{G}(z) dz = 2\pi i(b_{11} + b_{12} + b_{13}) \Rightarrow$$

$$\oint_{P_{\perp}} \mathcal{G}(z) dz = 2\pi i \sum_{s=1}^p \text{Re } s [\mathcal{G}(z); z_s]$$

Remmert, R. (1991). *Establece que si  $\varphi(z)$  es analítica dentro y sobre un contorno  $\Gamma$  y con un número limitado de singularidades aisladas en los puntos  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{\mathcal{L}}$  dentro de  $\Gamma$ . Entonces:*

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \text{Re } s [\varphi(z); z_r]$$

Asmar, N. H., & Grafakos, L. (2018). Definen el teorema del residuo como una herramienta utilizada para evaluar integrales de línea de funciones analítica sobre un contorno cerrado.

Podemos observar que el teorema del residuo establece que bajo algunas condiciones podemos evaluar las integrales complejas  $\oint_{\gamma} \omega(z) dz$  sumando los residuos en las singularidades aisladas de  $\gamma$  dentro del contorno cerrado  $\xi$ .

De igual forma, el teorema del residuo nos permite evaluar integrales sin la necesidad de físicamente integrar la función; es decir, nos permite evaluar una función con solo conocer el residuo contenido dentro de una curva.

Lars V. Ahlfors. (1966). *Define un residuo como una función  $G(z)$  que tiene un polo en el punto  $z = z_0$  cuyo coeficiente  $b_{-1}$  de la expresión  $\frac{1}{(z - z_0)}$  es la expansión de la serie de Laurent de  $G(z)$  alrededor de  $z = z_0$ . Es decir, cada función con una singularidad aislada tiene una serie Laurent que converge en un anulo alrededor de una singularidad.*

Tomando como referencia los párrafos anteriores, surge la siguiente interrogante:

¿Es posible obtener un residuo centrado dentro de un arco que se ajuste a los parámetros de esta investigación?

Brown, J., & Churchill, R. (2014). *Sugieren un residuo de Polo Simple para evaluar funciones similares a la que se pretende evaluar en este trabajo. Si  $G$  posee un polo de orden uno al cual llamaremos simple en  $z = z_0$ , entonces:*

$$\text{Res}[G(z); z_r] = \lim_{z \rightarrow z_r} (z - z_r) f(z).$$

Es bueno destacar, que existen varias formas de obtener un residuo, sin embargo, dada la dimensión de este trabajo, el cálculo del residuo en un polo simple se realizará mediante este método alternativo:

$$\text{Res}[G(z); z_r] = \frac{g(z)}{h'(z)}$$

### 2.2.2.2. Aplicación

En el apartado anterior pudimos observar que las integrales con valor real se pueden calcular a lo largo de un contorno, lo que implica que el cálculo de la integral de valor real y la integral de contorno se llevan a cabo al mismo tiempo

La aplicación de la fórmula del teorema del residuo a integrales reales consiste en obtener un valor alrededor de todo un contorno.

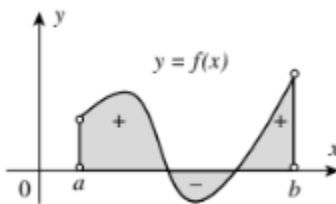
Es por este motivo que usaremos un rectángulo en el plano complejo con vértices  $-R, R, R + iM$  y  $-R + iM$ , donde  $R$  y  $M$  son números reales positivo suficientemente grandes para evaluar la integral definida de Gauss.

Dado que se ha abordado los fundamentos teóricos relacionados con integración de contorno y el teorema del residuo procederemos a mostrar el tipo de integral que se estará evaluando en este trabajo.

### 2.2.3. Integrales Definidas

Lial, Greenwell & Ritchey (2012) señalan que si  $\psi(x)$  es una función definida en el intervalo cerrado  $[\alpha, \beta]$ . Entonces, si el  $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \psi(x_i^*) \Delta x_i$  existe, decimos que  $\psi$  es integrable en el intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Donde  $\int_{\alpha}^{\beta} \psi(x) dx$  esta dada por

$$\psi(x) = F(x)$$



$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(x) dx = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \psi(x_i^*) \Delta x_i$$

### 2.2.3.1. Teorema Fundamental del cálculo.

#### Teorema Fundamental del Calculo

Sea  $\psi$  continua en el intervalo cerrado  $[s, t]$ , y sea  $\Psi$  cualquier antiderivada de  $\psi$  entonces

$$\int_s^t \psi(x) dx = \Psi(t) - \Psi(s) = \Psi(x) \Big|_s^t$$

Clark (2003) establece que si  $\varphi$  es continuo (por lo tanto, integrable) en  $[s, t]$  y sea  $\phi$  una antiderivada de  $\varphi$  (ejemplo,  $\phi'(x) = \varphi(x)$ ) entonces:  $\int_s^t \varphi(x) dx = \phi(t) - \phi(s)$

### 2.2.4. Integral de Gauss

Comenzaremos este apartado brindando una panorámica general a modo de conceptos sobre las integrales impropias, luego abordaremos de manera específica la integral con límites infinitos  $(\infty, -\infty)$  en el campo de los números complejos.

#### 2.2.4.1. Integrales Impropia

Las integrales impropias son integrales que no pueden resolverse de inmediato debido a los límites infinitos o la asíntota vertical en el intervalo.

Thomas B. (2014) define *las integrales impropias como integrales con límites infinitos de tipo:*

a) Si  $\Phi(x)$  es continua en el intervalo  $[\alpha, \infty)$ , entonces:

$$\int_{\alpha}^{\infty} \Phi(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x) dx$$

b) Si  $\Phi(x)$  no es discontinua en el intervalo  $(-\infty, \beta]$ , entonces:

$$\int_{-\infty}^{\beta} \Phi(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x) dx$$

c) Si  $\Phi(x)$  es continua en el intervalo abierto  $(\infty, -\infty)$ , entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \Phi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \Phi(x) dx$$

donde  $\varepsilon$  es cualquier número real.

De manera similar, Lial, M., Greenwell, R., & Ritchey, N., (2017). *Establecen que una integral de la siguiente forma*

$$\int_{\alpha}^{\infty} \psi(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\beta} \psi(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$$

Se le denomina *integral impropia*.

Visto desde nuestra perspectiva, una integral impropia es una integral definida que tiene uno o ambos límites infinitos o un integrando que se aproxima al infinito en uno o más puntos en el rango de integración. Las integrales impropias no se pueden calcular utilizando una integral de Riemann normal. Entonces, si la dimensión de su intervalo es infinita, no hay forma de determinar ese intervalo. La solución alternativa es convertir la integral impropia en una adecuada y luego integrarla convirtiendo la integral en un problema de límite.

#### 2.2.4.2. Definición e Importancia de la Integral Gaussiana

Descrito las características de las integrales impropia, se hace necesario abordar la importancia de la integral definida de Gauss en este apartado.

La integral de Gauss es la integral de la función Gaussiana  $e^{-x^2}$  sobre toda la línea real, también se le conoce como la integral de Euler-Poisson.

Stahl, Saul (2006). La integral Gaussiana tiene una amplia gama de aplicaciones, por ejemplo:

- i. Esta se usa para calcular la constante de normalización cuando se le hace un leve cambio de variables.
- ii. La función error y la distribución cumulativa se relación con la misma integral de limites finitos.
- iii. En mecánica cuántica se utiliza para determinar el espesor de probabilidad del estado fundamental del oscilador armónico.

Partiendo de la perspectiva de Cherry, G. W. (1985) se puede establecer que la inexistencia de una función elemental imposibilita el análisis de la función error; esta aseveración se ha demostrado con el algoritmo de Risch. No obstante, la integral Gaussiana puede ser resuelta analíticamente mediante la aplicación de un artificio matemático que consiste en aplicar coordenadas polares siempre y cuando se definan los límites de integración en límites infinitos.

### 2.2.4.3. Evaluación de Integral Definida en el Campo Complejo.

En el proceso de evaluación de la integral definida (Zill & Shanahan, 2003) *establecen que para determinar la solución analítica de una función  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$  en el campo de los números complejo, donde la función meromorfa de la forma*

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

*es continua en  $(-\infty, \infty)$ ; entonces, por el teorema de los residuos sustituimos  $x$  por la variable compleja  $z$  y se integra la función*

$$\psi(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

*En un contorno cerrado  $\Gamma$  que consiste en el intervalo  $(-R, R)$  en el eje real y en una semicircunferencia  $\Gamma_R$  de radio suficientemente grande para situar todos los polos de  $\psi$  en el semiplano superior  $\text{Im}(z) > 0$ , entonces obtenemos:*

$$\oint_{\Gamma} \psi(z) dz = \int_{-R}^R \psi(x) dx + \int_{\Gamma_1} \psi(z) dz = 2\pi i \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \text{Res} [\psi(z); z_r]$$

*En tal sentido, Lars V. Ahlfors. (1979). manifiesta que una integral con límites infinitos converge si y solo si el grado del denominador de la función racional  $\xi(x)$  es por lo menos dos unidades mayores que el grado del numerador, y como consecuencia ningún polo se encuentra situado sobre el eje de la recta real. Por consiguiente, el procedimiento standard consiste en integrar la función compleja  $\xi(z)$  sobre una curva cerrada que consiste de un segmento de recta  $(-\rho, \rho)$  y el semicírculo desde  $\rho$  hasta  $-\rho$  en la parte superior del plano. Si  $\rho$  es suficientemente grande el arco encierra todos los polos en la parte superior media del plano, y como consecuencia la integral correspondiente es igual a  $2\pi i$  multiplicado por la suma de los residuos en la parte*

superior media del plano. Cuando  $\rho \rightarrow \infty$  las estimaciones muestran que la integral sobre el semicírculo tiende a cero y por lo tanto obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) dx = 2\pi i \sum_{v>0} \text{Res}[\xi(z)]$$

De la misma manera, Watson, G. N. (2012). *Plantea que si las funciones  $\delta(x)$ , y  $\varphi(x)$  son polinomios en  $x$  tal que  $\varphi(x)$  no tiene factor real lineal y el grado de  $\delta(x)$  es menor que el grado de  $\varphi(x)$  con un margen de por lo menos dos, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{\varphi(x)} dx = 2\pi i \sum \text{Res} \left[ \frac{\delta(x)}{\varphi(x)} \right]$$

### 2.3. Marco Conceptual

Creswell, J. Martens, M. (2014). Citado por Moreno E. (2017). Aborda el marco conceptual como la estructura de diseñar el constructo conforme a los procedimientos establecidos por el protocolo de la universidad, centro de investigaciones o el propio investigador. El marco conceptual establece relaciones epistemológicas, metodológicas y ontológicas sobre determinada disciplina del conocimiento. Definir marco conceptual requiere la capacidad de identificación, descripción, distinción y evaluación a fin de establecer la categoría requerida en la investigación.

El marco conceptual “está compuesto de referencias a sucesos y situaciones pertinentes, a resultados de investigación; incluye, por lo tanto, un marco de antecedentes, definiciones, supuestos, etc.” (Ortiz, 2011.p.4)

Desde las perspectivas de Creswell, J. Martens, M. (2018) y Ortiz, (2011) procederemos a presentar un glosario con los conceptos que servirán de columnas para el sustento de esta investigación:

#### 2.3.1. Teorema Fundamental del Cálculo

Sea  $f$  continuo (por lo tanto, integrable) en  $[s, t]$  y sea  $F$  una antiderivada de  $f$  (ejemplo,  $F'(x) = f(x)$ ) entonces:  $\int_s^t f(x) dx = F(t) - F(s)$  (Clark, 2003).

#### 2.3.2. Integración

Es una forma de agregar segmentos rectangulares para encontrar el área bajo la curva de una función.

#### 2.3.3. Contorno

Es un arco que consiste de un número finito de arcos suave unido de extremo a extremo.

#### 2.3.4. Función meromorfa

Se dice que una función es meromorfa en un dominio  $\mathcal{G}$  si es completamente analítica en  $\mathcal{G}$  exceptuando los polos. (Brown & Churchill, 2014)

### 2.3.5. Función Analítica

A una función  $f(z)$  se le llama analítica en  $z = \vartheta$  si se puede representar por una serie de potencia:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - \vartheta)^n$  (Clark, 2003)

### 2.3.6. Números Complejo

Un número de la forma  $s + ti$ , donde  $s$  y  $t$  son números reales. (Clapham & Nicholson, 2009)

### 2.3.7. Residuo

Es un número complejo de la forma  $a + bi$  proporcional a la integral de contorno de una función meromorfa a lo largo de un camino que encierra una de sus singularidades. Lars V. Ahlfors. (1979)

### 2.3.8. Polo

Un número complejo  $z_0$  es un polo de una función  $f(z)$  si  $f(z)$  es analítica en  $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ , para algún  $\varepsilon > 0$  y que no sea analítica en el punto  $z_0$ , pero  $(z - z_0)^n f(z)$  es analítica en  $z_0$ , para algún  $n$  entero positivo. (Clark, 2003)

### 2.3.9. Polo Simple

Es un polo de orden uno de una función analítica. Bernstein, C. A., & Gay, R. (2012)

CAPITULO III  
DISEÑO METODOLÓGICO

## **Generalidades:**

Carpenter, C. M., & Suto, M. (2008). Señalan que sin marcos metodológicos el rigor y el valor de los procedimientos a seguir en la investigación cualitativa pueden debilitarse; por consiguiente, no lograrse los objetivos de manera válida y con exactitud.

El presente trabajo investigativo será diseñado bajo el planteamiento metodológico del enfoque cualitativo, puesto que las características y necesidades de nuestra investigación se adaptan a los parámetros de este enfoque.

### **3.1. Tipo de Investigación**

Partiendo de la perspectiva de Sampieri, Batista, & Fernández, (2014) podemos clasificar la investigación en dos grupos: descriptivas y exploratoria.

La investigación descriptiva proporciona una descripción precisa de las características de un individuo, situación o grupo en particular. Las investigaciones descriptivas son un medio para descubrir un nuevo significado, describir lo que existe, determinar la frecuencia con la que ocurre algo y clasificar la información.

En tal sentido, podemos establecer que la investigación que llevamos a cabo es de tipo descriptivo, puesto que la misma busca detallar mediante la demostración los procesos que emplearemos para evaluar la integral definida de Gauss mediante la utilización de integración de contorno y el teorema del residuo.

Sin embargo, podemos señalar que la investigación conserva ciertos aspectos de la investigación exploratoria dada los elementos novedosos que presenta la misma.

### 3.2. Diseño de la Investigación

El diseño de la investigación es el marco de los métodos y técnicas de investigación elegidos por un investigador. En tal sentido, Sampieri, Batista, & Fernández, (2014) enfatizan que el diseño permite a los investigadores perfeccionar los métodos de investigación que se adecuen al tema y permitan establecer sus estudios para el éxito.

Considerando que el tema de investigación es descriptiva dada la sustentación teórica, procederemos a dar a conocer de forma detallada los métodos que nos permitirán evaluar la integral definida Gaussiana.

Este estudio utilizará las metodologías de integración de contorno y del teorema del residuo.

La aplicación de la metodología del teorema del residuo nos permitirá determinar la solución analítica de la integral definida Gaussiana mediante

1. Una función meromorfa compleja
2. Un polo
3. Un residuo
4. Un contorno rectangular.

En ese mismo orden, la aplicación de la metodología de integración de contorno nos permitirá:

1. Parametrizar cada arco del rectángulo
2. Evaluar la integral de cada arco parametrizado.
3. Demostrar que la sumatoria de la integración de cada curva es equivalente a la raíz cuadrada de dos pi ( $\sqrt{2\pi}$ ).
4. Demostrar que la integración de la función meromorfa es equivalente a la integral definida gaussiana.

Específicamente el diseño de esta investigación consiste en seguir los pasos relativos a las demostraciones del teorema del residuo e integración de contorno descritos en el marco teórico presentado anteriormente.

Si todo lo anterior se materializa, concluiremos la evaluación de la integral Gaussiana confirmando que la solución analítica es igual a la *raíz cuadrada de dos pis* ( $\sqrt{2\pi}$ ).

CAPITULO IV  
EVALUACIÓN DE LA INTEGRAL  
DEFINIDA DE GAUSS

#### 4.1. Evaluación Mediante el Teorema del Residuo

Evaluar la integral Gaussiana  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Para evaluar la integral definida de la función  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  y determinar su solución analítica utilizando el teorema del residuo debemos plantear una función meromorfa  $\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{\omega(z)}$  equivalente a  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  que nos permita evaluar la integral dentro del contorno  $\Omega$ ; por consiguiente, planteamos la función  $\psi(z)$  y el contorno  $\Omega$

$$\psi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}}, \text{ donde } \xi = \sqrt{2\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} dt = \oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz$$

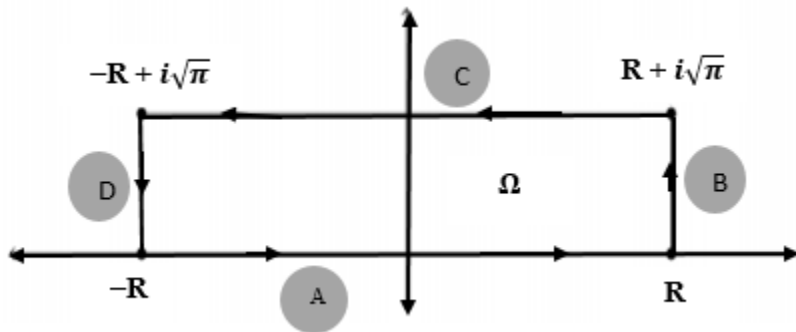


Figura 1, contorno Omega.

Dado que hemos determinado la función y el contorno, procederemos a determinar un polo, es decir, una singularidad en omega  $\Omega$  :

$$\oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz = 2\pi i \sum_{s=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_s|$$

$$1 + e^{-\xi z} = 0 \Rightarrow e^{-\xi z} = -1 \Rightarrow e^{-\xi z} = e^{i\pi}$$

$$\ln e^{-\xi z} = \ln e^{i\pi} \Rightarrow -\xi z = i\pi \quad z = \frac{i\pi}{-\xi} \quad z = \frac{i\pi}{-\sqrt{2\pi} e^{\frac{i\pi}{4}}}$$

Después, procedemos a la búsqueda de un residuo mediante la formula  $\text{Res} = \frac{\varphi(z)}{\omega'(z)}$  dado que la función es de orden uno, después; sustituiremos los valores de  $\xi$  y  $z$  en la función.

$$Res = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{-\xi e^{-\xi z}}$$

$$Res = \frac{e^{\frac{-\left(\frac{i\pi}{-\sqrt{2\pi}e^{\frac{i\pi}{4}}}\right)^2}{2}}}{-\left(\sqrt{2\pi}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)e^{-\left(\sqrt{2\pi}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(\frac{i\pi}{-\sqrt{2\pi}e^{\frac{i\pi}{4}}}\right)}} = \frac{e^{\frac{-\left(\frac{-\pi^2}{-2\pi e^{\frac{i\pi}{2}}}\right)}{2}}}{-\sqrt{2\pi}e^{\frac{i\pi}{4}}(e^{i\pi})} = \frac{e^{\frac{\pi e^{\frac{i\pi}{2}}}{4}}}{-\sqrt{2\pi}e^{\frac{5\pi i}{4}}} \Rightarrow$$

$$Res = \frac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{-\sqrt{2\pi}e^{\frac{5\pi i}{4}}} = \frac{1}{-\sqrt{2\pi}e^{\frac{3\pi i}{2}}} = \frac{1}{-\sqrt{2\pi}(-i)} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}$$

$$Res = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}$$

Ya que se ha determinado el residuo, procedemos a la aplicación del teorema del residuo para determinar la solución analítica.

$$\oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz = 2\pi i \sum_{s=1}^p Res|\psi(z), z_s|$$

$$\oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz = 2\pi i \left( \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

$$\oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz = \left( \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{2\pi} = \sqrt{2\pi}$$

$$\oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz = \sqrt{2\pi}$$

Podemos observar que la solución analítica de la integral de contorno es exactamente el resultado de la integral definida  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$  lo que nos demuestra que es posible evaluar la integral Gaussiana aplicando el teorema del residuo en la región  $\Omega$ .

Después de haber determinado la solución analítica nos enfocaremos en integrar y demostrar la equivalencia de ambas funciones mediante integración de contorno.

## 4.2. Demostración Mediante Integración de Contorno

Dado que hemos evaluado la integral gaussiana mediante el teorema del residuo utilizando una función; ahora nos corresponde establecer mediante la demostración la equivalencia de la integral de la función meromorfa que planteamos para poder aplicar el teorema del residuo y de la integral de la función Gaussiana; esta demostración la llevaremos a cabo mediante integración de contorno alrededor del contorno rectangular (cuyos lados serán parametrizados) que presentaremos a continuación:

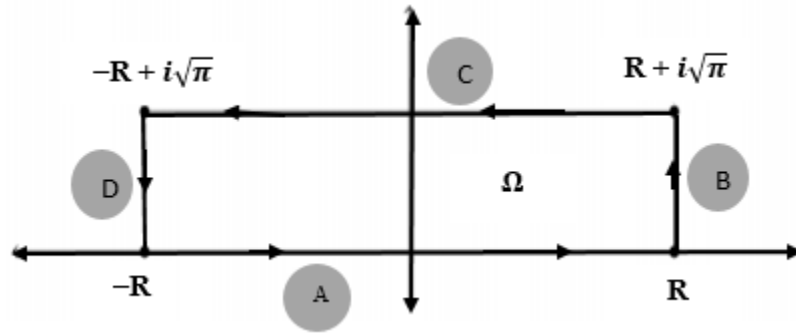


Figura 1, contorno Omega.

Mediante la aplicación de integración de contorno quedará demostrada y evaluada la integral Gaussiana.

Supongamos que  $\psi(z) \rightarrow 0$  uniformemente a lo largo de las curvas  $B$  y  $D$  en el dominio  $\Omega$  a medidas que  $R \rightarrow \infty$ , entonces; de converger la integral obtendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt + \int_{\infty}^{-\infty} \psi(t + i\sqrt{\pi}) dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

Donde la suma se lleva a cabo sobre los polos de  $\psi(z)$  con las partes imaginarias entre cero y  $\sqrt{\pi}$  lo que sería igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t + i\sqrt{\pi}) dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) - \psi(t + i\sqrt{\pi}) dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

Por lo tanto, se espera demostrar que la integral definida de la función  $\psi(z) - \psi(z + i\sqrt{\pi})$  es igual a la integral definida de la función  $e^{-\frac{t^2}{2}}$

### Demostración

ya sabemos que la solución analítica de  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} dt = \oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz = \sqrt{2\pi}$

ahora nos corresponde demostrar que  $\oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$

$$\oint_{\Omega} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} dt + \int_B \psi(z) dz + \int_C \psi(z) dz + \int_D \psi(z) dz = \sqrt{2\pi}$$

**Primero:** parametrizaremos la curva A a lo largo del eje t

$$\int_A \psi(z) dz \quad \text{sea } z(t) = t \quad dz = dt$$

$$\text{El límite de } \int_{-R}^R \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} dt \text{ cuando } R \Rightarrow \infty \text{ es igual a } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} dt \quad (1)$$

Así queda demostrada la equivalencia de ambas integrales.

**Segundo:** procedemos a la Integración de la curva C sobre la región (ver anexo I)

$$\int_C \psi(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(z(t))z'(t) dt$$

Parametrizando esta mediante la fórmula de un segmento de recta

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1 t, \quad 0 < t < 1$$

$$z(t) = (R + i\sqrt{\pi})(1 - t) + (-R + i\sqrt{\pi})t$$

$$z(t) = R - Rt + i\sqrt{\pi} - i\sqrt{\pi} - Rt + i\sqrt{\pi}t$$

$$z(t) = R - 2Rt + i\sqrt{\pi} \quad z(t) = R(1 - 2t) + i\sqrt{\pi} \Rightarrow dz = -2Rdt$$

Después, hacemos la sustitución de los datos obtenidos:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{1 + e^{-\xi z}} dz \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-\frac{(R-2Rt+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1 + e^{-\xi \frac{(R-2Rt+i\sqrt{\pi})}{2}}} - 2R dt$$

Luego, hacemos un cambio de variable que nos permita transformar los límites de integración en término de  $R$ :

$$\text{sea } u = R - 2Rt \Rightarrow du = -2Rdt$$

$$\text{Cuando } t = 0 \Rightarrow u = R$$

$$\text{Cuando } t = 1 \Rightarrow u = -R$$

$$\int_R^{-R} \frac{e^{-\frac{(u+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1 + e^{-\xi \frac{(u+i\sqrt{\pi})}{2}}} du \Rightarrow - \int_{-R}^R \frac{e^{-\frac{(u+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1 + e^{-\xi \frac{(u+i\sqrt{\pi})}{2}}} du$$

A medida que  $R \Rightarrow \infty$  obtendremos:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(u+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1 + e^{-\xi \frac{(u+i\sqrt{\pi})}{2}}} du \quad \text{si } u = t \quad \text{y} \quad du = dt \Rightarrow \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(t+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1 + e^{-\xi \frac{(t+i\sqrt{\pi})}{2}}} dt \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{sabiendo que } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t + i\sqrt{\pi}) dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

Podemos inferir que la suma de la integral de las curvas **1 y 2** quedaría expresada como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(t+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1 + e^{-\xi \frac{(t+i\sqrt{\pi})}{2}}} dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-\frac{(t+i\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1 + e^{-\xi \frac{(t+i\sqrt{\pi})}{2}}} dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

supongamos que  $i\sqrt{\pi} = \xi - \sqrt{\pi}$ ; entonces, la integral quedaria expresada como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-\frac{(t+\xi-\sqrt{\pi})^2}{2}}}{1 + e^{-\xi(t+\xi-\sqrt{\pi})}} dt = 2\pi i \sum_{s=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_s|$$

ahora supongamos que  $W = t - \sqrt{\pi} \Rightarrow dw = dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-\frac{(w+\xi)^2}{2}}}{1 + e^{-\xi(w+\xi)}} dw = 2\pi i \sum_{s=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_s|$$

si  $w = t$  la funcion  $\psi(t) - \psi(w + \xi) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-\frac{(w+\xi)^2}{2}}}{1 + e^{-\xi(w+\xi)}} \Rightarrow$

$$\psi(t) - \psi(t + \xi) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-\frac{(t+\xi)^2}{2}}}{1 + e^{-\xi(t+\xi)}}$$

$$\psi(t) - \psi(t + \xi) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-\frac{(t^2+2t\xi+\xi^2)}{2}}}{1 + e^{-\xi t - \xi^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) - \psi(t + \xi) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-\frac{(t^2+2t\xi+\xi^2)}{2}}}{1 + e^{-\xi t - \xi^2}} dt \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-t\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t - \xi^2}} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left( \frac{1}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-t\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{1 + e^{-\xi t - \xi^2}} \right) dt$$

Sabemos que  $\xi = \sqrt{2\pi} \frac{i\pi}{4}$  es equivalente a  $\xi^2 = 2\pi e^{\frac{i\pi}{2}} = 2\pi i$ ; entonces, podemos sustituir este valor en la funcion quedando este expresado como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left( \frac{1}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-t\xi} e^{-\frac{2\pi i}{2}}}{1 + e^{-\xi t - 2\pi i}} \right) dt = 2\pi i \sum_{s=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_s|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left( \frac{1}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-t\xi} e^{-\pi i}}{1 + e^{-\xi t - 2\pi i}} \right) dt = 2\pi i \sum_{s=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_s|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left( \frac{1}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-t\xi} e^{-\pi i}}{1 + e^{-\xi t - 2\pi i}} \right) dt = 2\pi i \sum_{s=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_s|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \left( \frac{1}{1 + e^{-\xi t}} - \frac{e^{-t\xi}(-1)}{1 + e^{-\xi t} e^{-2\pi i}} \right) dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \left( \frac{1 + e^{-t\xi}}{1 + e^{-\xi t}} \right) dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 2\pi i \sum_{S=1}^p \text{Res}|\psi(z), z_S|$$

Ahora procedemos a evaluar utilizando el residuo  $\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 2\pi i \left( \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \left( \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{2\pi} = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

A partir de este resultado queda demostrado mediante integración de contorno y el teorema del residuo la solución analítica de la integral definida Gauss. Del mismo modo, queda demostrado:

**Primero:** que la función  $\psi(z) - \psi(z + i\sqrt{\pi})$  es igual a la función  $e^{\frac{-t^2}{2}}$ .

**Segundo:** que la solución analítica de la integral con límites finitos de  $e^{\frac{-t^2}{2}}$  es igual a  $\sqrt{2\pi}$ .

Por lo tanto, queda demostrado que es posible llevar a cabo la evaluación de la integral Gaussiana mediante una función meromorfa aplicando integración de contorno y el teorema del residuo.

## CONCLUSIÓN

En esta tesis se determinó que es posible utilizar integración de contorno y el teorema del residuo para la evaluación de la integral definida Gaussiana. Esta aseveración estaría cimentada precisamente en la revisión minuciosa que se ha realizado sobre los antecedentes de la investigación relacionada a la evaluación de la integral impropia de la función Gaussiana, el análisis y las demostraciones de la solución analítica.

En cuanto al análisis de la integral definida de Gauss se determinó que es preciso establecer una función meromorfa, un polo, y un residuo para comprobar la solución analítica de la misma mediante el teorema del residuo. Es decir, de no llevarse a cabo las condiciones citadas en la oración anterior, no sería posible utilizar el teorema del residuo.

Con respecto a la integración de contorno, en esta tesis se demostró que es posible determinar la solución analítica de la integral definida gaussiana en un contorno rectangular mediante una función equivalente a

$$e^{\frac{-t^2}{2}}$$

En lo que se refiere al análisis de la integral de Gauss mediante integración de contorno, en este trabajo se determinó que es necesario llevar a cabo la integración de cuatro curvas que forman parte del rectángulo cuyas sumatorias equivalen a la raíz cuadrada de dos pi  $\sqrt{2\pi}$ .

El resultado obtenido utilizando integración de contorno y el teorema del residuo mediante una función es lo que se esperaba demostrar.

Este trabajo de investigación constituye un aporte teórico a la teoría de la integral de Gauss con límites finitos. De igual forma, podemos afirmar que no es necesario tener conocimientos profundos para determinar la solución analítica de la integral definida gaussiana utilizando integración de contorno y el teorema del residuo.

## RECOMENDACIONES

Se invita al lector de este trabajo de investigación dar continuidad al estudio de la integral definida de Gauss mediante las funciones meromorfas con características similares a la función planteada en esta investigación para que se determinen nuevos caminos que conduzcan a nuevas formas del conocimiento.

De igual manera, se invita al lector a:

- Examinar la efectividad de los métodos que se utilizan para evaluar la integral definida de Gauss.
- Explorar nuevas alternativas que ayuden a mejorar y definir el ámbito de conocimiento relacionado a la integral impropia de la función Gaussiana.
- Llevar a cabo más evaluaciones de la integral Gaussiana mediante otros contornos que contribuyan al análisis de esta integral de manera más sencilla.

Se espera que los elementos que contribuyen al análisis de esta integral no queden plasmados en este trabajo, sino más bien esperamos que su aplicación se lleve a cabo en las aulas y en todos los ámbitos que esta integral se manifieste.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Ash, R. B., & Novinger, W. P. (2007). *Complex Analysis*.
2. Asmar, N. H., & Grafakos, L. (2018). *Complex Analysis with Applications*. Springer International Publishing.
3. Bak, J., Newman, D. J., & Newman, D. J. (2010). *Complex analysis*. New York: Springer.
4. Bartle, R. G. (2001). *A modern theory of integration* (Vol. 32). American Mathematical Soc.
5. Berenstein, C. A., & Gay, R. (2012). *Complex variables: an introduction* (Vol. 125). Springer Science & Business Media.
6. Brown, J., & Churchill, R. (2014). *Complex Analysis and Application*. McGraw-Hill Publisher.
7. Creswell, J. Martens, M. (2014). *Research Design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches Fifth Edition*. California: SAGE Publications. Obtenido de <http://tesis-investigacion-cientifica.blogspot.com/>
8. Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. 1. John Wiley & Sons.
9. Fischer, W., & Lieb, I. (2012). *A course in complex analysis*. Vieweg+ Teubner Verlag, Berlin.
10. Garling, D. J. (2013). *A course in mathematical analysis* (Vol. 3). Cambridge University Press.
11. Gipson, G. S. (1986). *Use of the residue theorem in locating points within an arbitrary multiply-connected region*. Advances in Engineering Software.
12. Karlin, S. (1956). *Decision theory for Pólya type distributions. Case of two actions, I*. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics. The Regents of the University of California.
13. Khenkin, G. M. (1994). *Several Complex Variables II: Function Theory in Classical Domains: Complex Potential Theory* (Vol. 2). A. G. Vitushkin (Ed.). New York: Springer.
14. Lang, S. (1999). *Complex analysis* (Vol. 103). Springer Science & Business Media.
15. Lars V. Ahlfors. (1979). *Complex analysis an introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Book Company.

16. Mirsky, L. (1949). 2072. *The Probability Integral*. The Mathematical Gazette, 33(306), 279-279. doi:10.2307/3611303
17. Narasimhan, R., & Nievergelt, Y. (2012). *Complex analysis in one variable*. Springer Science & Business Media.
18. Nevanlinna, R., Behnke, H., Grauert, H., Ahlfors, L. V., Spencer, D. C., Bers, L., ... & Jenkins, J. A. (1970). *Analytic functions* (Vol. 11). Berlin: Springer.
19. Ponnusamy, S., & Silverman, H. (2007). *Complex variables with applications*. Springer Science & Business Media.
20. R. G. Bartle: A (2001). *Modern Theory of Integration*. Graduate Studies in Math. Vol. 32, AMS, Providence.
21. Rasulov, M. L. (1967). *Methods of contour integration*. Elsevier. North-Holland Pub. Co
22. Remmert, R. (1991). *Theory of complex functions* (Vol. 122). Springer Science & Business Media.
23. Spiegel, M., Lipschutz, S., Schiller, J., & Spellman, D. (2009). *Schaum's Outline of Complex Variables*. McGraw-Hill Publisher.
24. Stalker, John (1998). *Complex Analysis: Fundamentals of the Classical Theory of Functions*. Springer
25. Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2010). *Complex analysis* (Vol. 2). Princeton University Press.
26. Thomas, G., (2014), *Thomas' Calculus 14<sup>th</sup> edition*. Pearson Education
27. Wang, Y. (Ed.). (2006). *Complex Analysis and Applications: Proceedings of the 13th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, Shantou University, China, 8-12 August 2005. World Scientific.
28. Watson, G. N. (2012). *Complex integration and Cauchy's theorem*. Courier Corporation.
29. Zill, D. G., & Shanahan, P. D. (2013). *Complex analysis*. Jones & Bartlett Publishers.
30. Sampieri, Batista, & Fernández, (2014). *Metodología de la investigación 6ta edición*. McGraw-Hill Publisher.
31. Carpenter, C. M., & Suto, M. (2008). *Qualitative Research for Occupational and Physical Therapists: a practical guide*. Oxford: Wiley Publisher.

## ANEXO I

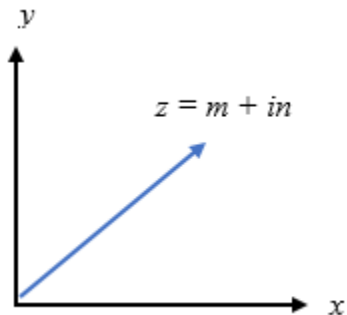
- **Números Complejos**

A todos tipos de números de la forma  $z = m + in$ , donde  $m$  y  $n$  son número reales e  $i$  es la unidad imaginaria se le denomina números complejos

- **Función Compleja**

A los subconjuntos denominado dominio y rango del conjunto  $\Phi$  de números complejos  $z = m + in$  de una función  $\Psi$  se le llama función compleja.

- **Plano Complejo  $z$**



- **Fórmula de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

- **Evaluación de una integral de Contorno**

Si  $\Psi$  es continua sobre una curva suave  $\Gamma$  dada por la parametrización de  $\Psi(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $\alpha < t < \beta$ , entonces

$$\int_{\Gamma} \psi(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(z(t))z'(t) dt$$

- **Contorno**



- **Segmento de Recta**

Una parametrización del segmento de recta de

$$\rho(\tau) = \rho_0(1 - \tau) + \rho_1\tau, \quad 0 < \tau < 1$$