UNAPEC
UNIVERSIDAD APEC

VICERRECTORÍA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA SUPERIOR

ESTRATEGIA PARA LA IDENTIFICACIÓN Y LA APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARA LA RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Sustentante

Edickson Antonio Gutiérrez Almanzar

20130785

Asesor

MSc. Francesco Semerari

Santo Domingo, R.D.

Diciembre del 2014

No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje, y no la posesión, sino el acto de llegar allí, que concede el mayor disfrute.

Carl Friedrich Gauss

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, solo se le revelan aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.

Carl Friedrich Gauss

DEDICATORIA

A mis padres

Luis Mercedes Gutiérrez y Juana Almanzar quienes siempre me han apoyado en todos mis planes de estudios.

A mi hijo

Erickson Alexander Gutiérrez quien es mi mayor inspiración y por quien he luchado día tras día.

A mi novia

Elianny Pimentel Durán quién llegó a mi vida para ser mi complemento perfecto y así llenar ese vacío que había en mí.

A mi querido y estimado

Dr. Jesús M. Lantigua quien siempre me ha brindado su apoyo incondicional y además por ser ese padre preocupado en que su hijo triunfe con éxito en la vida.

AGRADECIMIENTOS

A Dios

Padre eterno y creador de todas las cosas, por haber permitido que viniera a este mundo para lograr un propósito en mi vida.

A mis padres

Por ser los responsables de haberme procreado y estar ahí siempre presente.

A mi amigo

Al Dr. Jesús M. Lantigua por ser más que un amigo ha sido un padre siempre pendiente en mis estudios.

A mis compañeros

Elianny Ortiz, Isaura Abreu, Cristina Beltré, Crisberneicker Pérez, Lucy Ramírez, Griselda Jiménez, Michelle Gómez, Sebastián Rodríguez, Yasiri Alcántara, Dominica Reyes, Sin ustedes y sin su apoyo en verdad no había podido terminar esta maestría y a quienes formaron parte de aquel grupo que se convirtió en una familia.

A mis amigos

Celenia solano y los compañeros de APEC y mis amigos de San Cristóbal gracias por su ayuda incondicional y ser parte de esta bella historia de mi vida.

A mi asesor

Dr. Francesco Semerari a usted por ese apoyo y dedicación para que este proyecto pasara de ser un sueño a una realidad. Gracias por su entrega incondicional y deseo que Dios lo bendiga por siempre.

RESUMEN

En la presente investigación se determinan las soluciones analíticas de circuitos eléctricos tales como son los del tipo RL, RC y RLC específicamente, tanto en su forma simple como también en corriente continua, mediante la aplicación de ecuaciones diferenciales y se presentan de forma gráfica los diferentes tipos circuito eléctricos según sean los elementos que los caracterizan para una mejor comprensión de los mismos. Se debe señalar la importancia de las leyes tantos de Kirchhoff como la ohm las cuales facilitan el planteamiento de las ecuaciones diferenciales para así poder luego identificar el tipo de ecuación que se debe utilizar. El método de las ecuaciones diferenciales, se resalta entre los diversos tratamientos matemáticos los cuales son utilizados para resolver circuitos eléctricos, tanto por su elegancia demostrativa, así como también por su capacidad de brindar una respuesta general, o sea, desde el momento de energizar el circuito eléctrico hasta la interrupción del mismo. Resolviendo completamente todo el fenómeno que sucede en un circuito eléctrico. Con este trabajo se pretende un mejor entendimiento de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales y una eficaz identificación del tipo de ecuación necesaria para la solución del problema planteado.

INDICE

CAPITULO II. CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y ELEMENTOS................49

CAPITULO III. IDENTIFICACIÓN Y APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES A CIRCUITOS ELÉCTRICOS.........56

Introducción

Planteamiento del problema

El propósito científico que está a la base de esta investigación es:

Identificar los tipos de ecuaciones diferenciales que se usan en la resolución de circuitos eléctricos

La presente investigación tiene como **objeto** de estudio las ecuaciones diferenciales en general, identificando y aplicando aquellas en el **campo de acción** de la resolución de circuitos eléctricos.

Específicamente la hipótesis de la investigación consiste en que con la estrategia propuesta en la presente investigación se obtiene una visión general de los tipo de ecuaciones utilizadas en la resolución de circuitos eléctricos, que contribuye a identificar y aplicar las ecuaciones diferenciales que se utilizan en la resolución de los circuitos eléctricos.

Objetivo general

Proponer estrategias para la identificación y la aplicación de las ecuaciones diferenciales para la resolución de circuitos eléctricos.

Objetivos específicos

1) Identificar los tipos de ecuaciones diferenciales que se usan en la resolución de circuitos eléctricos.

2) Establecer los circuitos eléctricos que se resuelven mediantes ecuaciones diferenciales.

3) Aplicar las ecuaciones diferenciales en la resolución de circuitos eléctricos.

Justificación de la Investigación.

Esta propuesta busca analizar las diversas estrategias con que varios autores utilizan los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales en la resolución de circuitos eléctricos.

Las ecuaciones diferenciales son una herramienta muy importante en diversas áreas profesionales como es el caso de muchas de las ingenierías. En esta investigación se tratara de analizar las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en el campo de la ingeniería eléctrica y electrónica. Siendo el foco principal el caso de los circuitos eléctricos, buscando así verificar la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la resolución de los circuitos eléctricos y comprobar la rigurosidad con la que se resuelven. Con la presente propuesta se tratara de identificar si los circuitos eléctricos son resueltos con las debidas ecuaciones diferenciales que se necesitan para dar el mejor de los resultados.

Este método analítico es muy importante para dar una respuesta total al resolver los diferentes tipos de circuitos eléctricos. Las ecuaciones diferenciales se destacan entre otros métodos matemáticos que utilizan para resolver circuitos eléctricos, tanto por su elegancia demostrativa, así como también por su capacidad de ofrecer una solución general a la hora de resolver un circuito eléctrico, es decir, que se toma en cuenta desde el momento que es energizado el circuito hasta que este es desconectado. Resolviendo completamente todo el fenómeno que sucede en un circuito.

Este trabajo fue tratado por Marco Antonio Romay Óssio, publicado en una revista tecnológica, en el cual aplicando algunos tipos de ecuaciones diferenciales trata la resolución de circuitos eléctricos en corrientes alternas. (Romay Óssio, M.A., 2006)

Cabe señalar que hay varios libros que tratan la resolución de circuitos eléctricos aplicando las ecuaciones diferenciales, (willian h. Hayt.Jr y Kemerly J. E., 1993).

Marco teórico

Las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en la resolución de los circuitos eléctricos ya han sido tratadas anteriormente por otros autores los cuales han tenido un enfoque según la necesidad y criterio de cada uno de ellos. Se puede citar el caso de la (revista tecnológica del 2006) aplicando las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en la resolución de circuitos eléctricos en corrientes alterna RL y RC con excitación y sin excitación, en el cual observan el comportamiento de la corriente eléctrica y la del voltaje ya sea en la resistencia, el capacitor y el bobina, en el instante que el circuito es conectado y luego desconectado de una fuente de voltaje. También es el caso de libros de texto de circuitos eléctricos, en estos se amplía mucho más el uso de las ecuaciones diferenciales, tratando todos los elementos del circuito eléctrico y cómo se comporta cada uno de estos ya sea, conectados o desconectados a una fuente de voltaje.

Marco conceptual

Para una buena comprensión del tema a ser desarrollado en este trabajo, el estudiante debe de tener el dominio de algunos conceptos ya aprendido y bien sabido previamente.

Se puede señalar que hay que saber logaritmos y sus propiedades, análisis matemático (derivar e integral), ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, elementos de un circuito eléctrico, resistencia, capacitor, bobina y la combinación de estos (circuitos RL, RC, RLC) y las variables a ser calculadas con la aplicación de las ecuaciones diferenciales como son: corriente, voltaje y potencia.

Aspectos metodológicos

Esta propuesta a ser desarrollada será de carácter metodológico deductivo, análisis y síntesis, ya que tratara de profundizar en la aplicación de las ecuaciones diferenciales no desde el punto de vista de la ingeniería únicamente, sino desde el punto de vista matemático.

CAPITULO I. MARCO HISTÒRICO – CULTURAL Y CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

En este primer capítulo se analizaran las ecuaciones diferenciales, haciendo un análisis cronológico de su historia, observando asÍ los personajes que tuvieron una gran influencia en el desarrollo de la misma. Además se trataran los conceptos elementales que intervienen en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales como también algunos conceptos de logaritmos, derivadas e integrales que se necesitan para poder trabajar con las ecuaciones diferenciales.

1.1 Descripción histórica de las ecuaciones diferenciales

Los primeros pasos para tratar de resolver problemas físicos de la naturaleza mediante el uso del cálculo diferencial datan de finales del siglo XVII, llegando a crear gradualmente una nueva e importante rama de las matemáticas, a saber, las ecuaciones diferenciales. Desde un punto de vista y según la naturaleza de los logaritmos desarrollados por John Napier (1550 – 1617) se podría considerar la primera idea sobre ecuaciones diferencial hacia finales del siglo XVI y principios del siglo XVII. Vistas las tablas numéricas de los logaritmos confeccionadas por el mismo, si se usa el simbolismo moderno del cálculo infinitesimal, y se hace una comparación con los resultados una ecuación diferencial. Esta se podría considerar como la resolución numérica de una ecuación diferencial.

Nápoles, J. Explica que se ha repetido muchas veces, el libro de la Naturaleza, que según Galileo Galilei (1564 – 1642) está escrito en lenguaje matemático y para poder explicar un fenómeno es muy necesario saber leer sus caracteres tales como: puntos, líneas,... Esto quiere decir que, más que asignar el movimiento de los objetos "graves" los que se dirigen hacia el centro de la Tierra una causa, lo más apropiado es descubrir la regla que lo regula. Por ello, Galileo, al enunciar su propia solución al problema de la caída libre, éste lo hace con una aceleración constante. Galileo estudio el comportamiento del movimiento del proyectil en dos dimensiones; una componente horizontal y uniforme, y una componente verticalmente, pero acelerada, demostrando así que la trayectoria del proyectil, y despreciando la resistencia del aire (asumiendo que el proyectil está en el vacío), La trayectoria del proyectil es parabólica. Estudio el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y se puede considerar que utilizo para su resolución ecuaciones diferenciales. (Nápoles, J. 1999)

Pero con Newton, el problema se resuelve al suponer la existencia de una relación lineal entre la aceleración en cada punto de la trayectoria y una fuerza que en cada punto actúa sobre el cuerpo. Ya conocida la expresión de la fuerza actuante y las condiciones iniciales, se hace sencilla calcularse la trayectoria y, para sistemas que tengan sentido físico, esto significa que, dado un estado del sistema, los estados futuros quedan determinados de forma precisa: éste es el sentido del determinismo que Laplace creyó que la Mecánica de su tiempo había puesto al descubierto. La ciencia, se decía, enseñaba que el mundo funcionaba como un mecanismo de relojería. Laplace asegura que de Pierre Fermat (1601 – 1665) es el verdadero inventor del cálculo diferencial.

Haciendo una comparación entre el cálculo infinitesimal y las ecuaciones diferenciales, estas dos surgen de forma simultánea. En el año 1638 aparece el problema de la **tractiz**, establecido por Rene Descartes (1596 – 1650) quien se lo propone a Fermat, dicho problema planteado por Descartes realmente es un problema de tangente a una curva, (Fermat no pudo resolverlo pues no conocía el cálculo infinitesimal), y fue resuelto en 1674 por Leibniz y luego en el 1690 por Jakob Bernoulli, cuando ya se conocían los trabajos de Newton y Leibniz.

Bell, E. T asegura que las ecuaciones diferenciales comienzan simultáneamente con dos grandes matemáticos emblemáticos de la época Isaac newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. Dice Leibniz "Considerando la matemáticas desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor". Muy pronto los científicos se han de dar cuenta que las ecuaciones diferenciales son la expresión matemática de las leyes de la naturaleza. (Bell, E. T, 1985)

Existe el dato que demuestra que el *Calculus* apareció escrito, por primera vez, en unas notas de seis páginas escritas por Leibniz, en el *Acta Eruditorium* de 1684, dicho escrito contenía una definición de la diferencial y donde se explican reglas sencillas para su cálculo en sumas, productos, cocientes, potencias y raíces. Leibniz incluyó también algunas aplicaciones a problemas de tangentes y puntos críticos. Pero para mal suerte de Leibniz, este corto informe tenía varios errores, lo que contribuyó a que resultara enigmático a los matemáticos de la época. Newton basándose en el método de fluxiones fue publicada primero, de forma inapropiada, como lemas en su *Principia* de 1687. En el citado documento se encuentran algunas propiedades de límites y direcciones para encontrar "momentos" infinitesimales pequeños de productos, potencias y raíces.

En el año 1642 muere Galileo y nace Isaac Newton. Newton motivado por el estudio del movimiento del punto y de los sólidos rígidos, en el año 1665 expresa sus primeros descubrimientos tales como: funciones en series de potencias, y comienza a pensar sobre velocidad, o fluxión de magnitudes que cambian de forma continuas; áreas, longitudes, distancias entre otras. Asociando de manera conjunta los problemas de series infinitas y la velocidad de cambio.

En el 1711 Newton publica "De analysi per aequationes números terminourum infinitas", aquí se encuentra la primera exposición sistemática del cálculo, donde se plantea un método sistemático de diferenciación, (cabe resaltar que no se distingue mucho del publicado por Barrow en 1670). En 1724 publicó "Methodus fluxionum et serierum infinitorum", el cual ya estaba escrito en el1671, en que ya aparecen ecuaciones diferenciales. En 1676 escribió "De quadratura curvarum" donde eludía las cantidades infinitamente pequeñas sustituyéndolas por las llamadas razones primeras y últimas", no obstante siendo su primera obra impresa: "Philosophiae naturalis principia mathematica" fue en 1687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, donde se asegura completamente del papel de las ecuaciones diferenciales. Escribió, en la segunda ley de los principios, la ecuación de la caída de una piedra bajo los efectos de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite...... $mv' = mg - kv$ donde m, g, y k son las constantes; números reales mayores que cero, con estos elementos se obtiene una ecuación diferencial en la cual se desea determinar $v = v(t)$. El inconveniente que presenta esta ecuación diferencial es el no poder determinar apropiadamente el estado sino que solo se consigue la evolución del sistema. Para conocer el estado se debe imponer una condición inicial.

Los acontecimientos culturales fueron colosales. La naturaleza es regida por las leyes generales. Esto es la base conceptual de la filosófica de Kant, al observar que la naturaleza obedece a ciertas leyes y la determinación de la ciencia esto ha llevamos a conocer el pasado y el futuro. Dicho concepto de que las leyes físicas son ecuaciones diferenciales es el único concepto de Newton.

Newton es quien propone la primera clasificación de las ecuaciones de primer orden (en lenguaje de la época ecuaciones fluxiales) fue propuesta por Newton. En el primer caso estaba compuesto por las ecuaciones en las cuales hay dos fluxiones x', y' y un fluente x o y están relacionados, como es el caso:

$$\frac{x'}{y'} = f(x) \quad \text{o} \quad \frac{x'}{y'} = f(y)$$

Escrito hoy día de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ o } \frac{dy}{dx} = f(y)$$

El segundo caso abarcaba las ecuaciones que involucran dos fluxiones y dos fluentes

$$\frac{x'}{y'} = f(x,y) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Finalmente, el tercer caso el cual trata de ecuaciones donde aparecen más de dos fluxiones, las cuales hoy día conllevan a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En la Teoría de Fluxiones, Newton logra resolver dos problemas principales, los cuales se presentan en el ámbito de la mecánica y de las matemáticas:

1. Determina la velocidad del movimiento en un intervalo de tiempo conocido. Dicho de otra manera: determina la relación entre las fluxiones, dada la relación entre los fluentes.
2. Conocida la velocidad del movimiento, determina el espacio recorrido en un intervalo de tiempo conocido. En términos matemáticos: determina la relación entre los fluentes, dada la relación entre fluxiones.

Se debe precisar que el descubrimiento de Newton se adelantó al de Leibniz en unos diez años, aunque Leibniz hizo sus descubrimientos de forma paralela a los de Newton, pero a Leibniz tiene la prioridad de su publicación, ya que este había publicado en la revista "Acta Eruditorum" una exposición del cálculo en 1684.

Gottfried Wilhelm Leibniz nace cuatros años después de Newton en el año 1646. Éste se dedicó a leer detenidamente la obra de Pascal sobre la cicloide, alrededor del 1673 determina que la tangente a una curva obedece a la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Hay que tener en cuenta que se necesitaba establecer un lenguaje y una notación simbólica adecuada para poder trabajar con este nuevo descubrimiento, y afortunadamente el seleccionado allano el razonamiento lógico. Empleo la notación que conocemos hoy día como dx, y el signo de integral, fue el quien empleo por primera vez el término "ecuación diferencial" y el término "derivar" en el sentido de "deducir" esto se encuentra (en una carta de Leibniz a Newton).

Dice Ince. "todos nuestros vagos conocimientos sobre el nacimiento y el desarrollo de la ciencia de las ecuaciones diferenciales se resume en una fecha importante, el 11 de noviembre de 1675, cuando por primera vez Leibniz aserto en un papel la ecuación". $\int y dy = \frac{1}{2} y^2$. (Ince, E. L. 1927).

El problema esencial resuelto por el cálculo de Newton y Leibniz consistió en determinar la dependencia entre dos variables. Si una variable **y** depende de otra **x**, y se conoce la tasa de variación de **y** respecto de **x**, debido a cambios muy pequeños de la variable x, esto fue denotado por Leibniz como: dy = f(x) dx, entonces la determinación de **y** respecto de **x** se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. La maravillosa determinación de establecer de forma general las operaciones de derivación e integración como inversas entre sí, resulta ser el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Al rededor siglo XVII ya se habían resuelto muchos problemas particulares que no se habían podido resolver con la matemática de aquellos tiempos como por ejemplo: la tractriz, la braquistócrona, la catenaria y algunos problemas isoperimétricos, pero el interés del trabajo de estos dos grandes matemáticos reside en llegar a generalizar este nuevo proceso matemático. Por su lado Leibniz descubre cómo resolver las ecuaciones homogéneas de primer orden y de ecuaciones lineales de primer orden mediante el método de separación de variables. En 1696 utiliza el cambio $y = z^{1-n}$. Leibniz manteniendo su interés por las ecuaciones diferenciales se mantiene en constante comunicación con otros matemáticos, en especial con los hermanos Bernoulli.

Es en este periodo en donde se centra toda la atención en la búsqueda de desarrollar métodos particulares y concretos en la resolución de ecuaciones diferenciales. Los Bernoulli como Jakob, Johann y Daniel el hijo de Johann tuvieron una gran y notable incidencia en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales. Cabe resaltar que la familia Bernoulli tuvo tres grandes generaciones de ochos matemáticos, de los cuales ya tres han sido mencionado y de los más extraordinarios entre ellos.

En el año 1 690 es Jakob Bernoulli es quien resuelve el problema de la isócrona (movimiento que se realiza en un tiempo de igual duración; por ejemplo el movimiento de la aguja del reloj) y plantea el problema de la catenaria (dicho problema luego resuelto por el cálculo implementado por Leibniz y Newton). El problema de la braquistócrona, curva por la que el tiempo de caída es mínimo, propuesto en 1696 por Johann Bernoulli, que es posible considerar como el origen del cálculo de variaciones, provocó discusiones entre ellos, Daniel es quien asocia su nombre a la famosa ecuación de Bernoulli de la mecánica de fluidos.

En el año 1654 nace Jakob Bernoulli, en sus inicios estudia teología, pero más tarde su interés por las matemáticas lo lleva a estudiar a newton y Leibniz. Jakob se desempeñó como profesor de matemáticas en la escuela de Basilea. Su hermano Johann Bernoulli el más joven de todos sus hermanos se dedica a los estudios de medicina y se doctoró con el tema de la contracción de los músculos, luego más tarde siente al igual que su hermano Jakob la atracción de una manera fascinante por el cálculo. En 1695 se dedica a impartir clases de matemáticas y física en Groningen, Holanda, y al morir su hermano, pasa a ser profesor de la escuela en Basilea donde estuvo su hermano. Daniel Bernoulli nace en el año 1700. Al igual que su padre estudió medicina y se doctoró con un trabajo sobre los pulmones. Además como su padre se dedica a la enseñanza de las matemáticas en San Petersburgo. Obtuvo diez premios de la Academia Francesa.

A la familia Bernoulli se le acredita los principales fundamentos para la clasificación de las ecuaciones diferenciales. Sus primeros trabajos estuvieron inclinados a reducir ecuaciones de primer orden a ecuaciones de variables separadas. Leibniz haciendo una sustitución redujo la ecuación homogénea mediante la expresión $y = u \cdot x$, y la lineal de primer orden mediante $y = u \cdot v$, y los hermanos Bernoulli son quienes redujeron a lineal la ecuación diferencial que hoy lleva su nombre. Utilizando factores integrante Johann Bernoulli probó que la ecuación que hoy se denomina de Euler (pues Euler encontró la sustitución $x = e^t$) puede simplificarse de orden multiplicando por un factor x^k.

Es importante considerar las dificultades encontradas en la solución de ecuaciones diferenciales que en la actualidad se consideran elementales, así como el éxito en el desarrollo que alcanzaron. Para finales del siglo XVII se conocían muchos de los métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y se dirigió la atención hacia las ecuaciones diferenciales de orden superior y las ecuaciones en derivadas parciales. Como un reto con los ingleses Johann Bernoulli resolvió las trayectorias ortogonales a una familia dada, por ejemplo Johann Bernoulli en 1694, Al utilizar el método de separación de variables para integrar una ecuación diferencial, se dio cuenta de que en ocasiones, como ocurre en la ecuación diferencial, $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$ se oculta la naturaleza de las soluciones, y que si se multiplicar por un factor integrante adecuado, cuyo nombre es utilizado hoy día como, se puede obtener una solución algebraica.

De forma simplificada Guzmán, M, considera el siglo XVIII como el siglo de la **integración elemental** de las ecuaciones diferenciales. Estas se convirtieron en el instrumento básico de investigación en problema de investigación en problemas de mecánica, geometría diferencial y cálculo de variaciones y se relacionaron con la teoría de funciones de variables complejas y con las series trigonométricas. Aparecieron también algunos problemas físicos, como el problema de la cuerda vibrante, formulados en ecuaciones en derivadas parciales. (Guzmán, M, 1975).

Las ecuaciones diferenciales tuvieron un auge y gran número de aplicaciones durante la segunda mitad del siglo XVIII. Debido a su gran utilidad como herramienta fundamental en las áreas de las ciencias y el conocer científico y sus innumerables aplicaciones las ecuaciones diferenciales llegaron a ser una de las áreas del saber más importantes. Los matemáticos más destacados del siglo XVIII contribuyeron en gran manera al desarrollo de las ecuaciones diferenciales. Se pueden señalar de manera especial por su grandes aportes de sus trabajos en éste campo a Euler (1707 - 1 783), Clairaut (l 713 - 1765), D' Alembert (1717 - 1783), Daniel Bernoulli (l 700 - 1 782), LaGrange (1 736 -1 813) y Laplace (1 749 - 1 827). Estos grandes matemáticos estudiaron los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales mediante integrales por cuadratura el cual era el método conocido, elaborando los primeros procesos de aproximación e introducen los principales conceptos fundamentales tanto teórico como soluciones simples y generales de una ecuación diferencial. A partes de las ecuaciones diferenciales de primer orden también se estudian las ecuaciones de orden superior y se dan los principales pasos para las ecuaciones en derivadas parciales.

Uno de los matemáticos notables de la época Leonard Euler realiza importantes avances en la teoría de ecuaciones diferenciales, los cuales son utilizados en la resolución de problemas de mecánica celeste y balística. Lagrange afirma que el trabajo de Euler sobre mecánica era el más grandioso trabajo en el que se aplica en el análisis de la ciencia del movimiento. Pasando hace las ecuaciones diferenciales en una disciplina independiente, con sus dos grandes ramas, ecuaciones diferenciales ordinarias y derivadas parciales. Los resultados fueron recopilado en la obra magistral "Institutiones calculi integralis" en cuatro tomos, los tres primeros entre fueron entre 1768 y 1770 y el cuarto en 1794, este material ha sido empleado desde entonces como manual de carácter obligatorio para el estudio de matemáticas.

Los cambios de variables se deben a Euler, tales como aquellos que permiten reducir ecuaciones de orden superior en ecuaciones de primer orden, y fue el creador el concepto de factor integrante que nos permite integrar directamente algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. En 1735 trabajó mediante series las ecuaciones diferenciales, ya en 1739 aportó un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes determinando un nuevo tipo de solución, exponencial, en el 1743 proporcionó el método más general de la ecuación característica, y en el 1753 resuelve la ecuación no homogénea.

En el 1765 D' Alembert desarrolla la teoría general de coeficientes variables, y en el 1776 LaGrange desarrolla el método de variación de parámetros.

D' Alembert se dedica a estudiar la conocida "Ecuación de Euler" y algunos casos particulares la ecuación de Bessel, (trabajada por F. W. Bessel de manera más general entre (1784 -1846)), utilizando series de potencias, Por ejemplo, en busca de la solución de $u^{*}_{xx} + u = 0$, encontró la función: 2cos x. y la función: $e^{xi}+ e^{-xi}$, demostrando que ambas funciones coinciden, (de donde nacen las primeras ideas sobre todo de y de una manera muy clara cómo debe ser una función exponencial compleja).

Los matemáticos del siglo XVIII se interesaron en un problema en especial el cual fue encontrar el número de parámetros que determinan la solución de una ecuación diferencial. Teniendo en cuenta que una ecuación diferencial ordinaria de orden n escrita de manera explícita debe tener una solución que depende de n parámetros. Sin embargo resulto que se encontraron algunos ejemplos de ciertas ecuaciones diferenciales en forma implícita que asumían soluciones con un menor número de parámetros, aunque, admitían también otras soluciones llamadas soluciones singulares. Euler demostró que el número de parámetros necesarios **n** coincidía con el orden **n** de la ecuación diferencial lineal.

Algunas de las contribuciones de Euler que podemos citar están el uso de factores integrantes, los métodos sistemáticos para determinar las soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas, y además obtener soluciones particulares y generales e incluso también soluciones singulares, compartidas claro está con algunos matemáticos como es el caso de Daniel Bernoulli, (que por ejemplo resolvió $y'' + ky = f(x)$ y D' Alembert. Tanto Daniel Bernoulli como Euler se proponen estudiar las oscilaciones de una barra cuya ecuación diferencial de cuarto orden obedece a: $k^4 y^{IV} = y$, siendo esta la más alta hasta ese momento. Aportando esto al método de solución conocido como series de potencias, a las series trigonométricas, esto provoco la primera discusión sistemática del cálculo de variaciones. El cálculo numérico de resolución de ecuaciones diferenciales es debido a Euler. Se plantea en el método de las isoclinas $f(x, y) = cte$, y para ciertos valores de **y** conocidos se eligen rectas verticales con las que se calculan pendientes, implementando con esto el método de las poligonales de Euler como una más simplificada del método de las isoclinas.

Tan pronto se determinó la relación existente entre los procesos de diferenciación e integración. La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó tan pronto como se conoció la relación inversa existente entre. En aquellos tiempos surge el interés de resolver el problema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales el cual era un campo abierto a los pioneros matemáticos. El intereses D' Alembert era muy variado, ya que publicó tratados acerca de dinámica, música, el problema de los tres cuerpos, la procesión de los equinoccios, el movimiento en medios resistentes y las perturbaciones del movimiento lunar. La preocupación de D' Alembert por el estudio de una cuerda vibrante lo conduce a la ecuación en derivadas parciales: $u''_{tt} = u''_{xx}$ de la cual obtuvo en 1747 y público, en las Memoirs de la academia de Berlín, la solución $u = f(x + t) + g(x - t)$, donde f y g son según él funciones arbitrarias que pueden ser obtenidas a partir de las condiciones iniciales. Euler planteo en 1753 para ecuación más general la expresión $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, la solución $u = f(x + t) + g(x - t)$, siendo diferente a la interpretación de D' Alembert puesto que no concebía que la solución no fuese continua, incluso con segunda derivadas continuas, mientras que Euler mantenía que las funciones f y g eran totalmente arbitrarias, pudiendo ser discontinuas.

En La mayoría de los casos no era muy sencillo resolver las ecuaciones diferenciales por el método de cuadratura, por lo que se requería de sustituciones habilidosas o algoritmos especiales para poder determinar la solución deseada.

Se desarrollaron numerosas ecuaciones relacionadas entre si, las cuales se podían resolver relativamente por artificios sencillos como es el caso de la ecuación de Bernoulli ya mencionada anteriormente.

En 1715 es descubierto el fenómeno de las soluciones singulares por Taylor. Alexis Claude Clairaut (1713 - 1765), fue un matemático que a una edad prematura ya estudiaba los trabajos de L' Hópital, identificó la familia $y = x y' + f(y')$, que por otra parte de la solución general $y = cx + f(c)$ obtuvo una solución singular, siendo ésta una de las primeras de este tipo que se encontraron. Clairaut analizo que las derivadas parciales de segundo orden cruzadas de una función son iguales (hoy se conocen las condiciones suficientes para que esto ocurra), y aplico este hecho en el familiar criterio de reconocimiento de las ecuaciones diferenciales exactas. Escribió obras de matemáticas aplicadas que se hicieron muy famosas. D' Alembert determino la solución singular de la ecuación diferencial un poco más general expresada de la forma: $y = x f(y') + g(y')$ la cual lleva su nombre lleva su nombre. Euler se halla paradójico el hecho de que las soluciones singulares se obtengan de manera contraria, en vez de "integrando se consigan "derivando" ". Y LaGrange en 1776 demuestra que la envolvente de un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial, si es que esta realmente existe, es también una solución, y es sobre todo una solución singular.

La ecuación que D' Alembert denominó de Riccati es considerada la ecuaciones diferenciales ordinarias más interesantes del siglo XVIII y fue estudiada por varios matemáticos muy reconocidos como es el caso de los Bernoulli.

La imposibilidad de obtener soluciones muy claras para la ecuación de Riccati trajo muchos problemas, dicha ecuación la cual se debe su nombre a un matemático italiano Jacopo Riccati (1676 - 1754), quien consideraba las ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$, o la importante ecuación no lineal que lleva su nombre. Ya se habían encontrado ecuaciones cuya solución específicamente se puede obtener como series de potencias, tales como: $xy' = y^2$, pero los Bernoulli ya habían comenzado la integración numérica sustituyendo derivadas por incrementos finitos.

Para el 1724 Daniel Bernoulli se concentra en el estudio de valores de n para los que la ecuación de Riccati se llega a resolver con integrable por separación de variables. Euler fue el primero en darse cuenta que si se conoce una solución particular entonces, haciendo una correspondiente sustitución, se transforma en una ecuación diferencial lineal, y se puede hallar su solución general; o que si se conocen dos soluciones particulares entonces se puede conseguir la solución general por medio de una sencilla cuadratura. Liouville prueba en 1841 que existen ecuaciones diferenciales sencillas las cuales no pueden resolverse por integración elemental. Gracias a la teoría de Galois cierra por radicales esta idea.

LaGrange (1736 - 1813) en su artículo "Recherches sur la nature et la propagation du son" (1759) se pone de manifiesto que las soluciones de la ecuación diferencial deben ser continuas. Determinó que es muy práctico y sencillo trabajar ecuaciones de la forma F (x, y. y") = 0 y no siempre considerar a **x** como la variable independiente.

En "Nouvelles recherches sur la nature et propagation du son" (1761) cambia la ecuación de derivadas parciales por un par de ecuaciones diferenciales ordinarias. Implementa las técnicas llamadas de los multiplicadores de LaGrange. Además se debe a LaGrange la técnica que se conoce como de *variación de parámetros* o de constantes para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de orden n, o de un sistema, conociendo la solución general de la homogénea asociada. Trata de encontrar una relación funcional y = f(x) para que una integral $\int_a^b g(x, y, y')dx$ tome un valor máximo o mínimo.

Laplace de la misma época de Lagrange, estudio la conocida ecuación que lleva su nombre, y que aparece repetidamente en problemas de hidrodinámica, elástica y electromagnetismo, así como su famosa y muy conocida transformación que permite resolver muchas ecuaciones lineales. "Traité de mecanique céleste" trabajo de cinco volúmenes el cual obtuvo el título de Newton en Francia.

Las posturas de Lagrange y Laplace proveen de dos filosofías distintas de las matemáticas. Para Laplace la naturaleza era lo fundamental y las Matemáticas solo una simple herramienta, pero para Lagrange las Matemáticas eran un arte que justificaba por sí misma.

En Boyce se encuentra la siguiente afirmación de N. Bowditch "No puedo encontrar una afirmación de Laplace "Así, es evidente", sin tener la seguridad de que deberé emplear horas de trabajo intenso, para cubrir el abismo y averiguar y demostrar lo evidente que es" Mary Sommerville fue traductora y comentarista de esta obra, y con sus explicaciones profundas hizo posible que fuese comprendida. (Boyce, w. E, 1967).

Mediante el método de las ecuaciones características el matemático Monge se da a conocer, aplicando su método al estudió de las ecuaciones de primer y segundo orden. Mejor conocido por sus aportes a la geometría, también hizo aportaciones a las ecuaciones diferenciales que destacan por su visión geométrica. Introdujo transformaciones de contacto. Con las que es posible reducir ecuaciones a otras cuya solución sea conocida. Analizo ecuaciones de la forma:

$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z) + R(x, y, z)\, dz = 0$

Que según establece Euler dicha ecuación no tienen sentido cuando no existen un grupo de superficies que las satisfagan, pueden resolverse si se obtienen soluciones variedades de orden inferior, (como .curvas). mas tarde fueron generalizadas a más dimensiones por Pfatt. Tanto ellas como sus generalizaciones a sistemas, tienen aplicaciones en campos como: Termodinámica o Mecánica Clásica, por lo que más tarde fueron estudiadas por Grassmann, Frobenius, Lie, Darboux y Cartan. El formalismo de las ecuaciones diferenciales introducido por este último permite escribir de forma esplendida el teorema de Frobenius el cual establece cuando un sistema general de ecuaciones de Pfaff se puede resolver por factores integrantes.

Jacobi y Abel se enfocaron en funciones elípticas. Jacobi determina un método, que se denomina de Hamilton-Jacobi, que permite tomar un sistema de ecuaciones canónicas de Hamilton y por medio de una integral completa de una ecuación en derivadas parciales de primer orden. Estudió un método que extiende el de Charpit-LaGrange a dimensiones superiores a dos, que hace comprender que el método anterior es una técnica para reducir la dimensión de los problemas considerados si uno estaba preparado para encontrar cantidades conservadas en regresión para el sistema de características, y que específicamente esto reduce el problema a resolver ecuaciones donde aparecen jacobianos. Además se deben a Jacobi las condiciones que llevan su nombre y que debe satisfacer un problema de cálculo de variaciones para que un sistema tan grande sea mínimo.

La participación de Gauss en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias es inferior o poco notoria que en otras ramas de la Matemática, y a veces indirecta. Gauss se dedica al Estudio de las ecuaciones hipergeométricas, funciones elípticas, y también hizo algunos estudios en geometría diferencial o variable compleja que incidieron un poco e indirectamente en las ecuaciones diferenciales. Además estudió electromagnetismo y fluidos, por lo que es preciso mencionar su teorema de la divergencia.

A mediado del siglo XIX aparecen nuevas ideas creada en parte para dar solución a problemas de física y matemática, siendo los más precisos todos los relacionados con las series de Fourier, y también en parte originados por la transformación general que sufrió el análisis matemático durante este periodo que dio lugar al surgimiento de nuevos planteamiento dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales.

El más notable punto de partida es el famoso trabajo sobre la difusión del calor de J. B. Fourier (1 768 - 1 830) comenzado en 1807 y publicado en 1822, donde para obtener la solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Con diferentes condiciones de contorno. Fourier determina de forma ordenada el método de separación de variables, y tomando en consideración las ideas de D. Bernoulli llegó a la representación de una nueva solución en series trigonométricas, llegando a la conclusión de las que las funciones que se podían representar de esta forma era muy amplia. 'Prueba' la convergencia de sus series a las correspondientes funciones periódicas, utilizando razonamientos en la mayoría de los casos faltos de rigor, que en la actualidad, mediante la teoría de distribuciones se puede expresar correctamente.

Cuando todo parecía que todo estaba bien surge la crítica hacia Fourier por los entonces las tres grandes L (Lagrange, Laplace y Legendre), señalando a Fourier por sus lagunas y vaguedad de razonamiento, y por lo que quizás esta sea la causa para que comenzara **la época del rigor**. El trabajo de Fourier desempeñó un papel de propulsor de la nueva fundamentación del Análisis, pues removió cuestiones como las condiciones exactas de representabilidad de funciones mediante series trigonométricas. El primer resultado riguroso en esta línea fue obtenido por Dirichlet, en 1829, un año antes de la muerte de Fourier.

La edad del rigor con Cauchy comienza, desde 1820 a 1870. Hacia 1810 se consideraba clara la existencia de soluciones mediante series. Cauchy dice de forma clara y precisa que no todas las ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas, pues nada garantiza que la serie sea convergente, e incluso si converge, que sea hacia la función deseada. Cauchy determinó, entre 1820 y 1830 en sus cursos de la Escuela Politécnica de Paris, los conocidos métodos que permiten probar la existencia de las soluciones del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$: $y(x_o) = y_o$ que hoy se conoce como problema de Cauchy, adaptando el método del polígono de Euler sus objetivos. En un manuscrito encontrado recientemente expresa: "la resolución del problema de valor inicial daría la solución general". Se debe a Cauchy en 1824 la idea básica del método de las aproximaciones sucesivas, Peano en 1890 lo trabaja y lo mejora, luego es presentado por E. Picard (1856 -1 941) en forma más reciente y general en 1890, y en 1894 por Lindelóf. Considera Cauchy la ecuación integral equivalente: $y(x) = y(0) = \int_{x_0}^{x} f(z, y(z))dz$ y la analiza por el método que hoy se conoce como el de las poligonales de Euler, aunque entonces él lo desconocía.

Entre el 1839 a 1842 usó el método de la mayorante si $f(x, y)$ se considera analítica, lo que es bien aplicable en el campo complejo. En la reunión semanal de la Academia en el año de1842, aplicó el método de la mayorante a las ecuaciones en derivadas parciales, lo que hoy día se considera la base a lo que se denomina teorema de Cauchy-Kovaleskaya.

Extendió su teorema de existencia a ecuaciones diferenciales ordinarias, de orden superior, y también a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden en el campo complejo. Las técnicas son también aplicables a muchas otras ecuaciones en derivadas parciales por lo que se debe tener en cuenta a la matemática rusa Sofía Kovaleskaya (1850 - 1891) quien por sus resultados para la resolución de ecuaciones con datos en forma normal sobre una superficie no característica, y el teorema que lleva el nombre de Cauchy - Kovaleskaya que demostró en 1874, teorema fundamental en la que prueba la existencia de una única solución analítica de un sistema de ecuaciones en derivada parciales expresado en forma normal.

Kovaleskaya presentó un ejemplo, muy sorprendente en aquel entonces, de una ecuación la cual no cumple las hipótesis del teorema y no posee solución analítica alguna.

Los teoremas sobre la existencia tuvieron importancia tanto desde el punto de vista teórico como del práctico, ya que ambos permitieron justificar la aplicación de tos métodos de la teoría de ecuaciones diferenciales a la física. Por otro lado los métodos utilizados en las demostraciones de estos teoremas aportaron algoritmos para conseguir aproximaciones de la solución con el grado de exactitud requerida, así como también para medir el error de la aproximación, por lo que sirvieron de base para los procesos de integración numérica que fueron realizados durante el siglo XIX.

A Cauchy se debe la teoría sobre la propagación de ondas ópticas "Mémoire sur la théorie des ondes" que apareció en I815 precisamente cuando la teoría ondulatoria de la luz por obra de Young y de Fresnel tomaba su forma definitiva, y siendo esto uno de los fundamentos de la teoría matemática de la elasticidad. Los trabajos de Cauchy sobre funciones complejas son considerados importantes, ya que fue posible hacer la relación entre variable compleja y la teoría de ecuaciones diferenciales, que no se manifiesta únicamente en las aplicaciones como la inversión de la transformada de Laplace, sino también en los estudios llevados a cabo por Fuchs Kummer, Riemann, Painlevé, Klein, Poincaré, Hilbert, entre otros, sobre puntos singulares de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Aun en el año 1869 no se había podido resolver el problema de la **unicidad** de una ecuación diferencial. Para el año 1854 Briot y N. Bouquet ya habían simplificado la demostración de Cauchy y además analizaron el caso en que f(x, y) es singular en un punto del dominio de los complejos, comprobando que el radio de convergencia es el máximo posible hasta que se alcanza la singularidad. El que la solución se considera única se contradice con la idea propuesta por Laplace de que es posible un conocimiento completo y se utiliza en forma aleatoria en el contexto de las ecuaciones diferenciales. La existencia local de soluciones fue tratada por Peano e introdujo las inecuaciones diferenciales comprobando que el ínfimo de las supersoluciones y el supremo de las subsoluciones son soluciones. Picard, al final de un artículo extenso, dedico a las ecuaciones de segundo orden trabajó las aproximaciones sucesivas e impuso las condiciones de Lipschitz. La teoría de las sub y súper soluciones, y de las inecuaciones, resultaron no ser válida para sistemas. Se recurre por lo tanto a los métodos basados en la teoría de la integral; $y(x)=\int_{x_0}^{x} f(z,y(z))dz$. Vallé – Poussin relacionó en la ecuación diferencial la suma superior y la suma inferior. Este método admite alguna discontinuidad de la función f lo que es importante en control. Caratheodory en 1918 utilizo la integral de Lebesgue. El primero que abordo los criterios de unicidad fue Lipschitz, Jordan los simplifico y el método de Perrón el 1926 unifico y mejoro todos los métodos anteriormente señalados.

La formulación exacta del término de independencia lineal de un sistema de funciones, de mucho interés para la teoría de ecuaciones diferenciales, se origina a mediado del siglo XIX, en la que se consigue una condición para la independencia lineal en términos del determinante llamado wronskiano, que había propuesto H, Wronski (1775 - 1 853) en la primera mitad del siglo XIX.

Con la ecuación de Euler se observó que las soluciones son más irregulares que la misma ecuación dada. A L. Fuchs (1833 - 1902) se le debe el concepto de sistema fundamental de soluciones y además se debe una idea nueva en la teoría de ecuaciones diferenciales con coeficientes algebraicos, que en lo adelante se transformó en una teoría analítica de ecuaciones diferenciales, ocupándose de las propiedades generales de las soluciones de ecuaciones diferenciales, no del todo lineales, en el campo complejo.

Las ecuaciones que se denominan fuchsianas son aquellas cuyas singularidades son todas regulares, para este tipo de ecuación la rotación en torno al punto singular transforma una solución de un conjunto de soluciones linealmente independientes en una combinación lineal de las mismas. En el año 1865 Fuchs observó que en las ecuaciones no lineales las singularidades son móviles. En 1874 Frobenius desarrolló en serie y demostró la convergencia en los puntos singulares regulares. De este problema se encargaron además; Hilbert, Poincaré, desarrollando Painlevé entre 1900 y 1906 una teoría general.

Riemann determinó la solución general de la ecuación hiperbólica no lineal de segundo orden en dos variables, para la que observó que es posible reducirla siempre a una ecuación lineal de segundo orden, ésta técnica se emplea en el estudio de la dinámica de gases. Además Estudió soluciones discontinuas para estas ecuaciones.

Mediante el método de variables separadas se obtienen soluciones a los problemas de contorno, que aparecen en geometría diferencial, teoría de ecuaciones integrales y en física matemática (ecuaciones del calor y ondas), dando lugar a los problemas conocidos con los nombres de J. Sturm (1803 - 1855) y J. Liouville (l809 -1882).

Se basa en querer resolver una ecuación de la forma: $(Py)' + Gy = 0$, considerando a P y G como funciones dependientes de **x** y de un parámetro **λ**, y suponiendo conocidos en dos puntos del eje x los valores de combinaciones lineales de $y(x)$ y de $y'(x)$. Los teoremas de oscilación de Sturm presentan un especial interés ya que permiten examinar la oscilación de dos soluciones comparándola con otras como las de la ecuación elemental $y'' + \lambda y = 0$. Se caracterizan por la existencia de un parámetro **λ** con el que, para valores particulares que se denominan autovalores, el problema de contorno tiene soluciones no triviales. Los teoremas de Sturm permiten determinar soluciones de los problemas de Sturm - Liouville por medio de las técnicas llamadas de "tiro", en la dirección de las primeras investigaciones en esta área. La función de Green ha sido la herramienta más poderosa, y el uso que hizo Freldhom de ella a principios de siglo, demostrando que dicha función es analítica en el parámetro **λ**, excepto para los autovalores donde presenta polos, lo que permite de nuevo utilizar las potentes técnicas de variable compleja en el tratamiento de estos problemas.

En la segunda mitad del siglo XIX se estudió los problemas de contorno para la ecuación de Laplace y la formulación del principio de Dirichlet. El avance de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales de orden superior al primero se realizó en profunda conexión con problemas de física y en particular de elasticidad. Se desarrolló el cálculo de variaciones, aparecieron casos de funciones que no llegan a satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange. El carácter central del problema de Dirichlet ligado a la ecuación de Laplace hizo que se trabajase arduamente en su solución. Para el estudio de ese problema se desarrollaron las técnicas de la teoría de potencial y ecuaciones integrales. La generalización de los operadores diferenciales a funciones absolutamente continuas o derivables en casi todo punto hizo aparecer la noción de solución generalizada. Tienen su origen en el problema de Dirichlet, que inicialmente fue invalidado por Weierstrass, e influyó intrínsecamente en el desarrollo del análisis funcional y la topología, específicamente en la consideración de los espacios funcionales y en lo relacionado con el tema de compacidad.

Según Kline, M. "Una ecuación integral es una ecuación en la que aparece una función incógnita bajo un signo integral. y el problema de resolver dicha ecuación consiste en determinar esa función. Muchos problemas de la física matemática conducen a ecuaciones integrales. Los primeros problemas aislados tratados por este procedimiento se deben a Laplace, con su ecuación que recibe el nombre de transformada de Laplace y trabajaron en ellos Poisson, Fourier, Abel Liouville, y Neumann. Vito Volterra (1860 - 1940), que fue el fundador de la teoría de las ecuaciones integrales, ideó un método para resolver las ecuaciones integrales del segundo tipo, y estudió las del primer tipo. Erik Ivar Fredholm (1 866 - 1 927) recogió las ideas de Volterra y las utilizó para continuar resolviéndolas, y usó la analogía entre estas ecuaciones y las ecuaciones algebraicas lineales para establecer el teorema de la alternativa que lleva su nombre". (Kline, M. 1972).

David Hilbert (1866 - 1943) pensó que el estudio de las ecuaciones diferenciales tenía interés para la teoría de integrales definidas, el desarrollo de funciones arbitrarias en serie, la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, la teoría del potencial y el cálculo de variaciones. Por lo que estableció la teoría espectral general para núcleos simétricos y desarrolló el teorema del eje principal generalizado para las figuras cuadráticas simétricas en el que aparecen las autofunciones y los autovalores, por lo que demostró que se podía generalizar un producto escalar entre funciones. Demostró el teorema que se conoce como de Hilbert-Schmidt, que demuestra que una función puede expresarse como un desarrollo en serie de las autofunciones. Usó un tratamiento de las formas cuadráticas infinitas, probando que toda forma cuadrática acotada y con continuidad completa puede transformarse mediante una transformación ortogonal única en una suma infinita de cuadrados siendo los coeficientes los autovalores. Utilizó estas formas cuadráticas a las ecuaciones integrales.

Especificó sistema ortogonal completo de funciones, y determinó la desigualdad generalizada de Bessel que es equivalente a la completitud. Modificó la ecuación integral en un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas la cual se resuelve calculando los coeficientes de Fourier de una función, por lo consiguiente, si el sistema posee una única solución, la ecuación integral también la tiene. Probó que la ecuación tiene una única solución para cualquier función, si el valor del parámetro no coincide con ningún autovalor, o si coincide, tiene solución si se dan unas condiciones de ortogonalidad. Aplicó estos resultados al problema de Sturm - Liouville, que relacionó con la función de Green. Esta función se utiliza para resolver problemas físicos y técnicos, por ejemplo en dinámica de gases, transformando ecuaciones diferenciales en ecuaciones integrales. Seguidores de esta obra son: Schmidt, Riesz, Fischer. Y Weyl. Riesz y Fischer confirmaron la correspondencia biunívoca entre funciones de cuadrado integrable y las sucesiones de cuadrado sumable de sus coeficientes de Fourier. Las funciones son consideradas puntos de un espacio de Hilbert.

Debido al comportamiento de las soluciones en todo su dominio, lo que se denominó la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales fue creada de forma simultánea por Poincaré (1854 -1912) y Liapunov (1857 - 1918) siendo esto la más contribución importante en este campo del siglo XIX. Poincaré es quien incluye la topología al examinar las propiedades de las trayectorias. Siendo Henri Poincaré un ingeniero de minas, hace su tesis doctorar en ecuaciones diferenciales, sobre teoremas de existencia, lo que contribuyó al estudio de las funciones automorfas (observándose nuevamente la relación entre ecuaciones diferenciales ordinarias y la variable compleja). Sus cursos en la Sorbona trataban contenidos tan distintos como capilaridad, elasticidad, termodinámica, óptica, electricidad, telegrafía, astronomía, cosmogonía entre otros, abriendo nuevos senderos del campo de la Matemática.

Poincaré decide averiguar el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de dos ecuaciones en todos los puntos del plano, pero sin integrar las ecuaciones, utilizando exclusivamente las propiedades de las funciones.

Establece punto singular de $y' = f(x, y)$ como un punto que anula a $f(x, y)$. Clasificó los puntos singulares, estudiando el comportamiento de las soluciones con respecto a estos puntos. Es a Poincaré que se deben las técnicas geométricas de análisis de un espacio de fases, donde en un sistema autónomo bidimensional se visualizan las soluciones como curvas paramétricas y al quitar el parámetro se representan las trayectorias. Estudió las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes racionales para las que consigue una sorprendente generalización de las funciones elípticas. Confirmó que ciertas funciones que se pueden ser determinadas a partir de cocientes de dos soluciones independientes de la ecuación lineal de segundo orden, aceptan grupos de transformaciones análogos a los de las funciones elípticas, pero sin embargo son un subgrupo lineal de las transformaciones de Möbius, grupos estrechamente relacionados con los grupos cristalográficos en el espacio de Lobatchewsky. Estudió también condiciones para que las ecuaciones diferenciales tengan integrales algebraicas. Muchas de estas técnicas fueron usadas en el estudio de los problemas de la mecánica clásica y en particular en el problema de los tres cuerpos; el cual consiste en determinar, en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometida a su mutua atracción gravitacional.

1.2. Marco conceptual

En esta parte se van a considerar los conceptos previos para el buen desarrollo a la base de la propuesta de investigación.

1.2.1. Logaritmo. Conceptos y Propiedades

Concepto de logaritmo

Dado un número **w,** el cual llamaremos base, un número **x** que llamaremos exponente y un número **y** que llamaremos cantidad, *se llama logaritmo* al exponente **x** con el cual elevamos la base **w** para obtener la cantidad **y** deseada.

$$w^x = y \quad \rightarrow \quad x = \log_w y$$

Clases de Logaritmos

Existen dos tipos de logaritmos; los logaritmos decimales (log) cuya base es el número diez (10) y el logaritmo natural o neperiano (ln) cuya base es el numero irracional **e**. para entender mejor la diferencia observemos el siguiente ejemplo.

$$a) \log_{10} U = x \rightarrow 10^x = U$$

$$b) \ln_e U = x \rightarrow e^x = U$$

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de la Unidad

El logaritmo de la unidad en cualquier base diferente de cero es igual a cero (0). $a) \log_a 1 = 0$

Logaritmo de una Cantidad de Igual Base

El logaritmo de la cantidad de igual base es igual a la unidad (1)

$$a)\log_u U = 1$$

Logaritmos de un Producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos sus factores.

$$a)\log_a (U \cdot V) = \log_a U + \log_a V$$

Logaritmo de un Cociente

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del numerador menos el logaritmo del denominar.

$$a)\log_a \left(\frac{U}{V}\right) = \log_a U - \log_a V$$

Logaritmo de Una Potencia

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de la cantidad por el logaritmo de la cantidad.

$$a)\log_a U^n = n \cdot \log_a U$$

1.3. Concepto de Ecuación Diferencial

Se define como ecuación diferencial (ED), aquella ecuación que contiene derivadas de una o varias variables respecto a una o más variables independientes.

1.3.1. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según; tipo, orden y linealidad.

Según el tipo: aquella ecuación que contiene exclusivamente derivadas de una o varias variables dependientes respecto a una única variable independiente se conoce como ecuación diferencial ordinaria (EDO). Por ejemplo:

1) $\frac{dy}{dx} - 3y = e^x$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 12y = 0$ 3) $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 5x + y$

Ahora bien aquella ecuación en donde hay involucradas derivadas parciales de una o varias variables dependientes de dos o más variables independientes se conoce con el nombre de ecuación diferencial parcial (EDP). Ejemplos

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 2) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 4\frac{\partial w}{\partial t}$ 3) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Según su orden: el orden de una ecuación diferencial ya sea ordinaria o parcial es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Ejemplo:

Primer orden $\rightarrow$ 1) $\frac{dy}{dx} - 3y = e^x$

Segundo orden $\rightarrow$ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 12y = 0$

Según su linealidad: se dice que una ecuación diferencial es lineal si F es lineal en cada una de sus derivadas. Ejemplo:

1) $F(x, y, y', \ldots\ldots\ldots, y^{(n)})$
2) $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = P(x)$
3) $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = P(x)$

1.3.2. Notación de Las Ecuaciones Diferenciales

Hay tres formas de expresar las ecuaciones diferenciales; a) notación de Leibniz o notación prima, b) notación de puntos y c) la notación de subíndice. Ejemplos:

a) $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ o y', y'', y'''............ $y^{(n)}$

b) $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$

c) $u_{xx} = u_{tt} - 5u_t$

1.3.3. Solución de una Ecuación Diferencial

Una función θ , definida en un intervalo I, que tiene n derivadas continuas en I, es solución de una ecuación diferencial ordinaria en dicho intervalo, si al sustituirla en la ED la reduce a la identidad.

Las soluciones de una ecuación diferencial pueden ser explícitas o implícitas. Una solución es explicita cuando la variable dependiente se expresa únicamente en términos de la variable independiente y las constantes, y una solución es implícita en un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función θ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I.

Una ecuación diferencial en sentido general tiene un número infinito de soluciones o mejor dicho una familia de soluciones, en la cual dichas soluciones dependerán del orden de la ecuación diferencial. Cuando se le asignan valores específicos a los parámetros arbitrarios, es decir, cuando se le dan valores numéricos a los parámetros, se consigue una solución particular de la ecuación diferencial.

Ejemplo: Dada la ecuación diferencial 3y' + y = 0 comprobar que $y = e^{\frac{-x}{3}}$ es solución de la ecuación dada.

Determinamos a y' obteniendo:

$$y' = -\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$$

Sustituyendo los valores de y'' y de y en la ecuación diferencial

$$3(-\frac{1}{3}e^{\frac{-x}{3}}) + (e^{\frac{-x}{3}}) = 0 \quad \rightarrow \quad e^{\frac{-x}{3}} - e^{\frac{-x}{3}} = 0$$

Se observa que $y = e^{\frac{-x}{3}}$ es solución de la ecuación diferencial dada.

1.3.4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del primer Orden (EDO)

Como habíamos dicho anteriormente son aquellas ecuaciones que contienen exclusivamente derivadas de una o varias variables dependientes respecto a una única variable independiente.

Forma implícita → F(x, y, y'') = 0

En el caso que sea posible despejar a y' se puede expresar de la forma explícita:

y' = f (x, y)

Tipos de soluciones de una EDO

Las soluciones de se pueden considerar de tres tipos.

a) Solución general: es el caso en la que aparecen tantas constates arbitrarias como indica el orden de la ecuación. En el caso nuestro, al considerar que son del primer orden, dicha solución general será una familia de curvas de la forma:

   θ= (x, y, k), siendo k una constante arbitraria.

b) Solución particular: es aquella en donde se sustituye en la solución general el valor de k por un valor fijo, de acuerdo con la condición dada en el problema.

c) Solución singular: es aquella solución que no pertenece a la solución general, no se puede determinar a partir de ella asignando valores a la constante k.

Estas soluciones pueden ser obtenidas de varias formas tales como explicitas, implícitas o en formas paramétricas.

1.3.5. Ecuaciones ordinarias de primer orden autónomas

Es aquella ecuación diferencial en donde la variable independiente aparece implícitamente. Ejemplo

1) $\frac{dy}{dx} = 5 - 3y^2$

1.3.6. Ecuaciones ordinarias de primer orden no autónomas.

Es aquella ecuación diferencial en donde la variable independiente aparece explícitamente. Ejemplo

1) $\frac{dy}{dx} = 7 + 3xy$

1.3.7. Ecuaciones diferenciales ordinarias a variables separadas

Son aquellas ecuaciones que pueden ser expresadas de la forma:

M (x, y) dx + N (x, y) dy = 0

Se consideran las funciones M y N dependiente, en este caso, de las variables x e y respectivamente.

La solución general se obtiene integrando directamente ambos miembros.
Ejemplo:

1) 2x dx - 3 dy = 0 $\rightarrow \int 2xdy - \int 3dy = x^2 - 3y + c = 0$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}c}$$

La cual representa una familia de parábolas para valores diferentes de c.

1.3.8. Ecuaciones homogéneas del primer orden

Definición 1. Un polinomio es homogéneo de grado n, si todos sus monomios tienen el mismo grado n.

Definición 2. Una función f (x, y) es homogénea de grado n, respecto a las variables involucradas x, y si se cumple que $f(kx, ky) = k^n f(x, y), \ \forall k \in \Re^+$

Definición 3. Una ecuación de la forma M (x, y) + N(x, y) = 0 es homogénea si las funciones M y N son homogéneas del mismo grado.

Se podría considerar como la forma estándar de la ecuación homogénea la expresión diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) = 0$$

Hay casos en donde no resulta muy sencillo resolver una ecuación homogénea, por lo es recomendable hacer ciertas sustituciones que faciliten dicha resolución, como es el caso del cambio de variables. Según sea el caso se recomiendan

a) $\frac{y}{x} = u \rightarrow y = ux \quad \rightarrow \quad dy = xdu + udx$

a) $\frac{x}{y} = u \rightarrow x = uy \quad \rightarrow \quad dx = ydu + udy$

Ejemplo. Resuelva la siguiente ecuación homogénea

$$1) ydx - \left(x + \sqrt{xy}\right)dy = 0$$

$$ydx - xdy - \sqrt{xy}dy = 0$$

Dividiendo todo entre x

$$\frac{y}{x}dx - dy - \sqrt{\frac{y}{x}}dy = 0 \quad (a)$$

Ahora hacemos las siguientes sustituciones por conveniencia

$$u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = ux \quad \rightarrow \quad dy = udx + xdu$$

Sustituyendo en (a) obtenemos:

$$udx - (udx + xdu) - \sqrt{u}(udx + xdu\,) = 0$$

$$udx - udx - xdu - u\sqrt{u}dx - x\sqrt{u}du = 0$$

$$xdu + u\sqrt{u}dx + x\sqrt{u}du = 0 \quad \rightarrow \quad u\sqrt{u}dx + (x + x\sqrt{u}\,)du$$

$$u\sqrt{u}dx + x\left(1 + \sqrt{u}\,\right)du = 0$$

Agrupando las variables con sus diferenciales

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 + \sqrt{u}}{u\sqrt{u}}du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1}{u\sqrt{u}}du + \frac{\sqrt{u}}{u\sqrt{u}}du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1}{\sqrt{u^3}}du + \frac{1}{u}du = 0$$

Integrando obtenemos:

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{u^3}}du + \int \frac{1}{u}du = 0$$

$$\ln x + \int u^{-\frac{3}{2}}dx + \ln u = 0$$

$$\ln ux + \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = c$$

$$\ln ux - \frac{2}{\sqrt{u}} = c$$

Sustituyendo u por su igualdad $u = \frac{y}{x}$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right)x - \frac{2}{\sqrt{\frac{y}{x}}} = c$$

$$\boxed{\ln y - \frac{2}{\sqrt{\frac{y}{x}}} = c} \rightarrow \text{ solucion buscada}$$

1.3.9. Ecuación diferencial exacta

Una ecuación diferencial de la forma M(x, y) dx+ N(x, y) dy es una deferencial exacta en una región R del plano xy si ésta obedece a la diferencial de alguna función f (x, y) definida en R. Por consiguiente una ecuación diferencial de primer orden de la forma M (x, y) dx + N(x, y) dy = 0 se considera exacta si y solo si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Criterio de una ecuación diferencial exacta

La condición necesaria y suficiente para que M (x, y) dx+ N(x, y) dy sea una forma diferencial exacta es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejemplo. Resuelva la siguiente ecuación diferencial exacta

1) $(x+y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy$

$M = (x+y)^2$ $\qquad N = (2xy + x^2 - 1)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(x+y)$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y + 2x = 2(x+y)$

Se observa que es exacta ya que las parciales correspondientes son iguales

Ahora determinamos una función:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \quad (a)$$

$$f(x,y) = \int (x+y)^2 dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \int (x^2 + 2xy + y^2)\, dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + xy^2 + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 + xy^2 + g(y) \quad (b)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Derivamos a (b) parcialmente con respecto y e igualando el resultado a N

$$0 + \cancel{x^2} + \cancel{2xy} + g'(y) = \cancel{2xy} + \cancel{x^2} - 1$$

$$g'(y) = -1$$

$$\frac{dg(y)}{dy} = -1$$

$$dg(y) = -1dy$$

$$\cancel{\int d}g(y) = \int -1dy$$

g(y) = - y sustituimos esta expresión en la ecuación b

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 + xy^2 - y} \quad \rightarrow \quad funcion\ buscada$$

1.3.10. Factor integrante

En ocasiones resulta ser que hay ecuaciones de la forma M (x, y) dx + N(x, y) dy = 0 que no son exactas, pero que al multiplicarla por una expresión $\mu(x,y)$ convirtiendo la ecuación en exacta. A esta $\mu(x,y)$ se le conoce como factor integrante.

Se puede obtener según sea el caso dos expresiones en donde una de ellas es el factor integrante de la ecuación diferencial.

1) Si en el caso que $\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)$ resulta ser una función solo de x, entonces podemos determinar un factor integrante para la ecuación M (x, y) dx + N(x, y) dy = 0 el cual es:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}}$$

2) Si en el caso que $\left(\frac{N_x - M_y}{N}\right)$ resulta ser una función solo de y, entonces podemos, determinar un factor integrante para la ecuación M (x, y) dx + N(x, y) dy = 0 el cual es:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}}$$

Ejemplo. Determine el factor integrante convirtiendo en exacta la siguiente ecuación y resuélvala.

$$6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0 \quad (1)$$

$$M = 6xy \qquad\qquad N = (4y + 9x^2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 18x$$

Al observar que las parciales no resultan iguales se procede a calcular el factor de integración.

$$g(x) = \frac{My - Nx}{N} = \frac{6x - 18x}{4y + 9x^2} = \frac{-12x}{4y + 9x^2}$$

No resulta un g(x), por lo que hay que calcular a un g(y)

$$g(y) = \frac{Nx - My}{M} = \frac{18x - 6x}{6xy} = \frac{12x}{6xy} = \frac{2}{y}$$

$$g(y) = \frac{2}{y}$$

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy}$$

$$\mu(y) = e^{2lny}$$

$$\mu(y) = e^{lny^2}$$

$$\mu(y) = y^2$$

Multiplicamos a la ecuación (1) por y^2

$$6xy^3dx + (4y^3 + 9x^2y^2)dy = 0$$

Ahora comprobamos que la ecuación es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 18xy^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 18xy^2$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \quad (a)$$

$$f(x,y) = \int 6xy^3dx + g(y)$$

$$f(x,y) = \frac{6x^2y^3}{2} + g(y) \qquad (b)$$

$$f(x.y) = 3x^2y^3 + g(y)$$

$$\frac{\partial f(x.y)}{\partial y} = N(x.y)$$

$$\cancel{9x^2y^2} + g'(y) = 4y^3 + \cancel{9x^2y^2}$$

$$g'(y) = 4y^3$$

$$\frac{dg(y)}{dy} = 4y^3$$

$$dg(y) = 4y^3 dy$$

$$\int dg(y) = 4\int y^3 dy$$

$$g(y) = y^4$$

Sustituimos este valor en la ecuación (b)

$$\boxed{f(x.y) = 3x^2y^3 + y^4} \quad \rightarrow \quad \textit{ecuación buscada}$$

1.3.11. Ecuación lineal de primer orden

Son aquellas que se pueden expresar de las siguientes formas:

1) $y' + P(x)y = q(x)$
2) $y' + P(x)\,y - q(x) = 0$
3) $\frac{dy}{dx} + P(x)y - q(x) = 0$

1.3.12. Procedimiento para resolver una ecuación lineal de primer orden

Para resolver una ecuación lineal de primer orden hay que llevarla a exacta buscando un factor de la siguiente forma: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

El cual se multiplica por toda la ecuación lineal y luego se procede a resolver dicha ecuación.

1.3.13. Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^{n}$, donde n es cualquier número que pertenece al conjunto de los reales, se llama ecuación de Bernoulli, se puede observar que para n = 0 y n = 1, la ecuación anterior es lineal, pero para n ≠ 0 y n ≠ 1. la sustitución $z = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación a una ecuación lineal.

Ejemplo. Resolver aplicando el método de Bernoulli

1) $y'+\frac{2}{x}y=-x^4y^3e^x \qquad (1)$

Expresamos la ecuación en forma diferencial

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=-x^4y^3e^x \qquad (2)$$

Como tenemos y^3 entonces n = 3

Haciendo:

$$z=y^{1-n} \quad \rightarrow \quad z=y^{1-3} \quad \rightarrow \quad z=y^{-2} \quad \rightarrow \quad dz=-2y^{-3}dy$$

Multiplicando a la Ec (2) por $-2y^{-3}$ obtenemos

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx}+-2y^{-3}\left(\frac{2}{x}y\right)=(-2y^{-3})(-x^4y^3e^x)$$

$$\frac{-2y^{-3}dy}{dx}-\frac{4}{x}y^{-2}=2x^4e^x \qquad (3)$$

Sustituyendo a $z=y^{-2}$ y $dz=-2y^{-3}dy$ en la Ec 3, se obtiene:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{4}{x}z=2x^4e^x \qquad (4)$$

Calculamos el factor integrante para p(x) = $-\frac{4}{x}$

$$\mu(x)=e^{\int pxdx}$$

$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$

$\mu(x) = x^{-4}$

Multiplicamos toda la Ec 4, por el factor integrante x^{-4}

$$x^{-4}\frac{dz}{dx} - 4x^{-5}z = 2e^{x} \qquad (5)$$

Observando que:

$$\frac{d(x^{-4}z)}{dx} = x^{-4}\frac{dz}{dx} - 4x^{-5}z$$

Sustituimos en la Ec 5

$$\frac{d(x^{-4}z)}{dx} = 2e^{x}$$

$$d(x^{-4}z) = 2e^{x}dx$$

Integrando ambos miembros se obtiene:

$$x^{-4}z = \int 2e^{x}dx$$

$$x^{-4}z = 2e^{x} + c$$

$$z = 2x^{4}e^{x} + x^{4}c$$

$$y^{-2} = 2x^{4}e^{x} + x^{4}c$$

$$y^{2} = \frac{1}{2x^{4}e^{x} + x^{4}c}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2x^{4}e^{x} + x^{4}c}} \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x^{2}}\sqrt{\frac{1}{2e^{x} + c}}}$$

1.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias del segundo orden

Son aquellas ecuaciones diferenciales en donde se establece una relación entre la variable independiente x, la variable dependiente y, y la primera y segunda derivadas de la variable y, o sea, una de la forma:

$F(x, y, y', y'') = 0$

Ejemplo. Determine la solución de la siguiente ecuación de segundo orden en este caso homogénea.

1) $3y'' - 5y' + 2y = 0$

Hacemos la sustitución por el parámetro t

$3t^2 - 5t + 2 = 0$

Resolviendo la ecuación por factorización

$3t^2 - 5t + 2 = 0$
$(3t - 2)(t - 1) = 0$
$3t - 2 = 0$ y $t - 1 = 0$

$t_1 = 2/3$ y $t = 1$

$$\boxed{y_1 = c_1 e^{\frac{2}{3}t} + c_2 e^{x}}$$

1.5. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas del segundo orden (a coeficiente contante)

Se refiere a una ecuación diferencial de la que se quiere determinar sus soluciones las cuales son del tipo:

$y'' + py' + qy = f(x)$

Este tipo de ecuación está asociada a una ecuación homogénea de la forma:

$y'' + py' + qy = 0$, de la que se obtendrá su solución $y_H = c_1y_1 + c_2y_2$ en donde y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la homogénea y c_1, c_2 constantes arbitrarias.

La solución general de la ecuación de segundo orden no homogénea se obtendrá de la suma de las soluciones asociada y de una solución particular:

$y = y_H + y_p$

Se debe obtener un método para buscar a y_p.

1.5.1. Método de LaGrange (variación de las constantes arbitrarias)

Consideremos la ecuación diferencial anterior $y'' + py' + qy = f(x)$, la cual tenga las solución homogénea $y_H = c_1y_1 + c_2y_2$, siendo y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la homogénea. Suponiendo que una solución particular de la ecuación general sea del mismo tipo y haciendo la sustitución de c_1, c_2 por u_1, u_2 funciones variables de x:

$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$

De lo que se puede apreciar que la solución general será:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2$$

Para determinar a u_1 y u_2:

$$\begin{cases} y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \end{cases}$$

Como y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la homogénea, el Wronskiano $W(x) \neq 0$, así que obtendremos una solución determinada, que se puede calcular usando el método de cramer.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\neq 0 \qquad Wu_1'=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \qquad Wu_2'=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Luego tendremos

$$u_1'=\frac{Wu_1'}{W} \qquad \text{y} \qquad u_2'=\frac{Wu_2'}{W}$$

Al integral las expresiones anteriores, se obtiene:

$$u_1=\int\frac{Wu_1'}{W}dx \quad \text{y} \quad u_2=\int\frac{Wu_2'}{W}dx$$

Con estos valores ya se puede determinar la solución general de la ecuación dada

$$y=c_1y_1+c_2y_2+u_1y_1+u_2y_2$$

En conclusión los valores de u_1 y u_2 también se pueden obtener con las siguientes expresiones

$$u_1=-\int\frac{y_2f(x)}{W}dx \quad \text{y} \quad u_2=\int\frac{y_1f(x)}{W}dx$$

Ejemplo. Resuelva por el método de variación de parámetro.

1) $y''+3y'-10=(x+1)e^{2x}$

Sacamos la ecuación auxiliar usando la variable t y factorizamos.

$t^2+3t-10=0$

$(t+5)(t-2)=0 \ \rightarrow t=\ -5\ y\ t=2$

La solución homogénea es:

$y_H=\ c_1e^{-5x}+c_2e^{2x}$ (2)

De la ecuación 2 sacamos los valores de y_1 y y_2

$y_1=\ e^{-5x}\ \ y\ \ y_2=\ e^{2x}$

Calculamos el Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-5x} & e^{2x} \\ -5e^{-5x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = (e^{-5x})(2e^{2x}) - (e^{2x})(-5e^{-5x})$$

$$= 2e^{-5x+2x} + 5e^{2x-5x} = 2e^{-3x} + 5e^{-3x} = 7e^{-3x}$$

$$W = 7e^{-3x}$$

Ahora calculamos los valores de u_1 y u_2

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = -\int \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{7e^{-3x}} dx = -\frac{1}{7}\int \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{-3x}} dx$$

$$u_1 = -\frac{1}{7}\int (x+1)e^{7x}\, dx$$

Usando el método tabular de integración

Deriva	Integra
(+) (x + 1)	e^{7x}
(-) 1	$\frac{1}{7}e^{7x}$
(+) 0	$\frac{1}{49}e^{7x}$

Sustituyendo en:

$$u_1 = -\frac{1}{7}\int (x+1)e^{7x}\, dx = -\frac{1}{7}\left[(x+1)\left(\frac{1}{7}\right)e^{7x} - \frac{1}{49}e^{7x}\right]$$

$$u_1 = -\frac{1}{7}e^{7x}\left[\frac{1}{7}x + \frac{1}{7} - \frac{1}{49}\right] = -\frac{1}{7}e^{7x}\left[\frac{1}{7}x + \frac{6}{49}\right]$$

$$\boxed{u_1 = -\frac{1}{7}e^{7x}\left[\frac{1}{7}x + \frac{6}{49}\right]}$$

Calculando a u_2

$$u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx = \int \frac{e^{-5x}(x+1)e^{2x}}{7e^{-3x}} dx = \int \frac{(x+1)e^{-3x}}{7e^{-3x}} dx$$

$$u_2 = \frac{1}{7}\int (x+1)dx = \frac{1}{7}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]$$

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{7}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]}$$

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2$$

$$y_p = (e^{-5x})\left(-\frac{1}{7}e^{7x}\left[\frac{1}{7}x + \frac{6}{49}\right]\right) + (e^{2x})\left(\frac{1}{7}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]\right)$$

$$y_p = \left(-\frac{1}{7}e^{2x}\left[\frac{1}{7}x + \frac{6}{49}\right]\right) + (e^{2x})\left(\frac{1}{7}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]\right)$$

$$y_p = \frac{1}{7}e^{2x}\left[-\frac{1}{7}x - \frac{6}{49} + \frac{x^2}{2} + x\right]$$

$$y_p = \frac{1}{7}e^{2x}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{6}{7}x - \frac{6}{49}\right]$$

$$\boxed{y = y_H + y_p = y_H = c_1e^{-5x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{7}e^{2x}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{6}{7}x - \frac{6}{49}\right]}$$

CAPÍTULO II. CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y ELEMENTOS

En este capítulo se trataran todos los conceptos y elementos que intervienen en un circuito eléctrico. Se comenzara con la historia, así como los conceptos más importantes que son necesario saber de los circuitos como son: resistencia, capacitor, bobina entre otros. Detallaremos con precisión la utilidad de los elementos y el cálculo de los fenómenos físicos que ocurren en cada elemento del circuito como es la corriente, voltaje, potencia entre otros.

2.1. Reseña historia de los circuitos eléctricos.

"Al rededor del año 1600 que William Gilbert, emplea por primera vez concepto Electricidad y definió el término de fuerza eléctrica como el fenómeno de atracción que se producía al frotar ciertas sustancias. Poco después, hacia el 1672, el físico Alemán Otto Von Guericke, también incursionó investigaciones sobre electrostática. Observó que se producía una repulsión entre cuerpos electrizados luego de haber sido atraídos. Charles François de Cisternay du Fay (París, 1698 – 1739), un físico francés, dedicó su vida al estudio de los fenómenos eléctricos observó que una lámina de oro siempre era repelida por una barra de vidrio electrificada. En 1733 publicó sus trabajos siendo el primero en identificar la existencia de dos tipos de cargas eléctricas (positiva y negativa). A partir de 1740, Pieter Van Musschenbroek, físico holandés, realizó varios experimentos sobre la electricidad. Uno de ellos llegó a ser famoso: se propuso investigar si el agua encerrada en un recipiente podía conservar cargas eléctricas. En 1747 William Watson demostró que una descarga de electricidad estática es una corriente eléctrica y se propaga mejor en un ambiente enrarecido que en condiciones normales. Fue Alejandro Volta, el que revolucionó el uso de la electricidad y dio al mundo uno de sus mayores beneficios, la pila, el control de la circulación de una corriente eléctrica. Así, la pila voltaica consiste de treinta discos de metal, separados por paños humedecidos con agua salada. Si al extremo inferior de esta batería se le conectaba un alambre, se establecería una corriente eléctrica cuando se cerrara el circuito. Volta construyó una serie de dispositivos capaces de producir electricidad que salía continuamente al exterior a medida que se producía. Esto creaba una corriente eléctrica, que resultó mucho más útil que una carga de electricidad estática que no fluyera. En el año 1826, Georg Simon Ohm, sentó las bases del estudio de la circulación de las cargas eléctricas en el interior de materias conductoras y formula la ley que relaciona las tres magnitudes más importantes: Voltaje, Intensidad y Resistencia". (Internet)

2.2. Concepto de circuito eléctrico

Un circuito eléctrico es una interconexión de elementos (dispositivos eléctricos) simples en el cual debe existir una trayectoria cerrada por donde pueda fluir una corriente eléctrica.

2.3. Elementos físicos de un circuito eléctrico

Son aquellos que utilizamos para realizar las interconexiones en los circuitos eléctricos.

2.3.1. Resistor

Es todo aquello que se opone al paso de la corriente eléctrica. La resistencia eléctrica se mide en ohmios, cuya simbología es la letra griega omega (Ω). La fig. 2.4.1 muestra la representación gráfica de una resistencia.

fig. 2. 4. 1

2.3.2. Capacitor

Es un dispositivo eléctrico o electrónico el cual posee la propiedad de almacenar energía basada en un campo eléctrico. Este dispositivo está compuesto por dos placas separadas por un material dieléctrico o por el vacío. La unidad de medida del capacitor es el faradio (F). La fig. 2.4.2 muestra la representación gráfica de un capacitor.

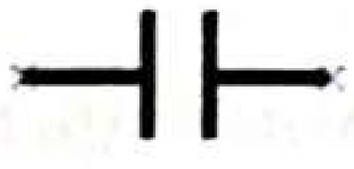


Fig. 2. 4. 2

2.3.3. Bobina

Es un dispositivo eléctrico que a diferencia del capacitor es un alambre enrollado en forma de espirar el cual almacena energía en forma de campo magnético. La unidad de medida de la bobina es el Henrios (H), aunque además se pueden encontrar estas unidades en milihenrios (mH). La fig. 2.4.3 muestra el símbolo grafico de la bobina.

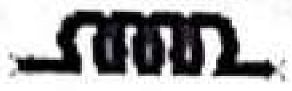


Fig. 2.4.3

2.4. Magnitudes físicas que se presentan en los circuitos eléctricos

Son ciertas magnitudes que se presentan en un circuito eléctrico a la hora de interconectar los diferentes elementos o dispositivos eléctricos del circuito alimentándolo o no a una fuente de voltaje.

2.4.1. Carga

La carga (**q**) se considera una propiedad intrínseca que presentan algunas partículas subatómicas positivas o negativas las cuales se manifiestan a través de atracciones o repulsiones que determinan así las interacciones electromagnéticas entre ellas. La unidad de medida de la carga es el coulomb (**C**).

2.4.2. Corriente

La corriente eléctrica (**i**) es una magnitud física que indica la cantidad de carga (**q**) que pasa por un conductor (circuito eléctrico) en una unidad de tiempo determinada. La unidad de medida de la corriente es el amperio (**A**).

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$expresion\ diferencial\ de\ la\ corriente$$

Se puede destacar que hay dos tipos de corriente eléctrica las cuales son: la corriente alterna (**AC**) la cual varía en el tiempo y la corriente directa (**DC**) la que no varía con el tiempo.

2.4.3. Voltaje

Es la magnitud física que, impulsa los electrones (**e**⁻) en un conductor (circuito eléctrico), o sea, conduce la energía eléctrica con mayor o menor potencia. La unidad de medida del voltaje es el voltio (**v**). El voltaje es lo mismo que diferencia de potencia o tensión eléctrica, la cual se considera como el trabajo por unidad carga que ejerce el campo eléctrico sobre una partícula para que esta se pueda mover de un lugar otro.

2.4.4. Potencia

Es la elación obtenida por el paso de un flujo energía por unidad de tiempo, es decir, la cantidad de energía que entrega o absorbe un elemento en un tiempo determinado. La potencia se mide en (watt) y se calcula por (p = v *i*)

2.5. Ley de Ohm

Esta establece que el voltaje entre los extremos de distintos tipos de materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del material. La siguiente ecuación muestra dicha ley.

$$\boxed{\mathbf{v} = i \cdot R}$$

2.6. Leyes de Kirchhoff

Enfocado en la estructura de los circuitos eléctricos y en el movimiento de la corriente eléctrica a través del conductor Kirchhoff establece dos grandes leyes una de corriente (LCK) y otra de voltaje (LVK).

1) Ley de corriente de Kirchhoff (LCK): establece que la suma algebraica de las corrientes que entran a cualquier nodo (punto de conexión de un circuito) es igual a cero (0).

2) Ley de voltaje de Kirchhoff (LVK): estable que la suma de los voltajes alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito eléctrico es igual a cero (0).

2.7. Tipos de circuitos eléctricos

Según sean los elementos o los dispositivos que se encuentren interconectados en el circuito eléctrico estos pueden ser: resistivos, inductivos, capacitivo, resistivo – capacitivo (RC), resistivo – inductivo (RL) y resistivo – inductivo – capacitivo (RLC).

2.7.1. Circuito eléctrico resistivo

Es aquel en donde únicamente se encuentra interconectado uno o varios resistores en el circuito eléctrico y por donde pasa la corriente eléctrica. La Fig 2. 3. 1 muestra un ejemplo sencillo de un circuito con un solo resistor

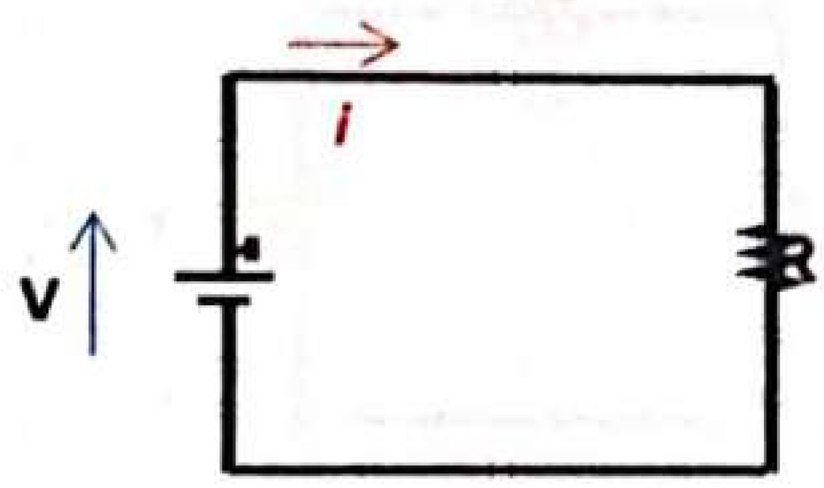


fig. 2. 3. 1

2.7.2. Circuito eléctrico capacitivo

Es aquel en donde únicamente se encuentra interconectado uno o varios capacitores en el circuito eléctrico y por donde pasa la corriente eléctrica. La Fig. 2.3.2 muestra un ejemplo de un circuito con un solo capacitor.

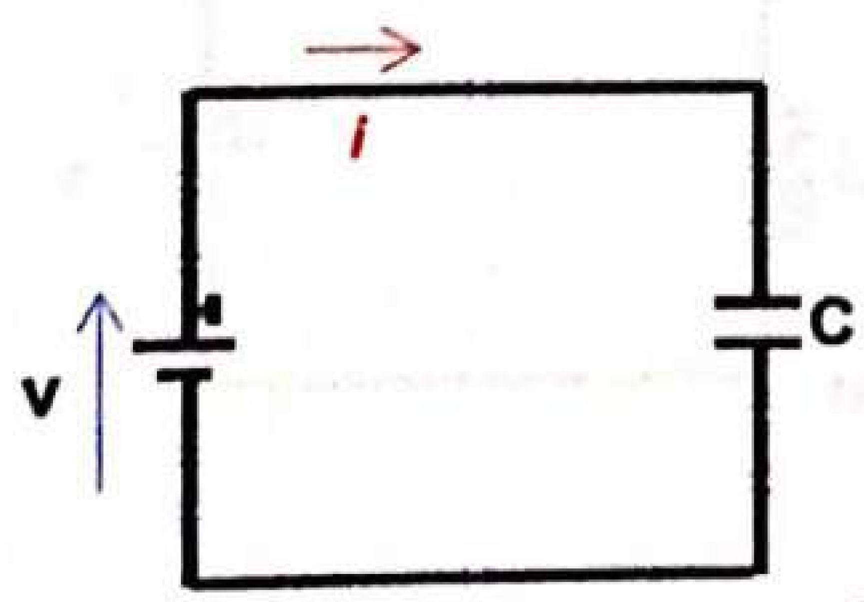


fig. 2.3.2

2.7.3. Circuito eléctrico inductivo

Es aquel en donde únicamente se encuentra interconectada una o varias bobinas en el circuito eléctrico y por donde pasa la corriente eléctrica. La Fig. 2.3.3 muestra un ejemplo de un circuito con una sola bobina.

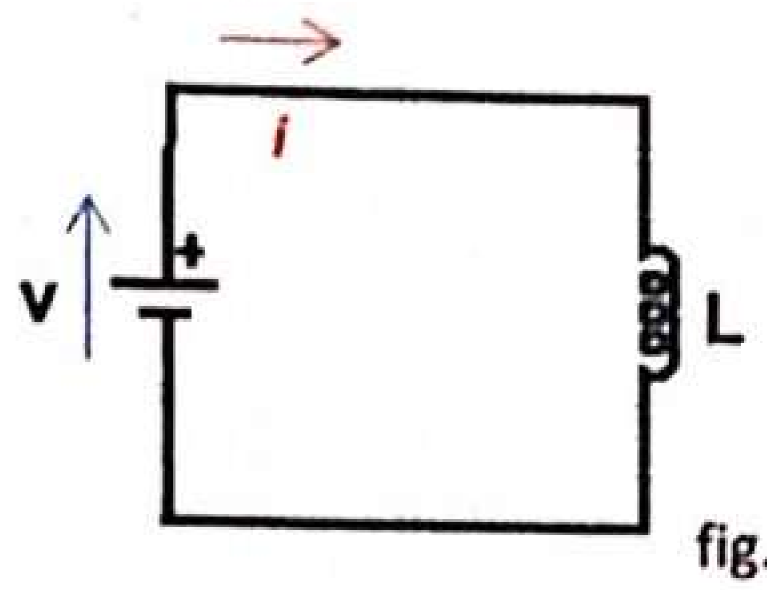


fig. 2.3.3

2.7.4. Circuito eléctrico RC

Es aquel circuito eléctrico que está compuesto por un resistor y un capacitor ya sea en serie o en paralelo. La figura 2.3.4 muestra un ejemplo de un circuito RC conectado en series.

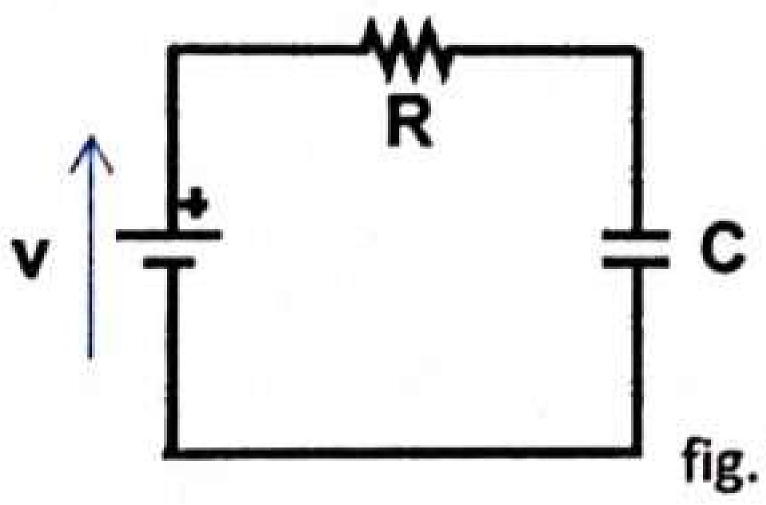


fig. 2. 3. 4

2.7.5. Circuito eléctrico RL

Es aquel circuito eléctrico que está compuesto por un resistor y un inductor ya sea en serie o en paralelo. La figura 2. 3. 5 muestra un ejemplo de un RL conectado en serie.

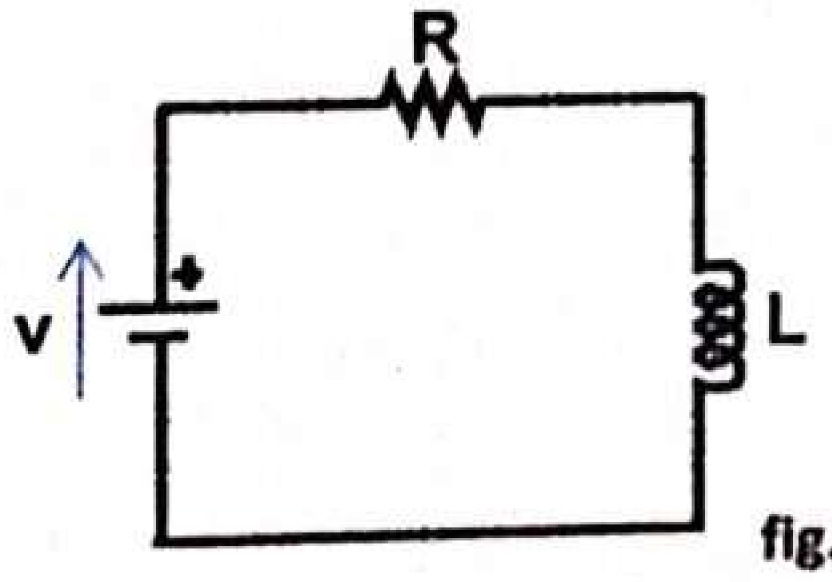


fig. 2. 3. 5

2.7.6. Circuito eléctrico RLC.

Es aquel circuito eléctrico que está compuesto por un resistor una bobina y un capacitor interconectados entre ellos ya sea en series o en paralelos. La fig. 2.3.6 muestra un ejemplo sencillo de un circuito RLC.

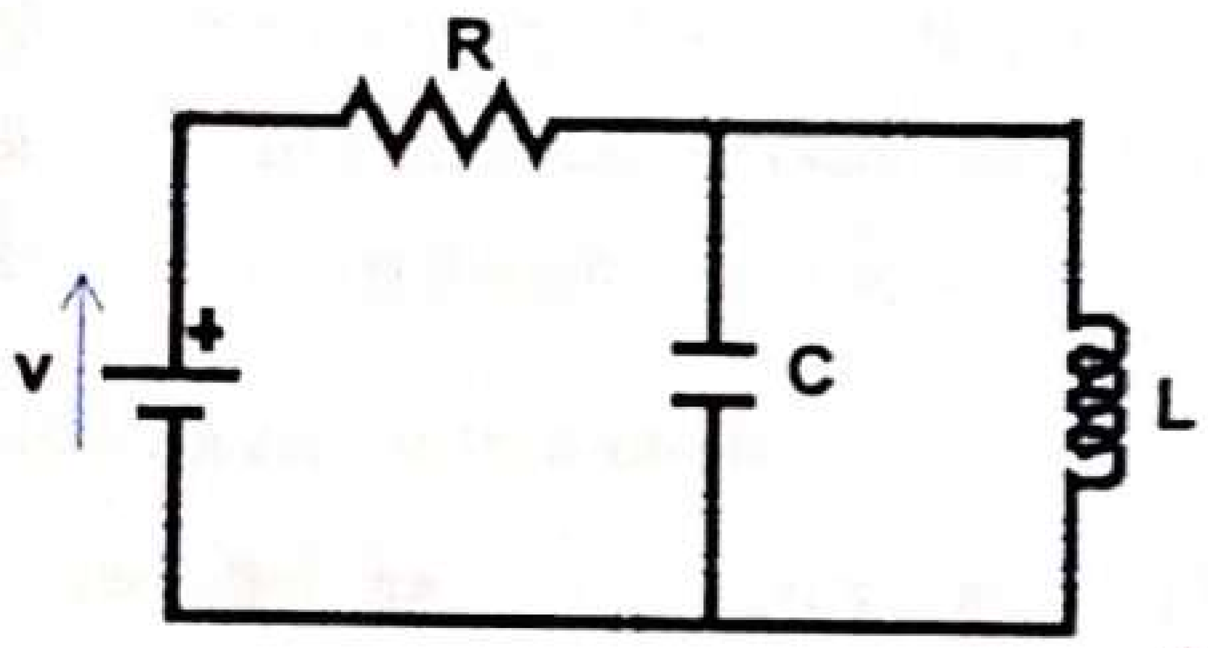


fig. 2. 3. 6

CAPITULO III. IDENTIFICACIÓN Y APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES A CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

En este capítulo se identificaran las diferentes ecuaciones diferenciales que se necesitan para aplicarla a los diferentes tipos de circuitos eléctricos ya visto en el capítulo anterior como son los circuitos resistivos, capacitivos, inductivos, circuitos RC, RL y RLC. Se analizara el ¿Por qué? de la necesidad de utilizar las ecuaciones diferenciales en la resolución de los circuitos eléctricos según sea el tipo.

3.1. Circuito eléctrico inductivo

En este circuito se considerara a L como una constante de proporcionalidad, pero el voltaje y la corriente como dos cantidades variables del tiempo. Por lo que la ecuación diferencial que relaciona a estas variables es:

$v = L\frac{di}{dt}$ (1)

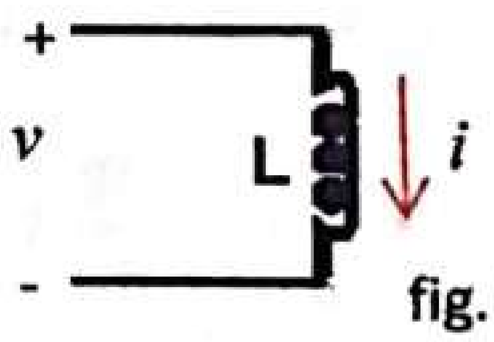


fig. 3.1

El inductor se considera un corto circuito para corriente directa, y también se tiene previsto que la corriente en el inductor no puede cambiar abruptamente de un valor a otro ya que para esto se requiere asociarle un voltaje y una potencia al infinito.

De la Ec.(1) se pueden obtener la corriente i(t), resolviendo la ecuación diferencial, la cual se puede observar que es del tipo lineal.

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$v\frac{1}{L}dt = di$$

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt$$

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt + i(t_0) \quad (2)$$

La Ec (2) expresa la corriente en términos de del voltaje. Esta ecuación se puede expresar como una integral indefinida asignándole una constante de integración h.

$$i(t) = \frac{1}{L}\int vdt + h \quad (3)$$

Si suponemos que estamos en presencia de un problema real en el cual la elección de t_0 como $-\infty$ asegura que no habrá corriente o energía en el inductor. Por eso, si $i(t_0) = i(-\infty) = 0$, entonces:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} vdt$$

La Potencia (p) y energía (E) almacenada en el inductor se calculan de la siguiente forma:

$$p = vi$$

$$pero\ v = L\frac{di}{dt}$$

$$p = Li\frac{di}{dt}$$

$$pdt = Lidi \rightarrow \int_{t_0}^{t} pdt = \int_{t_0}^{t} Lidi$$

Y por lo tanto: la energía en el inductor E_L será:

$$\int_{t_0}^{t} pdt = L\int_{t_0}^{t} idi$$

$$E_L(t) - E_L(t_0) = \frac{1}{2}L\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\} \quad J$$

Aquí de nuevamente se supone que en t_0 la corriente es $i(t_0)$. Si se usa esta expresión para la energía, ya que se acostumbra suponer que se elige un valor de t_0 para que la corriente sea cero; también se acostumbra a suponer que en ese instante la energía en la bobina vale cero $E_L(t_0) = 0$. Por lo se obtiene

$$E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2$$

Ejemplo 3.1. Suponga el voltaje en un inductor de 3H está dado por 6 cos 5t V, y la corriente es 1A en t = $-\frac{\pi}{2}$ s. ¿Qué información se puede obtener sobre la corriente del inductor?

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} vdt + i(t_0)$$

$$i(t) = \frac{1}{3}\int_{t_0}^{t} 6\cos 5t\, dt + i(t_0)$$

$$i(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}\right) sen\,(5t) - \frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}\right) sen\,(5t_0) + i(t_0)$$

$$i(t) = 0.4 sen\, 5t - 0.4\, sen\, 5t_0 + i(t_0)$$

Ahora se identifica t_0 como $-\frac{\pi}{2}$ con $i(t_0) = 1$, y se encuentra que:

$$i(t) = 0.4\, sen\, 5t - 0.6\, sen\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + 1$$

$$i(t) = 0.4\, sen\, 5t - 0.6\,(-1) + 1$$

$$i(t) = 0.4\, sen\, 5t + 1.6$$

3.2. Circuito eléctrico capacitivo

En este circuito se considerara el capacitor C como una constante de proporcionalidad, pero el voltaje y la corriente como dos cantidades variables del tiempo. Por lo que la ecuación diferencial que relaciona a estas variables es:

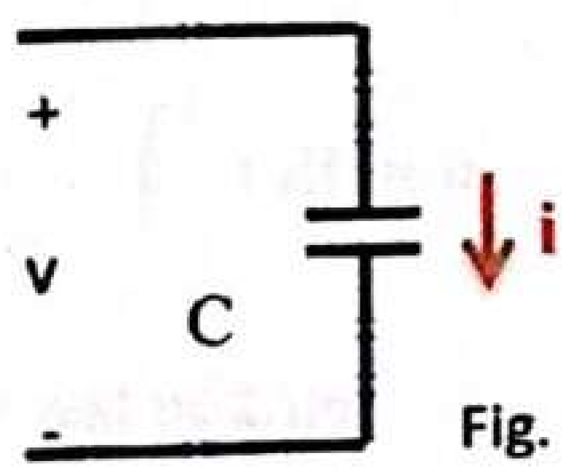


Fig. 3.2

Las marcas de referencia para el voltaje y la corriente se muestran en el símbolo de un capacitor fig. 3.2 de manera que:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

El voltaje en el capacitor se puede expresar en términos de la corriente, integrando a:

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$dv = \frac{1}{C} idt$$

Integrando entre los instantes t_0 y t y entre los voltajes correspondientes v(t_0) y v(t) se obtiene:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} idt + v(t_0)$$

Esta ecuación se puede expresar al igual como en el caso de la inductancia como una integral indefinida más una constante de integración h:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} idt + h$$

En muchas condiciones reales, t_0 se puede seleccionar como - ∞ y $v(-\infty)$ como cero:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\, dt$$

Cabe señalar que la integral:

$$\int_{-\infty}^{t} i\, dt = q$$

Sustituyendo en la ecuación del voltaje

$$q = Cv$$

y la energía almacena en el capacitor será:

$$E_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2$$

Ejemplo. Una fuente de voltaje senoidal de 50 sen 2πt V, en paralelo con un resistor de 0.5 MΩ y un capacitor de $40\mu F$ como se muestra en la fig. 3.2.1 Puede suponerse que el resistor en paralelo representa la resistencia del aislante o dieléctrico entre las placas del capacitor físico. Hacer la fig. 3-9.

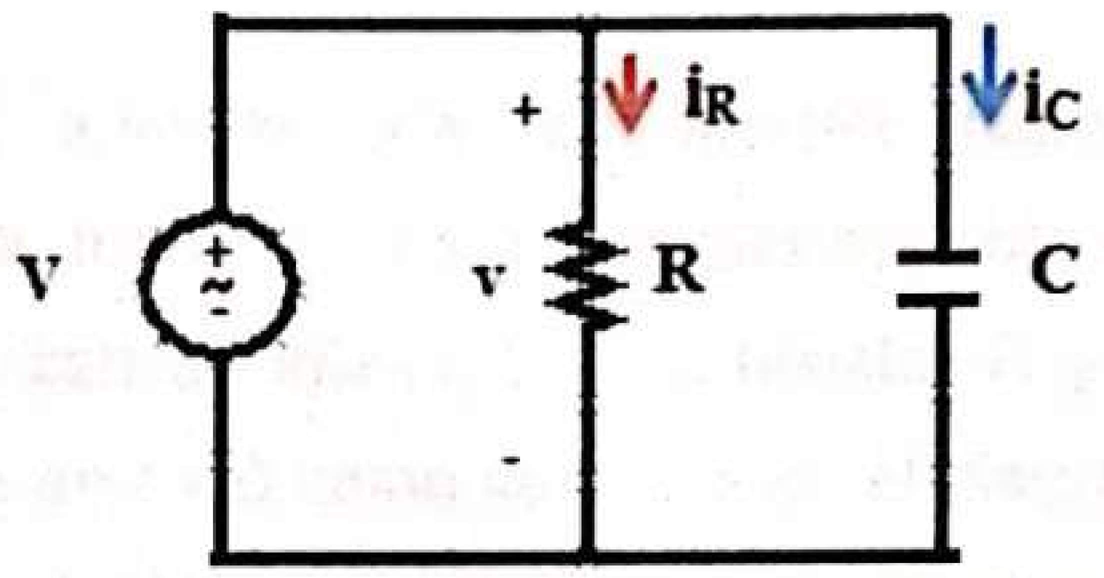


fig. 3.2.1

a) Determine la máxima energía almacena en el capacitor de la figura y la energía disipada en el resistor, en un intervalo $0 \le t \le 0.5\ s$.

Solución: la corriente a través del resistor es

$$i_R = \frac{v}{R} = \frac{50 \text{ sen } 2\pi t}{0.5\ M} = 1\,x\,10^{-4} sen\ 2\pi t \quad A.$$

Y la corriente en el capacitor es:

$$i_C = C\frac{dv}{dt} = 40 \times 10^{-6}\frac{d}{dt}(50\ sen\ 2\pi t)$$

$$i_C = 4\pi \times 10^{-6} \cos 2\pi t \quad A$$

Ahora la energía almacenada en el capacitor

$$E_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}(\,40\mu F)(50 \text{ sen } 2\pi t)^2 = 0.05\ sen^2 2\pi t \quad J$$

La cual si se analiza la ecuación anterior se podrá observar que aumenta desde t = 0 hasta un máximo de 0.05 J en t = ¼ s, y luego decrece hasta cero en otro ¼ s. durante este intervalo de ½ s, la energía disipada en el resistor es:

$$E_R = \int_0^{0.5} P_R\, dt = \int_0^{0.5} 5x10^{-2} sen^2 2\pi t\, dt = 12.5\, mJ$$

Se concluye con el resultado de que $E_{C\ max}$ = 0.05 J y E_R = 12.5 mJ.

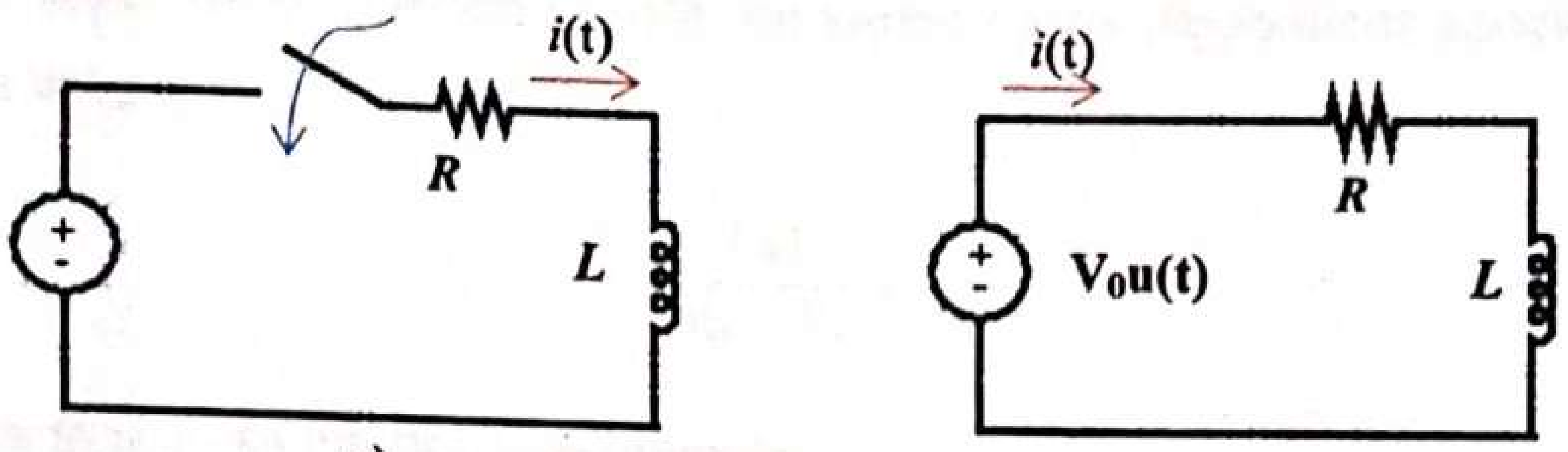
3.3. Circuito RL con excitación

Un primer vistazo al circuito RL con excitación

Ahora es posible analizar una red sencilla cuando se le aplica repentinamente una fuente de cd. El circuito consiste en una batería de voltaje V_0 en serie con un interruptor, un resistor R y un inductor L. El interruptor se cierra en t = 0 como se indica en el diagrama de circuito de la figura 5-9a. Es evidente que la corriente í (t) vale cero antes de t = 0 por lo que se pueden sustituir la batería y el interruptor por una función de excitación de voltaje escalón V_0 u(t), la cual tampoco produce respuesta antes de í = 0. Es obvio que después de t = 0 ambos circuitos son idénticos. Entonces, la corriente i(t) se busca ya sea en el circuito dado de la figura 5-9a, o en el circuito equivalente de la figura 5-9b.

Por el momento se calculará i(t) escribiendo la ecuación de circuito apropiada, y luego resolviéndola por separación de variables e integración. Después de obtener la respuesta y analizar las dos partes de las que se compone, se dedicará un espacio (la

La fig. 3.3 (a) muestra el circuito dado y la fig. 3.3 (b) muestra el circuito equivalente los cuales poseen la misma respuesta i(t) para todo tiempo.



a) b)

sección que sigue) a investigar el significado general de esos dos términos. La solución a este problema se podrá entonces construir muy fácilmente; es más, el lector podrá aplicar los principios generales que avalan este método simple para obtener soluciones más rápidas y significativas a cualquier problema que requiera la aplicación súbita de una fuente. Ahora se procederá a desarrollar el método formal de solución.

Al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito de la figura 5-9b, se tiene

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0u(t)$$

Como la función de excitación escalón unitario es discontinua en t = 0, primero se encontrara la solución para t < 0 y luego para t > 0. Es evidente que la aplicación de un voltaje cero desde t = - ∞ no ha producido ninguna respuesta y, por lo tanto,

$$i(t) = 0 \qquad t < 0$$

Sin embargo, para un tiempo positivo, u(t) es igual a uno, por lo que hay que resolver la ecuación

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 u \qquad t > 0$$

Las variables se pueden separar en varios pasos algebraicos sencillos, lo que lleva a

$$\frac{Ldi}{V_0 - Ri} = dt$$

Y cada lado se integra directamente:

$$-\frac{L}{R} ln(V_0 - Ri) = t + h$$

Para evaluar h se necesita conocer una condición inicial. Antes de t = 0, i (t) vale cero (0), por lo que i (0^-) = 0; como la corriente en un inductor no puede cambiar en una cantidad finita en un intervalo de tiempo cero sin asociarse con un voltaje infinito, debe tenerse i(0^+) = 0.

Haciendo i = 0 en t = 0 se obtiene

$$-\frac{L}{R} lnV_0 = h$$

Y entonces,

$$-\frac{L}{R}[ln(V_0 - Ri) - lnV_0] = t$$

Al reordenar;

$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-Rt/L}$$

Es decir,

$$i = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \qquad t > 0$$

Así pues, una expresión para la respuesta válida para todo t seria:

$$i = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}\right) u(t)$$

Se puede observar que este es un tipo de ecuación diferencial lineal no homogénea la cual se puede resolver con uno de los métodos vistos en el capítulo. Se verán algunos ejemplos para su mejor comprensión.

3.4. Las respuestas natural y forzada del circuito RL

Existe una muy buena razón matemática, para considerar que la respuesta completa se compone de dos partes, la respuesta forzada y la respuesta natural. La razón se basa en el hecho de que la solución de toda ***ecuación diferencial lineal*** no homogénea puede expresarse como la suma de dos partes como fue visto en el capítulo II. Pero en este caso se le llamaran: la solución complementaria (**respuesta natural**), y la solución particular (**respuesta forzada**). Viendo que se hizo un análisis profundo de las ecuaciones diferenciales. Ahora considérese una ecuación general del tipo

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q$$

Multiplicando todo por dt. Se obtiene

$$di + Pidt = Qdt \qquad (2)$$

Se puede identificar Q como una función de excitación y escribirla como Q(t) para recalcar su dependencia general del tiempo. P es una constante positiva, pero las observaciones que siguen sobre la solución de la ecuación (2) son igualmente válidas, para los casos en los que P es una función cualquiera del tiempo. El asunto se puede simplemente simplificar suponiendo que P es una constante positiva. Como también Más adelante se supondrá que Q es constante, restringiendo el análisis a las funciones de excitación de cd.

Si ambos lados de la ecuación (2) se multiplican por lo que se conoce como **factor de integración** $e^{\int Pdt}$ o e^{Pt}, ya que P es una constante. se obtiene

$$e^{Pt}di + iPe^{Pt}dt = Qe^{Pt}dt \qquad (3)$$

si se observa el lado izquierdo

$$d(ie^{Pt}) = e^{Pt}di + iPe^{Pt}dt$$

Sustituyendo esta expresión en (3) se obtiene

$$d(ie^{Pt}) = Qe^{Pt}dt$$

Ahora se puede integrar ambos lados para obtener

$$\int d(ie^{Pt}) = \int Qe^{Pt}dt \; + A$$

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt}dt \; + A$$

La solución para i(t) se obtendrá al multiplicar por el factor ie^{-Pt}

$$i = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt} \qquad (4)$$

Ya conocida la función de excitación Q(t), entonces solo falta evaluar la integral indicada para obtener la forma funcional exacta de i(t).

Primero debe observarse que, para un corto circuito sin fuentes, Q debe ser cero, y la solución es la respuesta natural

$$i_n = Ae^{-Pt}$$

La respuesta forzada de la ecuación 4

$$i_f = \frac{Q}{P}$$

La respuesta i(t) completa será

$$i(t) = i_n + i_f$$

$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt}$$

Ejemplo conceptual del circuito RL con excitación

Ahora se usará el circuito RL en serie para mostrar cómo se determina la respuesta completa sumando las respuestas natural y forzada. La respuesta deseada es la corriente i(t). fig. 3.5 a

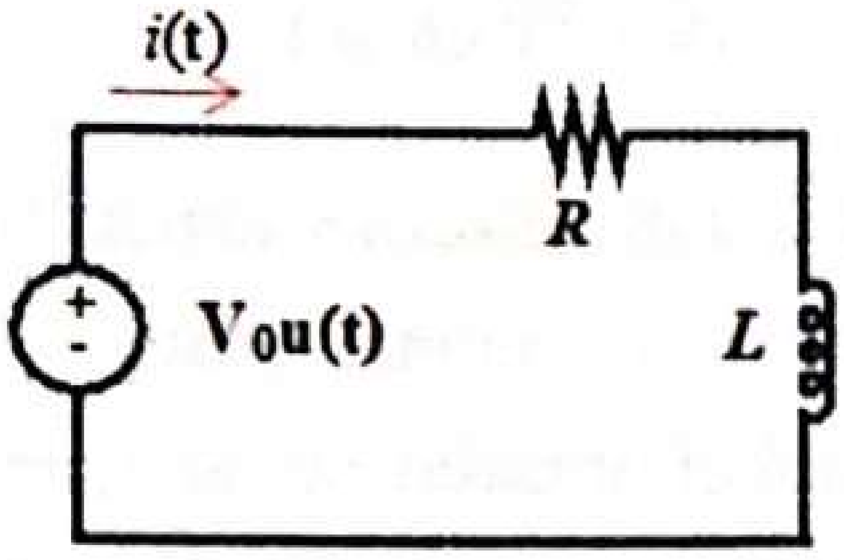


Fig. 3.5 a

1) Primero se expresa como la suma de la corriente forzada y la corriente natural,

$$i = i_n + i_f$$

2) Hay que tener en cuenta que la forma funcional de la respuesta natural debe ser la misma que la que se obtuvo sin fuentes, por lo tanto se remplaza la fuente de voltaje escalón por un cortocircuito, y se reconoce al viejo lazo RL en serie. Entonces se obtiene la expresión,

$$i_n = Ae^{\frac{-Rt}{L}}$$

Pero aún se tiene que determinarse la amplitud A.

A continuación se considera la respuesta forzada, es decir, la parte de la respuesta que depende de la naturaleza misma de la función de excitación. En este problema en particular, la respuesta forzada debe ser constante, ya que la fuente es un voltaje constante Vo, para todos los valores positivos del tiempo. Por lo tanto, después de que la respuesta natural ha desaparecido, no puede haber voltaje en el inductor; entonces aparece un voltaje Vo entre las terminales de R, y la respuesta forzada es simplemente

$$i_f = \frac{V_o}{R}$$

Obsérvese que la respuesta forzada está completamente determinada; no hay amplitud desconocida. A continuación se combinan las dos respuestas:

$$i = i_n + i_f$$

$$i = Ae^{\frac{-Rt}{L}} + \frac{V_o}{R}$$

Y se aplican las condiciones iniciales para evaluar A. La corriente vale cero antes de t = 0,y no puede cambiar instantáneamente, ya que se trata de una corriente que fluye en un inductor. Entonces, la corriente vale cero inmediatamente después de ſ = 0, y un circuito RL en serie que se usa para ilustrar el método para obtener la respuesta cumple como la suma de las respuestas natural y forzada.

$$i = \frac{V_o}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

Obsérvese cuidadosamente que A no es el valor inicial de i, ya que A = -Vo/R, mientras que i(0)=0. En otros casos, donde se tenían circuitos sin fuentes, A era ciertamente el valor inicial de la respuesta. Sin embargo, cuando se tienen funciones de excitación primero debe encontrarse el valor inicial de la respuesta y luego sustituirlo en la ecuación de la respuesta completa para encontrar A.

Ejemplo. Determine i(t) para cualquier valor del tiempo en el circuito de la fig.3.5 b

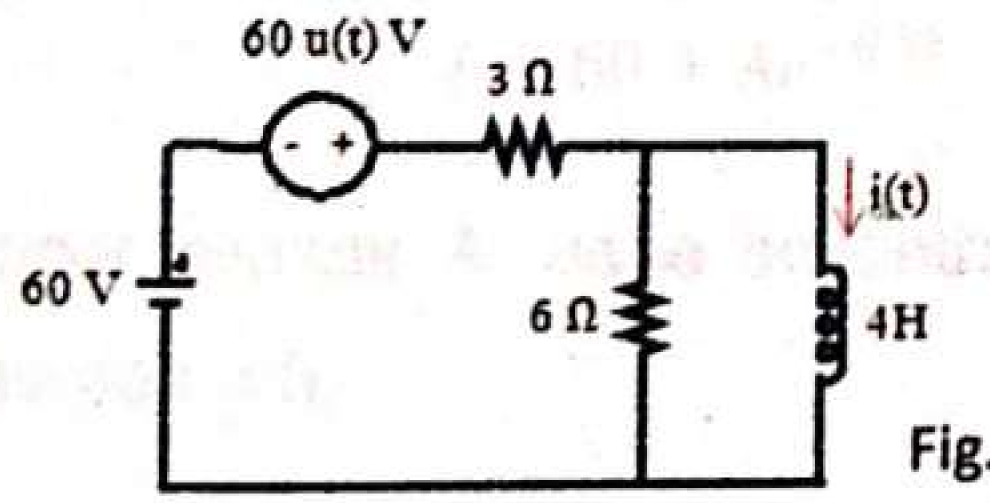


Fig. 3.5 b

Solución: El circuito contiene una fuente de voltaje de cd, así como una fuente de voltaje escalón. Sólo se reconocerá la forma de ese equivalente como un resistor en serie con alguna fuente de voltaje. El circuito contiene un solo elemento capaz de almacenar energía, el inductor. Primero se observa que:

$$R_{eq} = \frac{6 \times 3}{6+3} = \frac{18}{9} = 2\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{4}{2} = 2s$$

Y se recuerda que

$$i = i_n + i_f$$

Igual que antes, la respuesta natural es una exponencial negativa, es decir,

$$i_n = Ae^{-t/2}$$

La respuesta forzada es la producida por un voltaje constante de 100 V La
respuesta forzada es constante y en el inductor no hay ningún voltaje, porque se comporta como un cortocircuito y, por lo tanto,

$$i_f = \frac{120}{3} = 60$$

Entonces,

$$i = 60 + Ae^{-0.5t} \qquad t > 0$$

Para poder evaluar A, debe encontrarse el valor inicial de la corriente del antes de t = 0,

$$i = \frac{v_0}{R} = \frac{60}{3} = 20$$

Esta corriente vale 20 A y no puede cambiar instantáneamente Así,

$$i = 60 + Ae^{-0.5t}$$

Puesto que i = 20

20 = 60 + A o A = - 40

De ahí que

$$i = 60 - 40e^{-0.5t} \qquad t > 0$$

La solución se completa estableciendo también que

$$i = 20 \qquad t < 0$$

o escribiendo una expresión válida para todo t,

$$20 = 60 + 40e^{-0.5t}$$

$$\boxed{i = 40 + 40(1 - e^{-0.5t})\, u(t) \quad A}$$

3.5. Circuito RC serie con excitación

La forma general de este circuito bajo excitación de tensión se muestra en la fig. 3.6

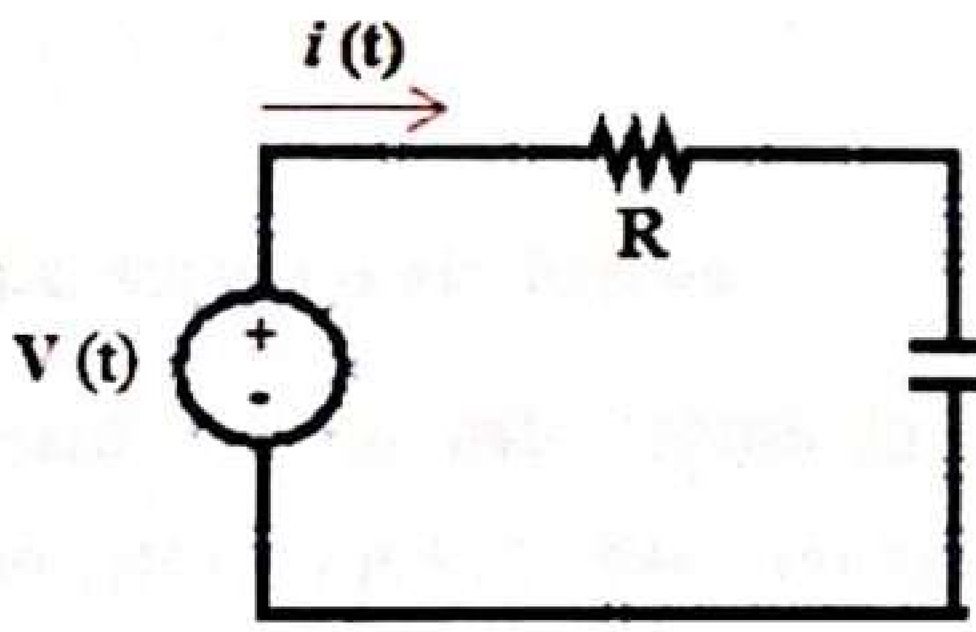


Fig. 3.6

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a éste, se tiene:

$$v(t) = v_R + v_C$$

Donde v_C , es la caída de tensión en el capacitar y $v_R = Ri$ es la caída de tensión en la resistencia. Por definición de corriente se sabe que:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

y de la definición de capacitancia:

$$c = \frac{dq}{dv}$$

llegando así a la siguiente expresión de la corriente

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

que reemplazada en la expresión de v_R da:

$$v_R = CR\frac{dV_c}{dt}$$

y en definitiva:

$$v(t) = CR\frac{dV_C}{dt} + v_C$$

La cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden y primer grado, no homogénea.

Todas las conclusiones obtenidas para el circuito RL son válidas para este circuito RC.

3.7. El circuito RLC en serie sin fuente

Ahora se determinará la respuesta natural de un modelo que representa un circuito formado por un resistor ideal, un inductor ideal y un capacitor ideal conectados en serie. El resistor ideal se puede representar un resistor físico conectado a un circuito LC o a un circuito RLC en serie.

El circulito RLC en serie es el dual del circuito RLC en paralelo, y este único hecho es suficiente para que su análisis se vuelva trivial. La fig. 3.6

a muestra el circuito en serie. La ecuación integrodiferencial fundamental es:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt - v_C(t_0) = 0 \quad (1)$$

Y la cual se compara con la ecuación análoga para el circuito RLC en paralelo, dibujado

fig. 3.6 a, el circuito RLC en serie que es el dual de la fig. 3.6 b. un circuito RLC en paralelo. Los valores de los elementos, por supuesto no son idénticos en los dos circuitos.

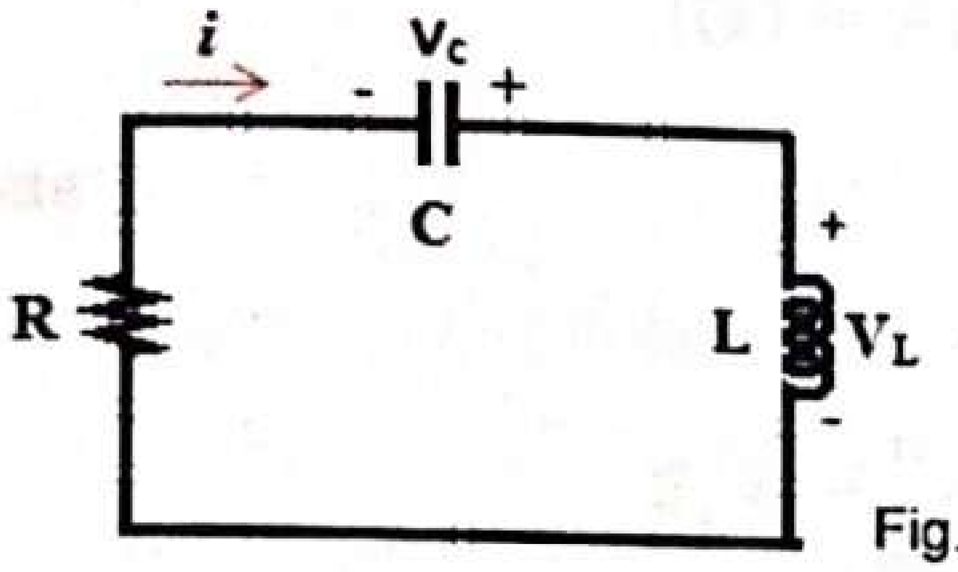


Fig. 3.6

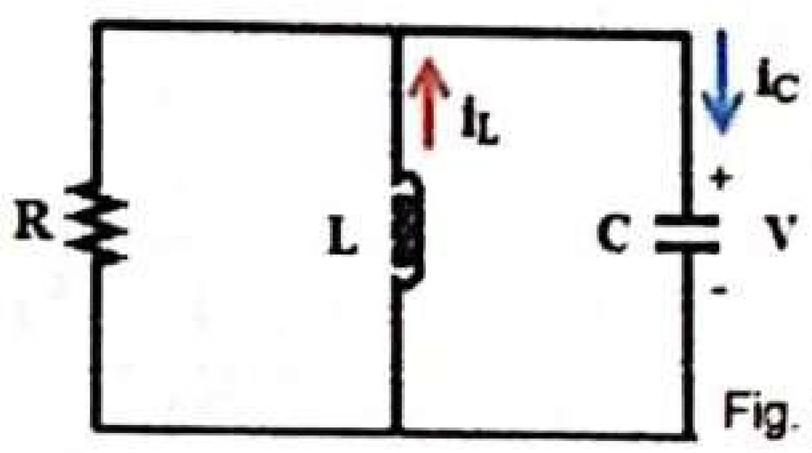


Fig. 3.5 b

También en la figura 3.6 b se puede determinar que,

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt - i_L(t_0) = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones de segundo orden obtenidas al derivar cada una de las anteriores Ec 1 y Ec 2, con respecto al tiempo, también son duales,

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \quad (3)$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \quad (4)$$

Es evidente que toda la información anterior sobre el circuito RLC en paralelo es directamente aplicable al circuito RLC en serie; las condiciones iniciales sobre el voltaje del capacitor y la corriente del inductor son equivalentes a las condiciones iniciales sobre la corriente del inductor y el voltaje del capacitar; la respuesta de voltaje se transforma en una respuesta de corriente. Es muy posible que, al releerse las cuatro secciones anteriores (incluyendo los ejercicios), usando el lenguaje dual, se obtenga una descripción completa del circuito RLC en serie. Sin embargo, este proceso podría producir cierta neurosis en cuanto se leen unos párrafos, y realmente no hay necesidad de llegar a eso. A continuación se presenta un breve resumen de la respuesta del circuito en serie.

En términos del circuito de la figura 3.6a, la respuesta sobreamortiguada es:

$$i(t) = A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t}$$

Donde:

$$Z_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$Z_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$Z_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta_0^2}$$

$$Z_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta_0^2}$$

Haciendo:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad y \quad \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La forma de la respuesta críticamente amortiguada es:

$$i(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

Y en el caso subamortiguado se puede escribir como:

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \beta_d t + B_2 \operatorname{sen} \beta_d t$$

Donde se considera a:

$$\beta_d = \sqrt{\beta_0^2 - \alpha^2}$$

Las comparaciones series paralelos para el parámetro α son:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad paralelo$$

$$\alpha = \frac{1}{2L} \quad serie$$

Ejemplo. Dado un circuito RLC en serie para la cual L = 1H, R = 6 $k\Omega$,$C = 40nF$, i(0) = 3 m A y $v_C(0)$ = 9V, encuentre a i(t).

Solución:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{6k\Omega}{2(1)} = 3000s^{-1} \qquad y \qquad \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1(40n)}} = 5000\ s^{-1}$$

$$\beta_d = \sqrt{(\beta_0)^2 - (\alpha)^2} = \sqrt{(5000)^2 - (3000)^2} = 4000$$

$$i(t) = \ e^{-3000t}(B_1 \cos 4\,000t + B_2 sen\, 4\,000\, t)$$

Al aplicar el valor inicial de i(0) = 3 m A la corriente se obtiene:

$$0.003 = e^{-3000t}(B_1 \cos 4\,000(0) + B_2 sen\, 4\,000\,(0))$$

$$0.003 = \ B_1$$

$$B_1 = 0.003$$

Y así que:

$$i(t) = \ e^{-3000t}(0.003 \cos 4\,000t + B_2 sen\, 4\,000\, t)$$

La condición inicial restante $V_C(0)$ = 9V puede aplicarse a la derivada; entonces

$$\frac{di}{dt} = e^{-1000}(-12sen\ 4{,}000t + 4\ 000B_2\ cos\ 4\ 000t - 9cos\ 4\ 000t$$
$$- 3000B_2sen\ 4{,}000)$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 4{,}000B_2 - 9$$

$$4{,}000B_2 - 9 = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L} B_2 = 0$$

$$4{,}000B_2 - 9 = \frac{9 - 6000(0.003)}{1} = -9$$

$$4{,}000B_2 - 9 = -9$$

$$B_2 = 0$$

La respuesta deseada es, por tanto,

$$\boxed{i(t) = 3e^{-3000t} \cos 4{,}000t \qquad mA}$$

CONCLUSIONES GENERALES

El aporte en el que se fundamenta esta investigación es en la identificación y aplicación de las de las ecuaciones diferenciales en la resolución de los circuitos eléctricos y así favorecer de una manera más eficaz una mejor comprensión del análisis de circuitos seleccionando la ecuación diferencial ideal según sea el problema planteado. En general:

- Se puede identificar con una mejor precisión el tipo de ecuación diferencial que se necesita para solucionar el tipo de circuito planteado.
- Las ecuaciones diferenciales se aplican con una mejor facilidad y se logra proporcionar una respuesta total al fenómeno que ocurren en un circuito eléctrico, con la cual con otros procesos matemáticos no es posible.
- Con la estrategia planteada es posible entender la aplicación y la magnífica ayuda que nos brindan las ecuaciones diferenciales para poder solucionar aquellos problemas que se hacen a veces tan difíciles de entender.
- Es posible comprender principalmente cuando se considera la distribución de energía eléctrica, a través de sus elementos del circuito; en condiciones de régimen transitorio y permanente, con o sin condiciones iniciales en sus elementos reactivos.
- La estrategia planteada aporta una serie de procesos sistemáticos con los cuales se busca motivar al estudiantado de las diferentes áreas de la ingeniería al estudio de las ecuaciones diferenciales.

Todas estas conclusiones ratifican la idea planteada al principio de esta investigación, y expresan así el cumplimiento del objetivo propuesto por el investigador.

RECOMENDACIONES

La estrategia que se planteó en esta tesis fue de carácter investigativo con la finalidad de comprobar la identificación y aplicación adecuada de las ecuaciones diferenciales en la resolución de circuitos eléctricos.

Recomendamos

- Aplicar la estrategia propuesta en esta investigación que le será de gran ayuda en la comprensión del análisis de circuito.
- Estudiar bien a fondo las ecuaciones diferenciales antes del estudio de los circuitos eléctricos ya que es fundamental un buen conocimiento de las mismas.
- Después de haber estudiado las ecuaciones diferenciales no esperar mucho tiempo para el estudio del análisis de circuito.
- Ampliar la investigación propuesta con el fin de perfeccionarla

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIA

1) Aidala, J. B., & L. Katz. (1980). *Transients in Electric Circuits.* Engewood Cliffs, NJ: Prentice Hall,

2) Angerbaur, G.J. (1989). *Principles of DC and AC Circuits*, 3a. ed. Albany, NY. Delman Publishers,.

3) Ayres, Frank Jr. (1996). Ecuaciones Diferenciales. Primera edición. McGraw-Hill. Serie Schaum.

4) Attia, J.O. (1999). *Electronics and Circuits Analysis Using MATLAB.* Boca Ratón, FL: CRC Press.

5) Balabanian, N. (1994). *Electric Circuits.* Nueva York: McGraw-Hill,.

6) Bartkowiak, R. A. (1985). *Electric Circuit Analysis.* Nueva York: Harper& Row.

7) Blackwell, W. A., & Grigsby, L. L. (1985). *Introductory Network Theory.* Boston, MA: PWS Engineering.

8) Blanchard, O. & Pérez, D. (2000). Macroeconomía. Buenos Aires, Argentina: Prentice-Hall.

9) Blanchard, P., Devaney, R., & Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales.* México.

10) Blanchard, P. (1999). Ecuaciones Diferenciales, México, Thomson.

11) Bell, E. T. (1985). Historia de las Matemáticas. (2da. ed.). Edic. Fondo de Cultura. Económica.

12) Bobrow, L. S. (1987). *Elementary Linear Circuit Analysis*, 2a. Ed. Nueva York: Holt, Rinehart & Winston.

13) Boctor, S. A. (1992). *Electric Circuit Analysis.* 2a. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

14) Boyce, W. E. & Diprima, R. C. (1987). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores a la frontera.*3ra. Edición 6ta. LIMUSA.

15) Boylestad, R. L. (2000). *Introduction to Circuit Analysis.* 10a. ed. Columbus, OH: Merrill.

16) Boylestad, R, L. (2011). Introducción al análisis de circuitos. 12 ed. Mexico, ptince Hall.

17) Budak, A. (1987). *Circuit Theory Fundamentals and Applications.* 2da.Ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

18) Braun, M. (1990). "Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones". Grupo Editorial Iberoamérica

19) Braun, M. (2004). Ecuaciones Diferenciales y sus aplicaciones, México.

20) Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socio-epistemológico). Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

21) Buendía, G. & García, C. (2002). Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales. Acta Latino - Americana de Matemática Educativa. 15(1), 108-113.

22) Carlson, B. A. (1999). *Circuit: Engineering Concepts and Analysis of Linear Electric Circuits.* Boston, MA: PWS Publishing.

23) Campbell, S. L. & Haberman, Richard. (1997).*Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera.* McGraw-Hill.

24) Campos, C. (2003). La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socio-epistemológica. En tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

25) Candela, A. (1999). Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso. México: Paidós.

26) Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada.

27) Carmona, I. (1992). *Ecuaciones Diferenciales.* Alhambra.

28) Carmona, I. (2010). Ecuaciones Diferenciales. Quinta Edición. México: Pearson.

29) Castejón, A. & Santamaría, G. (1993). Tecnología. Mc Graw – Hill.

30) Charles, K. A. & Matthew, N. O. S. (2006).Fundamentos De Circuitos Eléctricos. 3ra. Ed. México. McGraw-Hill/Interamericana.

31) Chen, W. K. (1995). *The Circuit and Filters Handbook.* Boca Raton, FL: CRC Press.

32) Chiang, A. (1999). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. Madrid. España.

33) Choudhury, D. R. (1988). *Networks and Systems.* Nueva York: John Wiley & Sons.

34) Ciletti, M. D. (1995). *Introduction to Circuit Analysis and Design,* Nueva York: Oxford Univ. Press.

35) Cogdeil, J. R. (1998). *Foundations of Electric Circuits.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

36) Cunningham, D. R. & Stuller. J. A. (1999). *Circuit Analysis.* 2a. ed. Nueva York: John Wiley & Sons.

37) Davis, A. (1986). *Circuit Analysis Exam File.* San Jose, CA: Engineering Press.

38) Davis, A. M. (1998). *Linear Electric Circuits Analysis.* Washington, DC: Thomson Publishing.

39) DeCarlo, R. A. & Lin. P. M. (2001). *Linear Circuit Analysis,* 2a. Ed. Nueva York: Oxford Univ. Press.

40) Del Toro, V. (1987). *Engineering Circuits.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

41) Derrick & Grossman. (2003). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.

42) Dorf, R. (1995). Circuitos Eléctricos: introducción al análisis y diseño. 2da edición. México: Alfa – omega.

43) Dorf, R. C., &. Svoboda, J. A. (1999). *Introduction to Electric Circuits.* 4ta. ed. Nueva York: John Wiley & Sons.

44) Dornbusch, R. y Fischer, S., (1991). *Macroeconomía.* España, Madrid.

45) Coddington E. & Levinson, A. N. (1955). "Theory of Ordinary Differential Equations". McGraw-Hill.

46) Edminister, J. *Schaum´ S.* (1996). *Outline of Electric Circuits.* 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill.

47) Edwards, C. & Penney, D. (2001). *Ecuaciones Diferenciales.* México. Prentice Hall.

48) Farlow, S. J. (1994) *An Introduction to Differential Equations and their applications.* McGraw-Hill. QA 372.F34.

49) Fernández, A., Sánchez, T, Moreno. J. & Ortega, A. (1994) Electrotecnia, fundamento teórico y practico. Madrid.

50) Fernández, C. (1992) "Ecuaciones Diferenciales". Vol.1

51) Floyd, T. L. (2002). *Principles of Electric Circuits.* 7a. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

52) Franco, S. (1995). *Electric Circuits Fundamentals*, Fort Worth, FL: Saunders College Publishing.

53) García, A. (1964). Tesis Profesional: Establecimiento de las condiciones que debe satisfacer una red de corriente alterna para que tenga solución única; ESIME, I.P.N. México. D.F.

54) Goody, R. W. (1998). *Microsim P Spice for Windows.* Vol.1, 2a. Ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

55) Gray, T, & Glynn, J. (1991). Exploring Mathematics with Mathematica. Addinson-Wesley Publishing, Libro introductorio al programa Matematica.

56) Guzmán, M. (1975). Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Alhambra.

57) Harrison, C. A. (1990). *Transform Methods in Circuits Analysis.* Philadelphia, PA: Saunders.

58) Harter, J. J., & Lin. P. Y. (1986). *Essentials of Electric Circuits.* 2a. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

59) Hayt, W. H., &. Kemmerly. J. E. (2001). *Engineering Circuit Analysis.* 6ta. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2001.

60) Hazen, M. E. (1990). *Fundamentals of DC and AC Circuits.* Philadelphia, PA: Saunders.

61) Herrera, J. (1983).Teoría de Circuitos, Edit. LIMUSA.

62) http://www. 2014 asifunciona.com .Septiembre,

63) Ince, E. L. (1927).Ordinary Differential Equations. Longmans, Green.

64) Irwin, J. D. (2001). *Basic Engineering Circuit Analysis*. 7a. ed. Nueva York: John Wiley & Sons.

65) Jackson, H. W. & White P. A. (1997). *Introduction to Electric Circuits*. 7ma. ed. Englewood Cliffs, NJ. Prentice Hall.

66) Johnson, D. E. (1997). *Electric Circuit Analysis*. 3a. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

67) Karni, S. (1988). *Applied Circuit Analysis*. Nueva York: John Wiley & Sons.

68) Kline, M. (1972). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. (Vol. I,II y III). Alianza.

69) Lawrence C. (2005). Evans. An introduction to stochastic differential of Mathematics. U. Berkley.

70) Madhu, S. 1988. *Linear Circuit Analysis*. 2a. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall,

71) Marcus, D. A. (1993). *Ecuaciones Diferenciales*. CECSA.

72) Murphy, G. (1960). Ordinary differential Equations and their Solutions. D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, Este es un manual de consulta en donde se reseñan muchos metodos para obtener soluciones explıcitas de ecuaciones diferenciales.

73) Mujal, R. (2002). Calculo de líneas y redes eléctricas. 1ra ed., ediciones UPC, Aula Politécnica.

74) Nagle, R., Kent, S., & Edward, B. (1993). *Fundamentals of Differential Equations, Third Ed.* Addison-Wesley Co. QA 371.N24.

75) Nápoles, J.E. (1999). El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Boletín de matemática nueva serie*. Volumen 5, pp. 53 – 79.

76) Nasar, S. A. (1988). *3000 Solved Problems in Electric Circuits*. (*Schaum's Outline*) Nueva York: McGraw-Hill.

77) Nilsson, J. W & Riedel, S. A. (2001). Circuitos eléctricos, México: Pearson.

78) Nilsson, J. W., & Riedel, S. A. (1996). *Electric Circuits*. 5ta. ed. Reading, MA: Addison-Wesley.

79) O'Malley, J. R. (1992). *Basic Circuit Analysis, (Schaum's Outline)* Nueva York: McGraw-Hill, 2a. Ed.

80) Parrett, R. (1991). *DC-AC Circuits: Concepts and Applications.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

81) Paul, C. R. (1989). *Analysis of Linear Circuits.* Nueva York: McGraw-Hill.

82) Poularikas, A. D., (1999). *The Transforms and Applications Handbook.* Boca Raton, FL: CRC Press, 2a. Ed.

83) Rainville, Earl (2006). Ecuaciones Diferenciales Elementales. México: Pearson.

84) Ridsdale, R. E. (1984). *Electric Circuits.* 2a. ed. Nueva York: McGraw-Hill.

85) Richard, B, (2008). Ecuaciones diferenciales, México, McGraw-Hill.

86) Romay, M. A. (2006). Ecuaciones Diferenciales aplicadas para la solución de circuitos Eléctricos en Corriente Continua *(C. C.). Revista tecnológica*, Año 4. Vol. 4 N° 8, 2do Trimestre 2006. La paz, Bolivia.

87) Sander, K. F. (1992). *Electric Circuit Analysis: Principles and Applications.* Reading, MA: Addison-Wesley.

88) Stevenson, W. (1992). Analisis de sistemas electricos de Potencia. 2da edición, Mac Graw – Hill.

89) Simmons, G.F. (1993). "Ecuaciones Diferenciales". McGraw-Hill.

90) Scott, D. (1987). *Introduction to Circuit Analysis: A Systems Approach.* Nueva York: McGraw-Hill.

91) Simmons, George F., & Robertson, J. S. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas, segunda edición.* Mc Graw Hill. México.

92) Simmons, GF. (2007). Ecuaciones diferenciales: teoría, técnica y práctica, México: McGraw-Hill.

93) Smith, K. C. &. Alley. R. E. (1992). *Electrical Circuits: An Introduction.* Nueva York: Cambridge Univ. Press.

94) Stanley, W. D. (1997). *Transform Circuit Analysis for Engineering and Technology*. 3ra. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

95) Thomas, R. E., & Rosa, A. J.(2000). *The Analysis and Design of Linear Circuits*, 3ra. Ed. Nueva York: John Wiley & Sons.

96) Velásquez, C. & Ramírez, J. L. (2012). Fundamentos de circuitos eléctricos. Mac – Graw Hill. México Edición Diciembre.

97) William E. Boyce (2006). Ecuaciones diferenciales y problemas. con valores en la frontera, México. Limusa Wiley.

98) Zill, D. (2006). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones, México. Thomson.

ANEXOS

Identidades trigonométricas

$$sen\,(-\varphi) = -sen\,\varphi, \quad \cos(-\varphi) = \cos\,\varphi$$

$$sen^2\varphi + cos^2\varphi = 1, \quad sec^2\varphi = 1 + tan^2\varphi, \quad csc^2\varphi = 1 + cot^2\varphi$$

$$sen\,2\varphi = 2sen\,\varphi\,cos\varphi, \quad \cos 2\varphi = cos^2\varphi - sen^2\varphi$$

$$cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \quad sen^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

Identidades de la suma y diferencia de dos ángulos

$$sen\,(A+B) = sen\,A\cos B + \cos A\ sen\,B$$

$$sen\,(A-B) = sen\,A\cos B - \cos A\ sen\,B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - sen\,A\,sen\,B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + sen\,A\,sen\,B$$

$$\tan(A+B) = \frac{tan\,A + tan\,B}{1-\tan A\tan B}, \quad \tan(A-B) = \frac{tan\,A - tan\,B}{1+\tan A\tan B}$$

$$sen\left(A-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \quad \cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right) = sen\,A$$

$$sen\left(A+\frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \quad \cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right) = -sen\,A$$

$$sen\,A\,sen\,B = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$sen\,A\cos B = \frac{1}{2}sen\,(A-B) + \frac{1}{2}sen\,(A+B)$$

$$sen\,A + sen\,B = 2\,sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$sen\,A - sen\,B = 2\ \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\ \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2\ \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Reglas de derivación

Suponga que u y v son funciones de x

constante	$\frac{d}{dx}(c) = 0$
suma	$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
diferencia	$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$
multiplicación por una constante	$\frac{d}{dx}(cu) = c\ \frac{du}{dx}$
producto	$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\ \frac{du}{dx}$
cociente	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\ \frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
potencia	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
regla de la cadena	$\frac{d}{dx}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = f'\big(g(x)\big)\ \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(sen\ x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -sen$$

$$\frac{d}{dx}(tan\ x) = sec^2x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(cot\ x) = -csc^2x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Funciones exponencial y logarítmica

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}(ln\, x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\, ln\, a}$$

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(sen^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(csc^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Formas basicas de integracion

1. $\int kdx = kx + c$

2. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lfloor x \rfloor + c$

4 $\int e^x\, dx = e^x + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \;\; (a > 0), a \neq 1$

6. $\int sen\, x\, dx = \cos x + C$

7. $\int \cos x\, dx = sen\, x + C$

8. $\int sec^2\, x\, dx = \tan x + C$

9. $\int csc^2\, x\, dx = -\cot x + C$

10. $\int \sec x \tan x \;\, dx = \sec x + C$

11. $\int \csc x \cot x \;\, dx = -\csc x + C$

12. $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$

13. $\int \cot x\, dx = \ln|\sec x| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = sen^{-1}\frac{x}{a} + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$