**Decanato de Posgrado**

**Trabajo final para optar por título de:**

**Maestría en Matemática Superior**

# Título:

# ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES INFINITAS Y SERIES DE POTENCIAS PARA ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA DE UNIBE


## Postulante:

**Graciela Esther Jiménez Billini**

**2018- 2244**

**Tutor:**

**Msc. Carlos R. Valdez C.**



**Santo Domingo, D. N.**

**República Dominicana**

**Agosto 2020**

# ÍNDICE

# AGRADECIMIENTOS

En este momento puntual de mi vida, la cual ha transcurridos entre afanes, fracasos, alegrías y victorias tengo mucho que agradecer.

Le doy gracias a mi **Señor Jesús** por su insistente amor y haberme revelado al Padre Misericordioso.

A mi hija **Nicole** por su amor y apoyo incondicional en todos los proyectos que he emprendido.

A mi nieto **Sebastián** que es mi alegría e inspiración.

A mis compañeros de maestría por su amistad y apoyo su en todo momento, muy especialmente a **Julio**, **Mónica**, **Alondra** y **Lixon**.

A todos mis maestros por su paciencia y dedicación

A UNAPEC y a nuestro asesor de tesis Carlos Valdez

A mis compañeros de UNIBE, muy especialmente a Pablo Smester y a Carlos Ogando,

A todos,
Muchas gracias.

# INTRODUCCIÓN

Los jóvenes de este nuevo milenio son los que hoy ocupan las aulas universitarias, nacidos en la era digital, con acceso a un sin número de informaciones a través del internet. Esta ha sido, probablemente la razón principal por la cual, los docentes han tenido que repensar su práctica docente y adaptarse al nuevo paradigma de la educación.

Las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería cuando se aborda el tema de las series infinitas, los criterios de convergencia y las series de potencias ha sido la razón de esta investigación.

El propósito de la autora y la pertinencia del estudio ha sido la de proponer estrategias didácticas para facilitar el proceso de enseñanza a los docentes que imparten este tema en **UNIBE.**

En el **primer capítulo** se plantea el problema de la investigación y se definen los objetivos. El **segundo capítulo** es el marco teórico donde aparecen los antecedentes de la investigación y los fundamentos teóricos, matemáticos y educativos, en los cuales se sustenta.

El **tercer capítulo** describe la metodología se utilizó y el enfoque del estudio. En el **cuarto capítulo** se analizan los datos tabulados y en el **quinto capítulo** se presenta la propuesta de la autora.

Finalmente se plantean las conclusiones y recomendaciones de lugar.

# CAPÍTULO I
# PLANTEMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 Planteamiento del Problema.

El Cálculo Diferencial es una asignatura importante en las carreras de Ingeniería. Es un eje transversal en estas carreras. Las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería concretamente en el estudio de los límites de funciones de variables reales y en los criterios de convergencia de las series infinitas, ha sido una constante preocupación de los docentes y de las instituciones educativas, ya que se ve reflejado en un bajo rendimiento en esta asignatura, siendo ésta una de las principales causas de la deserción en las carreras de Ingeniería.

En la práctica docente de **UNIBE,** algunos profesores han expresado su preocupación y dificultades al abordar el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas a los estudiantes de cálculo.

Una de las dificultades identificadas por los docentes es la debilidad en los conocimientos previos sobre: los límites de las funciones, las sumas parciales de una sucesión y sobre el concepto de infinito.

Dado que el proceso de comprensión en matemáticas es ante todo un proceso de abstracción, definido por Dreyfus (1991) como <<*un proceso de construcción de estructuras mentales a partir de estructuras matemáticas, es decir, a partir de propiedades y relaciones entre objetos matemáticos*>> (p. 37), es importante tomar en cuenta en nuestra práctica docente las debilidades referentes a los conocimientos previos.

En ese mismo orden de ideas Codes-González (2015) señalan que *"la investigación internacional ha identificado varias dificultades asociadas a diferentes conceptos ligados a las series infinitas, como el de sucesión, limite o infinito"*. Los estudiantes tienden a rechazar el paso al límite como una nueva operación matemática, y lo consideran solamente como una aproximación.

Por todo lo descrito anteriormente consideramos pertinente investigar sobre las estrategias didácticas que contribuyan a la enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias.

Por todo lo descrito anteriormente, nuestro problema de investigación se titula:

**“Estrategias didácticas para la enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y de las series potencias para estudiantes de primer año de ingeniería de UNIBE”.**

## 1.2 Formulación del Problema.

¿Qué estrategias didácticas se pueden utilizar para mejorar el proceso de enseñanza en los criterios de convergencia de las series infinitas y de las series de potencias?

## 1.3 Sistematización del Problema.

- ¿Qué factores afectan el proceso de la enseñanza en los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias?

- ¿Cuáles contenidos dificultan proceso de la enseñanza en los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias?
- ¿Cuál ha sido la experiencia de los docentes de UNIBE al impartir el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias?
- ¿Qué estrategias han implementado los docentes en UNIBE al impartir el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y series de potencias?

## 1.4 Objetivo General.

Proponer estrategias para la enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias.

## 1.5 Objetivos Específicos.

- ✓ Identificar los factores que afectan la enseñanza del tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y de las series de potencias.

- ✓ Investigar cuál ha sido la experiencia de los docentes de UNIBE al impartir el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias.

- ✓ Analizar las estrategias usadas por los docentes de UNIBE al impartir el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias.

## 1.6 Justificación.

**La investigación que me propongo a realizar es importante por las siguientes razones:**

- ✓ El estudio del cálculo en las ingenierías es la base que le da una estructura científica a estas carreras. El concepto de limite es el punto de partida para comprender el cálculo. El cálculo variacional es la “matemática de los cambios” (Larson 2016) y es una herramienta importante para los profesionales de las ingenierías. Áreas que necesitan además de la representación gráfica como instrumento de interpretar la variación, el dominio del concepto para la solución del problema planteado.

  En este orden de ideas podemos resumir que el objetivo principal del estudio del cálculo avanzado, donde se imparte el tema de las series de potencias, es proporcional al alumno los conocimientos fundamentales que serán utilizados en la interpretación, planteamiento y resolución de problemas específicos de su carrera.

- ✓ La convergencia de una serie infinita es un tema central para la comprensión de las series. Entender el concepto de que la “serie es la suma infinita de términos que puede converger en un número real”, requiere un nivel de abstracción para la construcción del conocimiento.

  Las series de potencias son muy usadas en el campo de la física y de la ingeniería, por ejemplo: en la relatividad, en la óptica, en la velocidad de las ondas del agua, en la construcción de carreteras, etc.

  Otro campo donde se aplican las series de potencias es en la aproximación de funciones mediante polinomios. Estas aproximaciones son muy usadas por los ingenieros de computación, que prefieren usar las polinomiales, ya que son las más las funciones mas sencillas.

  Codes – González (2017) reconocen en sus investigaciones las “dificultades que conlleva el aprendizaje de las series numéricas en uno de sus componentes que aparecen explícitamente en su definición como límite de una sucesión de sumas parciales: la sucesión de sumas parciales". A esto se le suma además las debilidades que arrastran los estudiantes en cuanto a los conocimientos previos sobre el concepto de límites de las funciones y sobre el concepto del infinito matemático, lo cual dificulta el proceso de enseñanza de los docentes.

Por lo descrito anteriormente, este trabajo de investigación pretende proporcionar estrategias para facilitar la enseñanza de los criterios de convergencias de las series infinitas y las series de potencias. Razón por la cual consideramos pertinente esta investigación.

- ✓ En el contexto del nuevo milenio la educación ha tenido que enfocarse en el paradigma tecnológico. El desarrollo exponencial que la ciencia y la técnica han tenido en estos últimos años exige que las instituciones de educación superior se mantengan al día con los nuevos enfoques en el proceso de formación de profesionales, de manera que sean capaces de salir con las competencias científicas-tecnológicas que el medio y el mercado necesita, y a la vez con una formación ética centrada en el desarrollo humano y en el compromiso social.

La UNIVERSIDAD como institución educativa, comprometida y responsable por el desarrollo sus alumnos y de la capacitación continua de sus docentes, se prepara para enfrentar los retos en los ámbitos científico-tecnológico y cultural. Es por esta razón que el proceso de enseñanza en el estudio del cálculo, muy especialmente en el tema de los criterios de convergencias de las series infinitas y las series de potencia, debe apoyarse en nuevas estrategias, con instrumentos y recursos acordes con los nuevos tiempos. nuevos objetos de aprendizaje, para facilitar su comprensión de manera que los estudiantes resuelvan problemas razonando lógicamente y no mecánicamente.

# CAPÍTULO II

# MARCO TEORICO Y CONTEXTUAL

# 2.1. Marco Teórico.

## 2.1.1. Antecedentes de la investigación.

Los trabajos de investigación que tienen similitud con nuestra línea de estudio y que nos han servido de base para nuestra investigación las hemos organizado cronológicamente. Estas investigaciones son:

- ✓ Villareal T, Margarita (2006) en su tesis investiga sobre ***"La importancia de las Estrategias de Enseñanza en el logro del Aprendizaje en Alumnos Universitarios".*** Es una investigación cualitativa (investigación-acción) y la técnica que utilizó para el acopio de datos fue la observación.

  En su investigación concluye:

  "El objetivo de las estrategias de enseñanza es estimular al alumno a gestionar su aprendizaje de manera autónoma y significativa los contenidos curriculares, es decir promueve que los alumnos establezcan relaciones significativas entre lo que ya saben y la nueva información" (Villareal, 2006, p. 108).

- ✓ La investigación de Astrid Morales (2009) ***"La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo"***, presenta los resultados de una investigación acerca de la resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento, en la cual muestra la importancia de que se tome en cuenta en el discurso matemático el aspecto funcional de la *Serie de Taylor*. Señala que en su investigación se puntualiza el papel de la predicción como práctica que va conformando la serie de Taylor, teniendo como ejes principales la situación creada por la predicción y el binomio graficación-modelación, en cuanto prácticas sociales. Plantea que la modelación genera conocimiento matemático que se construye relacionando los resultados obtenidos con los contenidos planteados a la luz de los trabajos de Newton. Para su comprobación se diseñó una situación ad hoc.

- ✓ La tesis doctoral de Code Valcarce (2009) ***"Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*"** analiza la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando, a partir de un paradigma de investigación de la teoría APOS (Action, Process, Object, Schema) desarrollada por Ed Dubrinsky y su grupo de investigación de RUMEC.

  Para analizar la comprensión de estos conceptos Myriam Code formula los siguientes objetivos:

a) Estudiar el desarrollo histórico del concepto de serie numérica y su convergencia.
b) Realizar una descomposición genética del concepto de convergencia de serie numérica.
c) Describir niveles de comprensión que permitan explicar cómo los estudiantes conocen la convergencia de series numéricas.

- ✓ La investigación (2014). ***El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo "folding back"*** desarrollado por Delgado Martin, Laura., Codes Valcarce, Myriam., Monterrubio Pérez, M. Consuelo., González Austidillo, M. Teresa, se enfoca en analizar y caracterizar el proceso que sigue un grupo de alumnos universitarios para construir una serie numérica y determinar su convergencia.

  Para lograr su objetivo analizan las tareas de un grupo de estudiantes en su ambiente habitual en el aula, siguiendo el modelo propuesto por Pirie y Kieren. En esta actividad los expertos pudieron describir su progresión a partir de distintos niveles de compresión y verificar la necesidad de volver atrás y realizar una vuelta a niveles inferiores de comprensión mediante el mecanismo "folding back".

- ✓ Rodríguez Meléndez, Oscar Alberto (2016) en su investigación ***"Serie estocástica de Taylor-Itô y métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas"***, presenta una revisión de la versión estocástica de la serie de Taylor-Itô y algunos de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. Concluye su investigación con una aplicación a un modelo de finanzas.

- ✓ Jiménez Y. (2018) en su investigación ***"Estrategias lúdicas para la enseñanza-aprendizaje de la matemática a nivel superior"***, sostiene que "el uso de juegos en la educación matemática es una estrategia que permite adquirir competencias y destrezas en el desarrollo del pensamiento lógico de una manera atractiva para el estudiante".

  El papel actual del docente en el contexto del nuevo milenio ha tenido que enfocarse en el paradigma tecnológico y entender que su papel en el aula es de guía o facilitador del conocimiento. Al docente en este nuevo paradigma le "recae la responsabilidad del diseño y planeación de estrategias partiendo de la observación, de los estilos de aprendizaje para cuantificar en un grupo heterogéneo la manera más eficaz de aplicar una estrategia, si funciona o se debe cambiar" (Rosales Almazán, 2018).

- ✓ Arnal (2019) en su tesis doctoral ***"Limite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza"*** se fundamenta en estos cuatro pilares: la fenomenología dada por Freudenthal, el Pensamiento Matemático Avanzado, los Sistemas de Representación y la Teoría APOS.

  Mediante un estudio teórico estudiaron tres fenómenos organizados por una definición del límite infinito de una sucesión: crecimiento intuitivo ilimitado, decrecimiento intuitivo ilimitado, considerando un enfoque intuitivo, e ida-vuelta en sucesiones de límite infinito, a partir de un enfoque formal.

  La fase experimental la dividieron en dos partes: el estudio de libros de texto y el análisis de grupos de discusión del profesorado en activo. Analizaron una muestra de 35 libros de textos en los cuales observaron los tres fenómenos de la investigación.

  Abordaron además los diferentes perfiles de los alumnos y alumnas del máster en formación del profesorado en matemáticas, con la creación de un protocolo de actuación aplicado a 27 estudiantes, y un análisis cualitativo de los comentarios surgidos durante en un grupo de discusión.

### 2.1.2. Fundamentos teóricos educativos.

Esta investigación está orientada a las estrategias didácticas de la enseñanza para el área de las matemáticas. Sin embrago para proponer estrategias que ayuden a la enseñanza de las matemáticas, en este caso, para la enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias, es importante esbozar las teorías cognitivas de aprendizajes para comprender como se construye el conocimiento, y así poder elaborar una buena propuesta.

(Guy Brousseau, 1999) en su artículo ***"Educación y Didácticas de las Matemática"*** explica su Teoría de Situaciones Didácticas que desarrolló en los años setenta y afirma que "la teoría de situaciones didácticas se presenta actualmente como un instrumento científico que tiende a unificar y a integrar los aportes de otras disciplinas y proporciona una mejor comprensión de las posibilidades de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas".
Las teorías cognitivas que seguimos en esta investigación son del enfoque constructivista de Piaget, Ausubel y la teoría de situaciones didácticas de Guy Brouseau.

#### 2.1.2.1. Teorías Constructivistas.

Las teorías constructivistas nacen de las investigaciones de Piaget, Vygotsky, Ausubel, de los psicólogos de la Gestalt, Bartlett y Bruner.

(Pimienta Prieto, 2005) Sostiene que *"no existe una sola teoría constructivista, sino que existen aproximaciones constructivistas en la educación, las matemáticas, en la psicología educativa y la antropología, al igual en la educación basada en las computadoras".*
(Carretero, 1993, p. 21) "*que el desarrollo de la persona tanto cognitivamente como en sus comportamientos sociales y afectivos, no depende únicamente del ambiente o de sus estructuras internas, sino de la combinación de ambos factores".*

**Piaget**, hombre de ciencias afirmaba que tanto el aprendizaje como el desarrollo psíquico son el resultado de un proceso de equilibración. Y sostenía que la construcción genética de los aprendizajes pasa por los siguientes procesos:

- ✓ Asimilación: es el proceso que se da al incorporar los nuevos conocimientos.

- ✓ Acomodación: es la parte donde se crean nuevas estructuras cognitivas mentales para acomodar los nuevos conocimientos. Identificó los cuatro factores que intervienen en el desarrollo de las estructuras cognitivas: maduración, experiencia física, interacción social y equilibrio. En esta etapa se produce el conflicto cognitivo que impulsa el desarrollo del niño (individuo).

**Ausubel**, en esta misma línea le da más importancia a la instrucción, ya que entiende que el aprendizaje debe construirse en la interacción que se produce al relacionar los conocimientos previos con la nueva información. Es decir que las estructuras cognitivas existentes cuando se incorporan a la nueva información generan un ***aprendizaje significativo.*** Ausubel resalta las bondades del aprendizaje significativo, dice que:

- Facilita la adquisición del conocimiento.
- Retención duradera de la información.
- Desarrollo del aprendizaje activo.

**Guy Brousseau** y la teoría de situaciones didácticas se detallan en el epígrafe 2.1.3.2.

#### 2.1.2.2. Enfoques de la educación.

Un enfoque en el mundo de la educación es la manera propia de pensar y desarrollar una práctica docente, amparada por la ideología que se vive en el contexto donde se desarrolla. Razón por la cual existen muchos modelos o enfoque pedagógicos y cada uno de ellos tiene una mística de como enseñar de acuerdo con las características y estilos de aprendizaje de la población.

También se conoce como paradigmas en la educación. Saturnino De La torre lo define (De La Torre, 1996) como *"estructura de racionalidad científica compartida por una comunidad de científicos o profesionales que proporciona el marco referencial para la elaboración de teorías, investigación, y solución de problemas, en una determinada área de conocimientos".*
En otro orden de ideas es importante señalar que las estrategias enfocadas en la enseñanza dependerán del enfoque o paradigma que se tenga de la educación. Entre los distintos enfoques tenemos:

**a) Conductista**.

En este enfoque el docente no toma en cuenta el proceso del desarrollo del aprendizaje, sino que se centra en el comportamiento del alumno.

La institución desarrolla los contenidos que se le van a entregar a los alumnos, y sujeta al docente a unos contenidos organizados y previamente diseñados a los cuales debe ceñir su práctica docente.

**b) Humanista**

Este enfoque fomenta la autonomía del alumno, a través de un ambiente positivo para el desarrollo del proceso de aprendizaje. El alumno es el centro y tiene un papel activo, en el cual gestiona su aprendizaje de manera participativa y en colaboración con los demás. El docente a su vez es una guía para el alumno que fomenta el dialogo, a través del cual se desarrolla el proceso de enseñanza- aprendizaje. La evaluación se centra en el proceso de desarrollo de la persona.

**c) Cognoscitivista**

En este enfoque la enseñanza se realiza a partir de los conocimientos previos del alumno. Se centra en las estrategias cognoscitivas y metacognitivas para organizar los conocimientos, y realizar tareas más complejas.

El docente es un facilitador y entrenador de conocimientos, interviene en distintas fases del proceso de aprendizaje. La evaluación se realiza a partir de las estrategias utilizadas en el proceso y se evalúa tanto los conocimientos como las competencias o habilidades del alumno.

**d) Heurístico**

Este enfoque se realiza en un ambiente lúdico con los medios didácticos adecuados. Se utilizan herramientas tecnológicas como juegos educativos, simuladores, juegos exploratorios, etc. El conocimiento se produce a partir de la experiencia y del descubrimiento, que gestiona el alumno. El docente acompaña, guía y promueve la autogestión, y evalúa los logros alcanzado y los conocimientos adquiridos.

**e) Por Competencias**

Es un modelo educativo que entiende que lo que se va a aprender en la institución educativa deber útil y necesario para ayudar a los alumnos a enfrentarse a las situaciones del mundo real.

La competencia se enfoca en la adquisición de conocimientos y la puesta en práctica de estos. Experiencia y práctica van de la mano en el proceso de educativo

Los pilares de este enfoque son el aprendizaje significativo y la funcionabilidad, que se logran trabajando conjuntamente sus destrezas, habilidades y fomentando sus valores y compromisos con la sociedad que los va a recibir.

El docente juega un papel de mediador del conocimiento. Diseña sus estrategias para orientar, promover al aprendizaje significativo y valorar los distintos puntos de vistas de sus alumnos. Además de facilitar situaciones y entornos reales con los que se van a encontrar en su vida profesional.

### 2.1.2.3. Didáctica General.

IAn Amos Comenuis (1592-1670) es considerado el padre de la pedagogía. Fue el que introdujo y definió la palabra didáctica en su obra ***Didáctica Magna***. Pasó a la historia predicando *"Enseñar todo a todos, totalmente"*, frase que lo catapultó en la historia de la pedagogía al relacionar la didáctica con el arte de enseñar.

Etimológicamente la palabra didáctica proviene del vocablo griego *"didaktikós"* está compuesto por una doble raíz *docere* que significa enseñar y *discere* aprender, es por tanto un proceso activo y participativo, ya que el que enseña (*docere*) a su vez aprende en este proceso de sus estudiantes y colegas, a mejorar sus estrategias de enseñanza. Por otro lado, el estudiante (*discere*) es capaz de aprovechar una enseñanza de calidad y aprender a aprender, y de prepararse para enfrentar los desafíos de un mundo en constante cambio.

(Medina R. y Mata F., 2009) definen la didáctica como *"la disciplina o tratado riguroso de estudio y fundamentación de la actividad de enseñanza en cuanto propicia el aprendizaje formativo de los estudiantes en los más diversos contextos".* En ese orden de ideas se puede decir que la didáctica como disciplina se centra en el análisis de las técnicas y métodos de enseñanza.

La didáctica especial abarca al estudio de la aplicación de los principios generales de la didáctica, en el campo de la enseñanza de cada disciplina. Está en relación estrecha con el nivel de enseñanza, y de cada disciplina en particular.

**2.1.2.4. Didáctica de las Matemáticas.**

La didáctica de la matemática ha pasado por un proceso de evolución desde pura metodología y procedimientos para resolver ejercicios mecánicamente, a desarrollase como una ciencia que considera los múltiples factores que intervienen en la construcción de conocimiento en matemática.

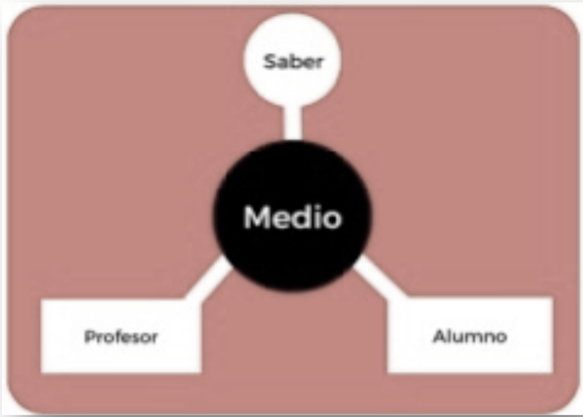
La didáctica de las matemáticas se ocupa de todos aquellos elementos y aspectos que forman parte de proceso de enseñanza-aprendizaje, esto es en cuanto a metodologías, teorías de aprendizaje, recursos, etc., para facilitar a los docentes las herramientas necesarias para impartir sus clases de manera proactiva, pertinente y creativa de acorde con las exigencias del mundo actual.

En la actualidad se concibe la Didáctica de las Matemáticas como ciencia, en la que se considera los distintos aportes en sus diferentes etapas de evolución. (Vidal C. Roberto, 2009) afirma que *"para investigar en Didáctica de las Matemáticas, es necesario contar con un equipo multidisciplinar en el que existan personas de solida formación matemática".* Los didactas de la matemática permiten la conexión entre los matemáticos profesionales y los educadores matemáticos.

A Guy Brusseau le debemos este gran aporte, es considerado el padre de la didáctica de las matemáticas por su **"Teoría de Situaciones Didácticas"** que desarrolló en los años setenta. Formula su teoría en el paradigma del constructivismo de Piaget y toma elementos de Ausubel (el aprendizaje significativo) y de Vitgosky (aprendizaje colaborativo).

La Teoría de Situaciones Didácticas es un modelo de interacción entre el sujeto y un medio del que requiere conocimientos previos (Brousseau Guy, 1999). La situación didáctica la construye el docente intencionalmente.

El medio es el conjunto de interacciones que se produce entre el sujeto, el profesor y el saber. Describe la situación didáctica en cuatro fases.




**Situación Didáctica.**

- Situación de acción: el sujeto actúa en el medio que el docente prepara intencionalmente tomando en cuenta sus conocimientos o esquemas previos. En esta situación el sujeto recibe información del medio en el cual acciona y se retroalimenta de él.
- Situación de formulación: el sujeto construye conocimientos a partir de las observaciones realizadas por terceros para luego comunicarlas. Formula un mensaje, lo comunica y lo comparte con los terceros (compañeros).
- Situación de validación: en esta fase el sujeto tratará de justificar lo que realizó, comprobando lo que hizo o lo que hicieron los demás (terceros). Justifica por si mismo las estrategias que utilizó, si es o no la adecuada.
- Situación de institucionalización: es esta etapa final se definen las relaciones entre la producción del alumno con el saber cultural. Es decir, se institucionaliza el concepto matemático.

**Situación a-didáctica.**

La situación a-didáctica está dentro de la situación didáctica, se da cuando el alumno hace suya la situación, mientras que el docente toma distancia permitiéndole al alumno o alumnos que se apropien de la situación. El docente establece las reglas mediante un contrato didáctico y, por otro lado, el alumno debe saber que el problema planteado está a su alcance con los esquemas o conocimientos previos que posee.

Las fases de acción y formulación son situaciones a-didácticas que están dentro de la situación didáctica construidas intencionalmente por el docente. En la fase de validación el docente orienta y pregunta sobre lo realizado, y en la etapa de institucionalización el docente interviene y le da estatus al saber adquirido.

En la Teoría de Situaciones Didácticas se valora más el proceso de resolución que el resultado del problema. El alumno aprende de su error y del error de los terceros.

### 2.1.2.5. Estrategias didácticas de la enseñanza.

Las estrategias de enseñanza se pueden definir como el conjunto de actividades de enseñanza que se planifican de acuerdo con las necesidades que se presenten en el aula.

(Moreno,1998) define las estrategias de enseñanza como *"los procesos de toma de decisiones en los cuales el estudiante elige y recupera los conocimientos que necesita para complementar una determinada demanda u objetivo"*.

La enseñanza es una actividad social, comunicativa en donde se estimula y activa el aprendizaje significativo en los distintos ambientes (aula, aula virtual, fuera del aula) del contexto cultural del nuevo milenio, ya sea de manera sincrónica o asincrónica.

En los nuevos entornos de enseñanza las teorías de enseñanzas- aprendizajes han sido cuestionadas sobre su pertenencia y efectividad en la educación de la generación de este nuevo milenio. Reflexionar sobre la incorporación de las nuevas tecnologías al mundo educativo ya es una realidad.

*"La innovación digital de las universidades plantea el reto a sus responsables de reconvertir a estas organizaciones, caracterizadas por un modelo formativo basado en la presencialidad, por otro más flexible o mixto en el que coexisten la actividad presencial y en línea (a distancia). De hecho, cabe hablar de un cambio de paradigma*

*en la concepción de la formación universitaria, que se reorienta hacia nuevos enfoques, buscando una enseñanza más sostenible"*. (De Pablos, J.M. y Colás, MP y otros autores 2019).

Dentro del conjunto de las estrategias didácticas para la enseñanza citamos las siguientes: aprendizaje autónomo, aprendizaje basado en problemas, aprendizaje colaborativo, clase invertida, clase magistral, exposición, gamificación, informe de lectura, lluvia de ideas, mapas mentales, métodos de proyectos, trabajo de casos, trabajo colaborativo, trabajo en equipo, etc.

### 2.1.3. Fundamentos teóricos matemáticos.

#### 2.1.3.1. Límite, convergencia e infinito.

El concepto de limite y el concepto de convergencia están íntimamente relacionados. Cuando hablamos de convergencia de una serie infinita, estamos hablando de límites, es decir que esa suma infinita de términos converge en un número real. Ambos conceptos relacionan dos contrarios que desde la antigua Grecia se ha debatido esa controversia: infinito y finitud.

El concepto del infinito ha sido un tema controversial desde tiempos inmemorables. Las dudas existenciales cuestionaron a los pensadores griegos, quienes se preguntaban si el espacio o el tiempo serian finitos o infinitos.

El aspecto religioso y filosófico no se puede separar de la evolución del concepto de infinito en la cultura griega. Aquí abordaremos el infinito matemático, pero unas pinceladas sobre su historia y evolución en la cultura griega parece necesario.

#### 2.1.3.2. El concepto de infinito y su evolución.

Anaximandro fue el primero que planteo (s, VI a. c) el problema del infinito. Consideraba que todas las cosas estaban hechas de la primera sustancia, que es el *ápeiron*, el cual lo concibió como algo infinito, ilimitado y eterno. El infinito en Anaximandro es inabarcable, es el Todo y no existe nada fuera de él.

Zenón De Elea (s V a.c) desarrolló cuatro paradojas acerca del infinito y lo infinitesimal razón por la cual es considerado como un precursor de la matemática. La paradoja más conocida es la de Aquiles y la tortuga. En esta paradoja Zenón consideraba que el espacio y el tiempo eran infinitamente divisibles. Don mil años después el surgimiento de la teoría de las series infinitas contradice las afirmaciones de Zenón.

Aristóteles con el fin de resolver las paradojas de Zenón, de las que derivan la noción de lo continuo, planteó dos concepciones del infinito: el infinito potencial y el infinito actual. El infinito actual era el absoluto, inalcanzable para todo mortal. Consideraba que el continuo estaba formado por indivisibles, contradiciendo la postura de Zenón.

Se distinguen tres etapas en el desarrollo del concepto del infinito:

- El infinito actual y el infinito potencial de Aristóteles
- La aceptación del infinito actual como un proceso mental que va mucho más allá de lo podemos imaginar y experimentar.
- Los transfinitos de Cantor quien formaliza y distingue dos tipos de infinitos: el infinito alcanzable correspondiente al infinito actual y el infinito inalcanzable que es el infinito potencial" (Dubinsky, E., Weller, K., 2005 b)

#### 2.1.3.3. Desarrollo de las series infinitas

Codes Valcarce (2009) "utiliza la historia de la matemática para identificar puntos clave en el desarrollo del concepto de convergencia de serie numérica".

En ese orden de ideas desarrollamos brevemente estas cinco etapas:

- ✓ **La etapa griega.**

  En esta etapa el manejo de las series se desarrolla en un contexto geométrico, básicamente sobre trabajo de cuadraduras. Los primeros vestigios sobre las sumas infinitas aparecen en las paradojas de Zenón y en los trabajos de Arquímedes. La paradoja de la Dicotomía de Zenón aparece la progresión geométrica de la razón $\frac{1}{2}$, en la que pretende demostrar que el inicio del movimiento es imposible, ya que antes de que una persona recorra una distancia dada, debe recorrer primero la mitad de esa distancia, y la mitad de la mitad de esa distancia y así sucesivamente, por lo que nunca se llegaría a la meta.

  En "Elementos de la historia de las matemáticas" Bourbaki (1976) dice "Arquímedes es considerado el padre del cálculo infinitesimal por su trabajo sobre la *Cuadratura de la parábola*", donde demuestra que el área bajo el arco de la parábola es cuatro tercios el área de un triángulo inscrito con la misma base y la altura en esa región. Para probarlo Arquímedes, por la reducción al absurdo, sostiene que esa área no puede ser menor que el área del triángulo inscrito y por el método de exahusción o agotamiento calcula dicha área. En estos cálculos se vislumbra las primeras integraciones en la historia de las matemáticas.

- ✓ **La etapa medieval.**

En este período se produce un avance sobre las concepciones del infinito y el movimiento, al aceptar los procesos infinitos.

Se destacan en esta etapa Leonardo de Pisa con su obra Fibonacic, Ricahrd Swineshead con su obra Calculator y Nicolás Oresme con sus obras *De proportionibus proportionum, Quaestiones super geomtriam Euclidis y algoritmus proportiomum* Este último realizó estudios de las series matemáticas infinitas y el uso de números fraccionarios como bases y exponentes.

Boyer (1974) sostiene que *"Os matemáticos do Ocidente durante o século quatorze tinham imaginação e precisão de pensamento porém faltava-lhes técnica algébrica e geométrica, por isso suas contribuições não foram no sentido de estender a obra clássica mas no de sugerir novos pontos de vista, entre quais um interesse por séries infinitas, um tópico essencialmente novo"* (p. 194).

Es decir que los matemáticos de occidente no se limitaron a repetir los aportes de los clásicos matemáticos, sino que hubo originalidad, sin embargo, les faltaba técnica en álgebra y en geométrica, y su gran novedad fue el nuevo punto de vista de las series infinitas y la superación del *"horror al infinito"* que arrastraban desde las concepciones de la antigua Grecia.

- ✓ **Etapa de desarrollo.**

Los matemáticos del siglo XVII heredan las técnicas infinitesimales que se desarrollaron en el siglo XVI, paso previo al nacimiento del cálculo infinitesimal.

Se le atribuye a **Newton y a Leibniz** la creación del cálculo infinitesimal porque fueron ellos los que plantearon el problema de la tangente y su relación con el cálculo de áreas. Los aportes de estos *gigantes* de las matemáticas conducen a un nuevo concepto de series infinitas, las cuales además de ser una herramienta para hacer cálculos aproximados, es una forma de representar una función. A pesar de estos grandes avances, no se llegó demostrar la convergencia de las series, situación de la que era consciente Newton, quien intuía que las series de potencias que el introdujo al argot matemático, eran convergentes para valores muy pequeños de las variables.

(Bourbaki, 1976) nos dice que *"Mercator abre perspectivas nuevas sobre las aplicaciones de las series, y fundamentalmente de las series de potencias, a los problemas denominados <<imposible>>…Newton a partir 1665, Gregory en 1668, y Leibniz a partir más o menos de 1673, se consagran fundamentalmente al tema de moda, las series de potencias"* (p. 253).

**Newton** intuyó que, así como se operaba con expresiones polinómicas, también era posible operar con series infinitas. Sin embargo, no se ocupó de publicar su teorema que hoy conocemos como el binomio de Newton. Fue John Wallis quien lo publicó en 1685 en su Algebra, atribuyéndole a Newton este gran aporte a las matemáticas.

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{1} a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n}$$

$$\boldsymbol{(a+b)^n \sum_{k=0}^{n-k} \binom{n}{n} a^{k-n} b^n}$$

Otros personajes destacados en esta etapa de desarrollo fueron: François Viète, quien desarrolló la fórmula de la progresión geométrica; Gregorio de Saint Vincent, quien sumo la serie geométrica; Bonaventura Cavalieri celebre por su teoría de los indivisibles; James Gregory se conoce por la serie que lleva su nombre, la serie del arco tangente, y utilizó por primera vez la palabra convergencia.

- ✓ **Etapa del rigor matemático y formalización de las series.**

La formalización de los conceptos de límites, derivadas, integrales y series de potencias empezó en la primera etapa del siglo XVIII hasta mediados del siglo XIX. Los matemáticos estaban conscientes de la necesidad de la prueba y del rigor en los procesos. El siglo XVIII fue donde se comenzó a aplicar el rigor matemático.

La integral no solo se manejaba como el área de bajo una curva o como el límite de una suma, sino que se empezó calcular como el proceso inverso de la derivada (antiderivada), y se recurría a las series para aproximar resultados cuando no eran posibles con el Teorema Fundamental del Cálculo.

Cauchy dio un paso importante en el concepto de integral al reformularla como el límite de una suma, y Reimann la definió tal como aparece hoy en los textos.

$$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i)\Delta x}$$

Se manejaban las series de potencias convergentes sin estudiar su convergencia. No estaba claro cuales criterios debían verificarse para que una función se pudiera desarrollar como serie. Por otro lado, la divergencia de algunas series fue un tema controversial ya que muchos matemáticos dudaban de los resultados obtenidos con estas series. Cauchy y Abel llegaron al extremo de censurar el uso de las series divergentes.

Otros personajes importantes fueron:

**Brook Taylor** trabajó en las aproximaciones polinómicas de funciones trascendentes y su trabajo publicado en 1715 fue una de las primeras obras completas sobre el tema.

**Colin Maclaurin** quien en su obra "Treatice of fluxions" dio la forma geométrica al criterio de la integral para la suma de una serie.

**Euler** diferenció las funciones en algebraicas y trascendentes, y planteó que las trascendentes vienen dadas por series infinitas que se pueden expresar combinando un numero infinito de veces de expresiones algebraicas. Muestra de ello es el número $e$, conocido como el número de Euler.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

(Klime, 1992) La falta de rigor de los trabajos de Euler para justificar el uso de las series divergentes *"no hicieron lógico el trabajo del siglo"* (p. 432).

**Gauss** fue el primero en publicar un trabajo riguroso sobre la convergencia de la serie en su artículo Disquisitions Generales Circa Seriem Infinitam, en el cual estudió las series hipergeométricas y donde se rectificó su definición de serie convergente, utilizando el criterio del cociente. Se centró a estudiar series convergentes concretas, por lo que no concluyó una teoría general de convergencia.

## 2.2. Marco Conceptual.

Este epígrafe tiene como principal objetivo conceptualizar algunos términos matemáticos que son de suma importancia manejar para abordar los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias, estos términos se definen a continuación:

**Sucesión infinita.**

(Stewart, 2012, p. 690):

"Una sucesión es una lista infinita de números escritos en un determinado orden, donde $a_1$ es el primer término, $a_2$ es el segundo término y $a_n$ es el n-ésimo término".

Por consiguiente, una sucesión es una función $f(n)$ cuyo dominio son los enteros positivos $[0, \infty)$, donde $a_{n+1}$ es su sucesor y $n$ es un número entero positivo.

Su notación $\{a_n\}$ $o$ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

**Sucesión convergente.**

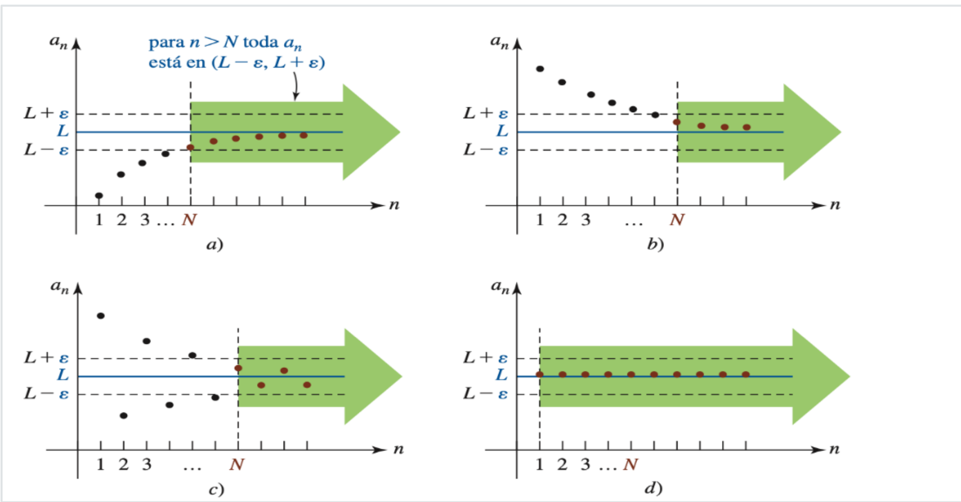
Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiene limite L

$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = L}$ **o** $\boldsymbol{a_n \to L}$ **cuando** $\boldsymbol{n \to \infty}$

Si el límite es un número real $\mathbb{R}$, es decir que existe, entonces se dice que la sucesión es convergente, si no existe entonces es divergente.

La sucesión $\{a_n\}$ converge en un limite L

Si para $\mathcal{E} > 0$ existe un hay un entero N tal que $n > N$ entonces $|a_n - L| < \mathcal{E}$




***Fuente: Dennis G. Zill y Wright W., 2011***

**Sucesión divergente.**

Si $lim\, a_n\; n \to \infty$ no existe se dice que la sucesión es divergente.

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \infty$$

**Límite de una sucesión.**

Sea L un número real y *f* una función de variable real tal que

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{f(x) = L}$$

Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que se verifica que $f(n) = L$ para cada entero positivo *n*, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

**Ejemplo:** sea $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ Cuyo $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ entonces el $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

**<u>Propiedades de los límites de sucesiones.</u>**

Son muy parecidas a las propiedades de las funciones de variable real.

Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = K$ y *c* es cualquier escalar, entonces:

**1)** $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L \pm K$

**2)** $\lim_{n\to\infty} ca_n = cL$

**3)** $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = LK$

**4)** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{K},\;\; b_n \neq 0\;\; y\, K \neq 0$

**<u>Dos Teoremas importantes.</u>**

**a)** **Teorema 1:** Del emparedado para sucesiones:

Si el $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$ y si existe un numero entero N tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo $n > N$ entonces el $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

**b)** **Teorema 2**: Del valor absoluto:

Para la sucesión $\{a_n\}$, si el $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \; entoces \; el \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

**Sucesión monótona.**

- Una sucesión $\{a_n\}$ es creciente si $\{a_n\}$ si $a_n < a_{n+1}$ para todo entero positivo *n* mayor que uno.
- Una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente si el término anterior es mayor que el término posterior, es decir $a_n > a_{n+1}$ para todo entero positivo *n* mayor que uno.
- Entonces, si sucesión crece es monótona y si la sucesión decrece también es monótona.
- Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada por arriba cuando existe un número real *M* tal que $a_n \leq M$para todo *n*. El número M recibe el nombre de cota superior de la sucesión.
- Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada por debajo para todo número real *N* que sea menor que la sucesión ($N \leq a_n$) para todo *n*. El número *N* recibe el nombre de cota inferior de la sucesión.
- Una $\{a_n\}$ está acotada cuando está limitada por arriba y por abajo.

**Teorema 4:** Si una sucesión $\{a_n\}$ es acotada y monótona, entonces converge.

**Series infinitas.**

La suma de los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se denomina serie infinita.

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ y se representa por el símbolo sigma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n} \ \boldsymbol{o\ simplemente} \sum \boldsymbol{a_n}$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ entonces $S_n$ $es\ la\ n - \acute{e}sima\ suma\ parcial$, es decir que se detiene en el numero entero positivo que representa $n$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y su límite existe como un número real, es decir $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in R$, entonces la serie $\sum a_n$ se dice que es convergente y se escribe

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad \rightarrow \quad entonces \ \ S$ es la suma de la serie.

Si por el contrario la sucesión $\{s_n\}$ es divergente, entonces la serie es divergente.

**Serie telescópica.**

Una serie telescópica es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$

Un ejemplo de serie telescópica es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ cuya sucesión $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, la cual descomponemos en sus fracciones parciales $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ para realizar su suma parcial $S_n = b_n - b_{n+1}$ donde $b_n = \frac{1}{n}$ $y$ $b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Observamos que los términos se van cancelando sucesivamente y su suma parcial se reduce a:

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

La serie telescópica es convergente si y sólo si su sucesión $b_n$ es convergente, cuando $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. Si la serie telescópica es convergente entonces su suma es:

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

**Serie geométrica.**

Una serie geométrica es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$

donde *r* es la razón, es decir el cociente entre el término posterior y el término anterior, y *a* es el primer termino. La serie es convergente si la razón es menor que uno ($|r| < 1$ ) y si la razón es menor que uno ( $|r| \geq 1$), la serie diverge.

Suma es: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

**La serie p.**

Es la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si p> 1 y diverge si $0 < p \leq 1$

**La serie armónica.**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ =1+$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ es una serie divergente por ser una serie p, en donde p=1

**Criterios de convergencia.**

✓ **Prueba de la divergencia.**

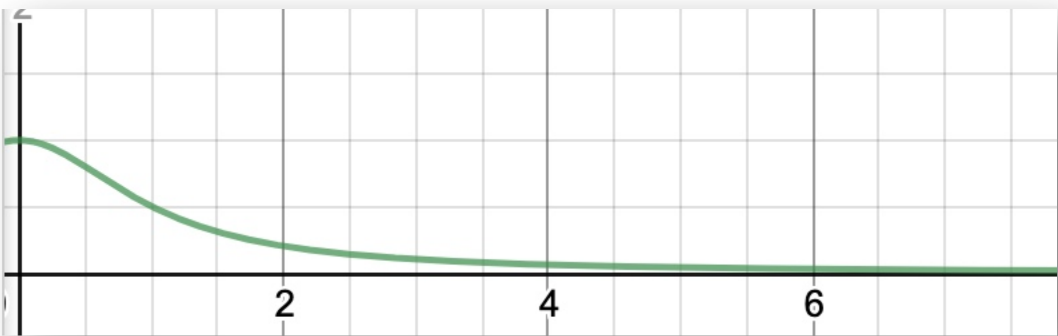
**Teorema 5:** Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

La prueba de la divergencia nos dice que si el límite de *n-ésimo término* de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es cero, la serie ***podría ser convergente*** y si el limite de la serie es diferente de cero la serie ***es divergente.***

Esta prueba no es concluyente, porque los *términos n-ésimo* de algunas series, como es el caso de la serie armónica, sus limites son cero y sin embargo son divergentes. Razón por la cual no se puede concluir que siempre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ la serie es convergente, pero si podemos afirmar que si el $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie es divergente.

✓ **Prueba de la integral.**

Este criterio se aplica cuando el término la sucesión $a_n$ es una función positiva, decreciente y continua.



La función tiene que ser continua, decreciente y positiva en un intervalo **[*a*, ∞)**, donde ***a*** es un entero positivo, ya que el dominio de las series son los enteros positivos, es decir que la integral tiene como limite inferior un entero positivo que en la mayoría de los casos es 1, por consiguiente:
si la serie $\sum_{i=1}^{n} a_n$ es convergente si y sólo la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente, si la integral es divergente la serie es divergente

**a)** Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente, la serie $\sum_{i=1}^{n} a_n$ es convergente.

**b)** Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es divergente, la serie$\sum_{i=1}^{n} a_n$ es divergente.

- ✓ **Prueba por comparación.**

Esta prueba se aplica en las series con términos positivos, y tiene dos partes.
Sea $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series con términos positivos:

**a)** Si tenemos una serie $\sum a_n$ cuyos términos son menores a una serie $\sum b_n$ convergente conocida ($\sum b_n$ es la serie con la cual la vamos a comparar), entonces la serie $\sum a_n$ también es convergente.

**Si $\sum \boldsymbol{b_n}$ es convergente y $\sum \boldsymbol{a_n} \leq \sum \boldsymbol{b_n}$ para toda n, entonces $\sum \boldsymbol{a_n}$también es convergente**

**b)** Si tenemos una serie $\sum a_n$ cuyos términos son mayores a una serie $\sum b_n$ divergente conocida ($\sum b_n$es la serie con la cual la vamos a comparar), entonces la serie $\sum a_n$ también es divergente.

**Si $\sum \boldsymbol{b_n}$ es divergente y $\sum \boldsymbol{a_n} \geq \sum \boldsymbol{b_n}$ para toda n, entonces $\sum \boldsymbol{a_n}$ también es divergente**

**c)** Cuando no se cumplan las condiciones anteriores, es decir, cuando los términos de la sucesión dada $\sum \boldsymbol{a_n}$ sean mayores que los de términos de la serie convergente conocida $\sum \boldsymbol{b_n}$ o cuando los términos de la sucesión dada $\sum \boldsymbol{a_n}$ **sean** menores que los términos de la serie divergente conocida $\sum \boldsymbol{b_n}$, recurrimos a la **Prueba por comparación del límite,** es decir

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde $c$ es un numero finito mayor que cero $(c > 0)$, entonces ambas series convergen o divergen.

- ✓ **Prueba de las series alternante.**

Una serie alternante es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$

Si la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots\, donde\ a_n > 0$ y se cumple las siguientes condiciones:

**a)** $a_{n+1} \leq a_n$ es decir que es decreciente para toda n.

**b)** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ converge.

**Convergencia absoluta**.

(Stewart 2012, p. 732):
"Cuando una serie es convergente en sus valores absolutos$\sum|a_n|$, se dice que es **absolutamente convergente**, por tanto $\sum a_n$ es convergente".

Por ejemplo, la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$ es absolutamente convergente ya que:

$$\boldsymbol{\sum_1^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \quad \textbf{es una serie p convergente} \qquad \mathbf{(p = 2 > 1)}$$

Si no es absolutamente se dice que es **condicionalmente convergente**.

$\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ es una serie alternante convergente.

$$a_{n+1} \leq a_n \ y \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ es divergente por ser la serie armónica.

**Teorema 6:** Si una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

**Las pruebas de la razón y la raíz.**

**a)** Prueba de la razón.

(Stewart 2012, 734):

- ✓ "Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L\ < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente (por tanto, convergente).
- ✓ Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L\ > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.
- ✓ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ el criterio no aplica".

**b)** Prueba de la raíz

(Stewart 2012, 736):

- ✓ "Si $\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{a_n}\right| = L\ < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente ( por tanto, convergente).
- ✓ Si $\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{a_n}\right| = L\ > 1$, o si $\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{a_n}\right| = \infty$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.
- ✓ $\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{a_n}\right| = 1$ el criterio no aplica".

**Series de potencias.**

La siguiente serie $\sum_{n=0}^{\infty} cx^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$ es una serie de potencia, en donde $c_n$ son los coeficientes y $x$ son las variables.

Vemos que para un valor fijo de $x$ la serie se convierte en una suma de constantes que podemos probar si converge o no converge para determinados valores de $x$. Por ejemplo, para $c_n = 1$ la serie se convierte en una serie geométrica conocida que es convergente para $|x| < 1$.

Una representación más general de la serie de potencias es

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

Se asume que $(x-a)^0 = 1\ incluso\ cuando\ x = a\ , pero\ para\ n \geq 1\ (x-a) = 0$, esto significa que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c(x-a)^n = c_0$ y converge en $c_0$

**Teorema7:** sobre la convergencia de las series de potencias.

Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c(x-a)^n$ existen sólo tres posibilidades de convergencia:

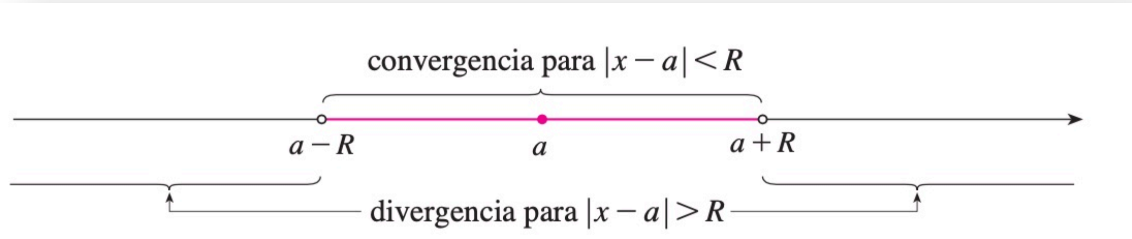
**a)** La serie converge sólo cuando $x = a$ Su radio de convergencia $R = 0$

**b)** La serie converge para toda $x$ Su radio de convergencia $R = \infty$

**c)** Para un numero positivo $R$ tal que la serie converge en $|x-a| < R$, y en este caso el radio de convergencia puede ser:

$$]a-R, a+r[, \quad ]a-R, a+R], \quad [a-R, a+R[, \quad [a-R, a+R]$$

Gráficamente se representa en la siguiente figura:




***Fuente: Stewart, James, 2012; p.743***

**Representación de las series de potencias.**

Mediante la manipulación de series geométricas, o a través de la derivación o integración de estas, algunas funciones se pueden representar como sumas de series de potencias.

Los especialistas de la computación usan mucho esta estrategia para aproximar y representar mediante polinomios en las calculadoras.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Ejemplo 1 Expresar como una serie de potencias y determine su intervalo de convergencia

**a)** $\frac{1}{7+x}$ manipulando la serie la llevamos a una serie geométrica

$$\frac{1}{7+x} = \frac{1}{7\left[1-\left(-\frac{x}{7}\right)\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{-x}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\, x^n$$

$$\frac{1}{7+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\, x^n \rightarrow \left|\frac{-x}{7}\right| < 1 \rightarrow |x| < 7 \rightarrow -7 < x < 7$$

por tanto, $]-7,7[$ es su intervalo de convergencia

**b)** $\frac{x^2}{7+x}$ la representación obtenida en **a** se multiplica por $x^2$

$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n$ para obtener la representación de la serie $\frac{x^2}{7+x}$

$$\frac{x^2}{7+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^{n+2}$$

**Derivación e integración término a término.**

El dominio la suma de una serie de potencias es su intervalo de convergencia, es decir que la suma de una serie de potencias es una función *f(x)* cuyo dominio es su intervalo de convergencia según los casos señalados en el **Teorema 7.**

Los términos de estas funciones se pueden derivar o integrar como se haría con un polinomio, según el siguiente teorema.

**Teorema 8:** Si la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, cuya función *f* está definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n}$$

Si es continua y derivable en el intervalo $]a-R, a+r[$ , entonces:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_n(x-a)^n] = \sum_{1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$
- $\int[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \int[c_n(x-a)^n]\, dx$

**<u>Nota:</u>** Tanto en la derivación como en la integración los radios de convergencia **R** son iguales, pero ***no se puede suponer los mismo*** para los intervalos de convergencia.

**Series de Taylor y de Maclaurin.**

Los coeficientes de una serie de potencias se obtienen derivando sucesivamente la función:

**(Stewart 2012, p. 753-754):**

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 \ldots |x-a| < R$$

$$para\ x = a \quad \boldsymbol{f(a) = c_0}$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4\,c_4(x-a)^3 + \cdots \quad |x-a| < R$$

$$para\ x = a \quad \boldsymbol{f'(a) = c_1}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2*3\,c_3(x-a) + 3*4c_4(x-a)^2 + 4*5c_5(x-a)^3 \ldots \quad |x-a| < 1$$

$$para\ x = a \quad \boldsymbol{f''(a) = 2c_2}$$

$$f'''(x) = 2*3\,c_3 + 2*3*4\,c_4(x-a) + 3*4*5\,c_5(x-a)^2 + \cdots \quad |x-a| < 1$$

$$para\ x = a \quad \boldsymbol{f'''(a) = 2*3\,c_3}$$

$$Siguiendo\ la\ secuencia \quad \boldsymbol{f^n(a) = 2*3*4 \ldots nc_n = n!\,c_n}$$

$$\boldsymbol{c_n = \frac{f^n(a)}{n!}}$$

**Teorema 9:** Si una función *f*, con un desplazamiento horizontal en $a$, se puede representar como una serie de potencias centrada en *a*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

Entonces sus coeficientes se obtienen mediante la fórmula

$$\boldsymbol{c_n = \frac{f^n(a)}{n!}}$$

Esta serie se denomina

**Serie de Taylor centrada en *a***

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}$$

$$\boldsymbol{= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(x-a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots}$$

**Serie de Maclaurin cuando *a*=0**

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots}$$

**Teorema 10:** Si $f(x) = T_n + R_n$ y $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entoces la función $f$ es igual a la suma Taylor en el intervalo de convergencia $|x - a| < R$.

$T_n$: es el polinomio de $n{-}\acute{e}simo$ grado de Taylor

$R_n$: es el residuo

De este teorema se deduce la desigualdad de Taylor

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)} |x-a|^{n+1} \text{ para } |x-a| \leq d}$$

## 2.3. Marco Contextual.

El contexto de nuestra investigación es la Universidad Iberoamericana (UNIBE).

**Breve Historia.**

La Universidad iberoamericana se fundó el 12 de enero 1982, mediante un acto en la Embajada de España. Por medio del Decreto No. 3371 adquirió personalidad jurídica, el 12 de julio de ese mismo año.

El 1 de septiembre de 1983 UNIBE abre sus puertas con las carreras de Derecho, Ingeniería y Medicina. En 1984 incorpora en su oferta académica las carreras de administración de Empresas y Arquitectura y en 1985 incorpora la carrera de odontología.

En la actualidad la oferta académica de UNIBE consta de 17 carreras de grado y 45 programas de postgrado, con una matrícula de 5000 estudiantes y 19,000 egresados.

En la Universidad Iberoamericana (UNIBE) se promueven los siguientes valores: liderazgo, actitud emprendedora, integridad, sostenibilidad, inclusión y diversidad, excelencia, servicio excepcional y compromiso social.

**Principios de Modelo Educativo UNIBE**:

- Aprendizaje significativo.
- Autogestión del aprendizaje.
- Aprendizaje colaborativo.
- Enfoque por competencias.

**Accionar estratégico del Modelo Educativo UNIBE:**

1. Comunidad y Cultura Institucional.
2. Experiencia Educativa Transformadora: que fomenta la perspectiva crítica, la innovación, la creatividad y desarrollo de competencias.
3. Investigación, Innovación, Emprendimiento.
4. Vinculación, Cooperación e Internacionalización.
5. Desarrollo y Sostenibilidad Institucional.
6. Transformación Digital.

El **Departamento de Matemáticas** pertenece a la Escuela de Estudios Generales, cuyo eje formativo:

- Conocimiento científico y tecnológico.
- Dimensión: Ciencias Básicas Formales
- Competencia: Aplicar conocimientos y habilidades del razonamiento lógico matemático, que ameriten el uso del pensamiento crítico, analítico y variacional.

Oferta Académica de las Ingenieras:

- Ingeniería Civil
- Ingeniería Industrial
- Ingeniería en Tecnologías de la Información y Comunicación

# CAPÍTULO III
# DISEÑO METODOLÓGICO

### 3.1. Diseño Metodológico.

(Sampieri, 2014) "La magnitud del estudio que se va a realizar es la que determina la línea de la investigación. Una investigación puede irse desarrollando inicialmente desde un proceso de un menor alcance a uno de un mayor alcance".

Se clasifican en exploratorios, descriptivos, correccionales y explicativos. Cada uno de estos alcances tienen procedimientos y diseños distintos. Los estudios exploratorios son la antesala de las demás investigaciones.

(Ary, Donald y Jacobs, L. Ch., 1999) La investigación descriptiva interpreta la situación del caso o fenómeno que se va a estudiar y parte del contexto existente (las prácticas que persisten, las creencias que predominan, los procesos que suceden) hacia las nuevas condiciones de la investigación. En nuestra investigación identificaremos las estrategias de la enseñanza que se han usado.

Nuestra investigación es un estudio no experimental ya que las variables no se han manipulan en ningún experimento, y el fenómeno se ha observado en su contexto natural. (Sampieri, 2014, p. 205).

Por lo antes descrito y por la revisión que hemos realizado para la situación problemática planteada en el Capítulo I:

**El alcance de nuestro estudio es descriptivo y no experimental**

En nuestra investigación partiremos de la información obtenida de los docentes de UNIBE que imparten Cálculo a los estudiantes de ingeniería.
Se describirán las estrategias que proponemos y se harán las recomendaciones de lugar tomando en cuenta las realidades encontradas en nuestra investigación.

### 3.2. Enfoque metodológico.

El enfoque metodológico de la investigación es mixto, ya que nos acercamos a la realidad del problema, en este caso sobre la necesidad de plantear estrategias para la enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias, a través de la experiencia de los docentes que imparten esa materia en UNIBE.

La población en el presente estudio está constituida por 4 docentes que imparten Cálculo en UNIBE a los estudiantes de ingeniería, del Departamento de Matemáticas de Estudios Generales. Por el tamaño de la población no tomaremos muestra, es decir que trabajaremos con toda la población.

Las informaciones se recopilarán mediante un ***instrumento de encuesta*** que se les aplicará a los 4 docentes asignados a la Escuela de Ingeniería.

En este enfoque se describen situaciones, experiencias, se recopilan y analizan datos que recopilamos en la encuesta. Por tal razón cae en la categoría de enfoque cualitativo. El reporte de los resultados es:
(Sampieri, 2014, p. 26):

**"Emergente y flexible. Reflexivo y con aceptación de tendencias".**

Nuestras variables son: estrategias, enseñanza, series infinitas, criterios de convergencia y serie de potencias.

El supuesto que planteamos es que una adecuada estrategia facilita la enseñanza de los conceptos señalados.

$$(\boldsymbol{estrategia}) = \boldsymbol{facilita\ la\ ensenanza} \begin{cases} \boldsymbol{Series\ infinitas} \\ \boldsymbol{Criterios\ de\ convergencia} \\ \boldsymbol{Series\ de\ potencias} \end{cases}$$

# CAPÍTULO IV
# ANÁLISIS DE DATOS

## 4.1 Análisis de los datos obtenidos.

Como mencionamos anteriormente la población en el presente estudio está constituida por 4 docentes, los cuales imparten la asignatura de cálculo en **UNIBE** a los estudiantes que pertenecen a las Escuelas de Ingeniería, del Departamento de Matemáticas de Estudios Generales. A dichos docentes se les aplicó una encuesta para poder sustentar y dar rigor a nuestra investigación. Los resultados obtenidos se detallan a continuación de forma gráfica para mayor claridad.

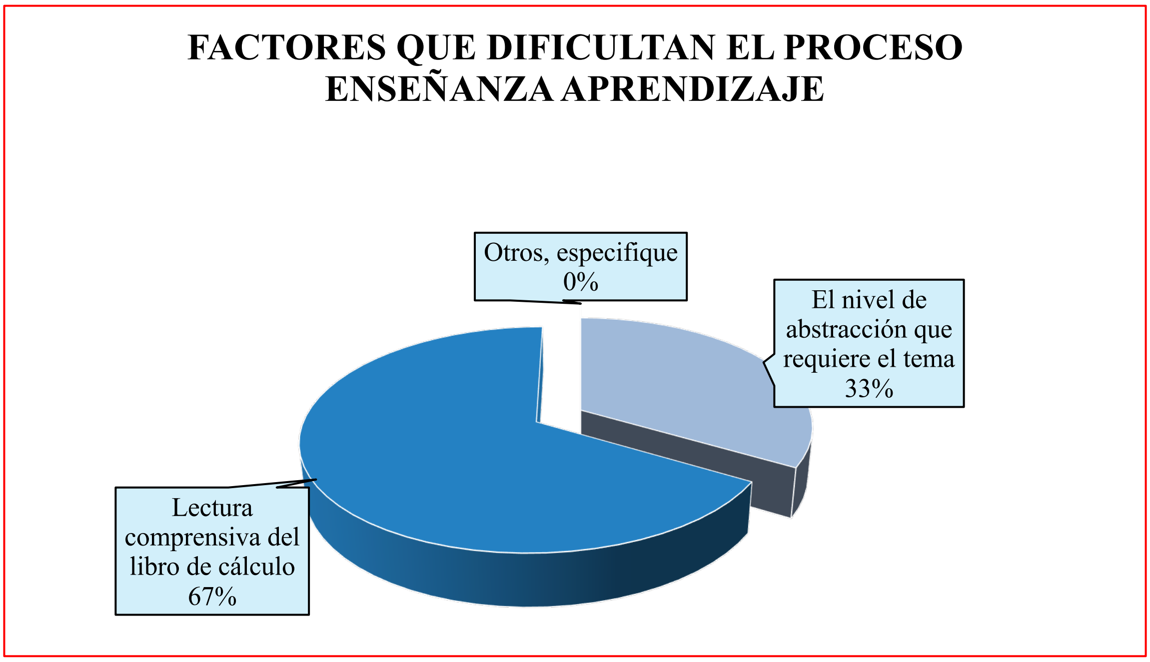



***Gráfico 1. Factores que dificultan el proceso de enseñanza.***

En el **grafico 1** se puede visualizar que:

- 100% (4/4 docentes) coinciden que es la lectura comprensiva del libro de cálculo.
- 50% (2/4 docentes) consideran además el nivel de abstracción que requiere el tema.

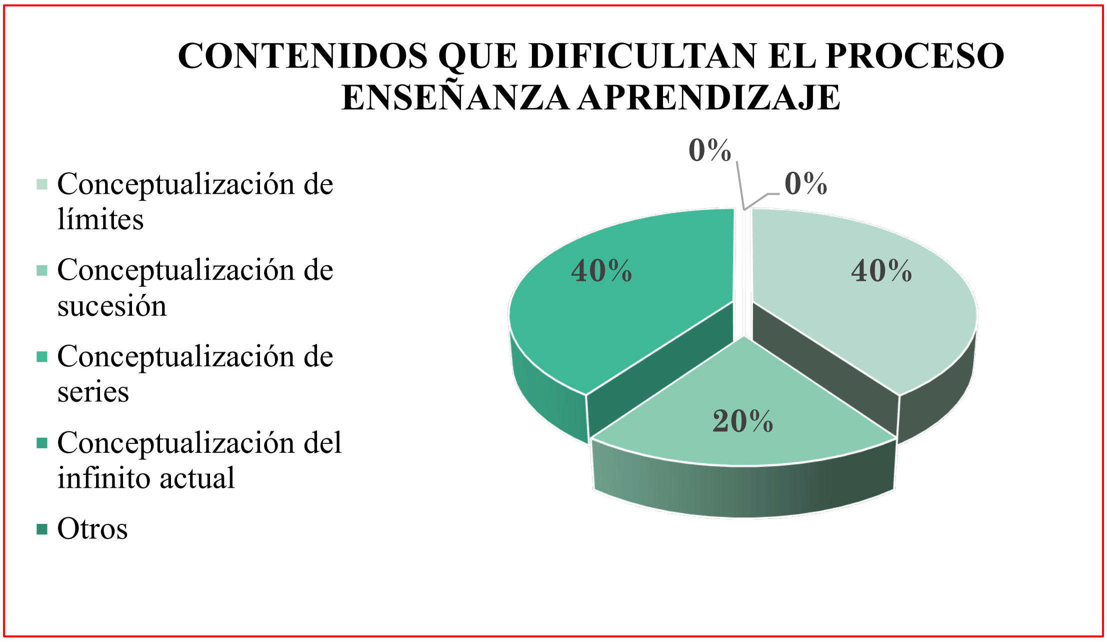



***Grafico 2. Contenidos que dificultan el proceso enseñanza-aprendizaje.***

El **grafico 2** muestra que:

- 100% (4/4 docentes) coinciden que es la conceptualización sobre límites y de series infinitas.

- 50% (2/4 docentes) consideran también la conceptualización sobre sucesiones.

***Grafico 3. Estrategias desarrolladas durante la clase.***

A través del **grafico 3**, podemos observar lo siguiente:

- 100% (4/4 docentes) utilizaron Clase Magistral.
- 100% (4/4 docentes) utilizaron Trabajo en Equipo.

- 50% (2/4 docentes) utilizaron Aprendizaje Basado en Problema.
- 50% (2/4 docentes) utilizaron Aprendizaje Colaborativo.
- 50% (2/4 docentes) utilizaron Clase Invertida.

- 25% (1/4 docentes) utilizaron Aprendizaje Autónomo.
- 25% (1/4 docentes) utilizaron Informe de Lectura.
- 25% (1/4 docentes) utilizaron Métodos de proyectos.

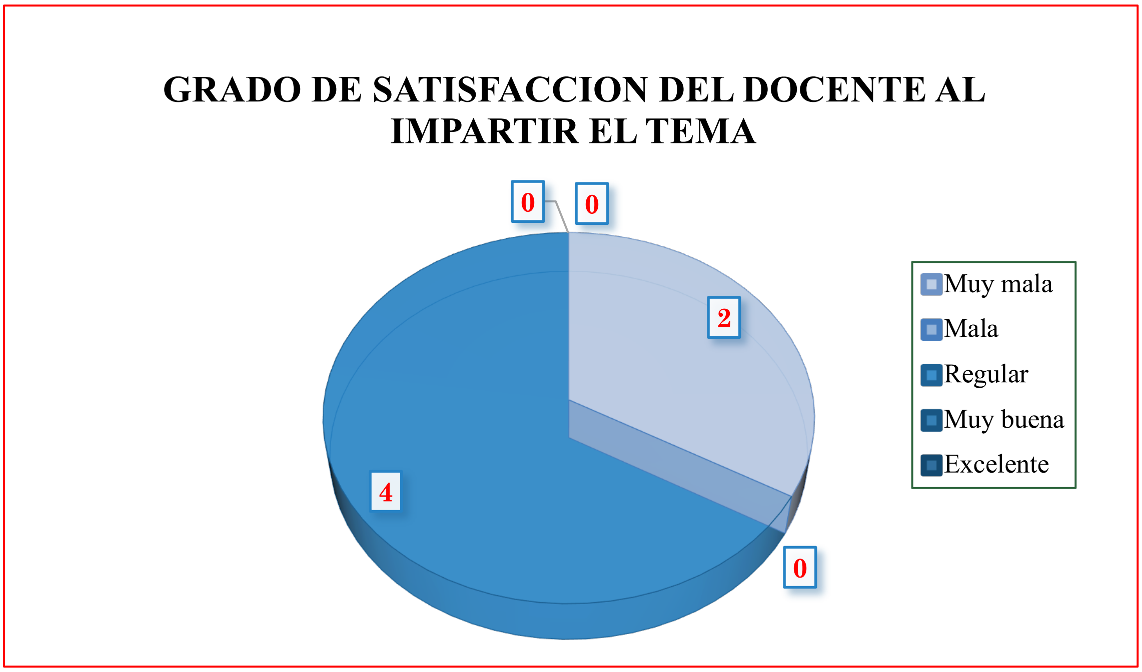



***Grafico. Grado de satisfacción docente.***

El **grafico 4** muestra que:

- 100% (4/4 docentes) marcaron la escala 3 (regular) al impartir el tema.
- 50% (2/4 docentes) marcaron la escala 2(mala) sobre el rendimiento de los estudiantes.
- 50% (2/4 docentes) marcaron la escala 1(muy mala) sobre el rendimiento de los estudiantes.

Según las informaciones recolectadas podemos afirmar que los docentes presentan una debilidad más significativa al momento de realizar el inicio del tema (recogida de conocimientos previos) explícitamente al abordar la conceptualización de límite.

En cuanto al grado de satisfacción del docente al impartir el tema, la percepción general es regular y las estrategias de la enseñanza más utilizadas fueron “clase magistral” y “trabajo en equipo”.

Es por esta razón que nuestra propuesta está enfocada a presentar estrategias para mejorar la enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias, tomando en cuenta estas informaciones sobre la experiencia de los docentes que han impartido en la Universidad Iberoamericana (UNIBE).

# CAPÍTULO V
# PRESENTACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

## 5.1 Generalidades.

Nuestra propuesta didáctica para la enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias se desarrollará en dos fases:

### 5.1.1 Primera fase:

- ✓ Establecer un contrato didáctico en donde se explique y se discuta las reglas, estrategias que se van a desarrollar en el curso.
- ✓ Diseñar una estrategia para activar o generar los conocimientos previos e intuir la idea de convergencia (ver Anexo:3).
- ✓ Facilitar nuevas informaciones sobre los criterios de convergencia mediante clase magistral y referencias de libros de textos, videos y recursos en el aula virtual.
- ✓ Revisión de los nuevos conceptos a mediante de un cuestionario (Anexo:4)
- ✓ Estrategia de cierre de contenidos: orientar a los estudiantes para que elaboren su propia tabla sobre los criterios de convergencia detallando cuando aplicarlo y sus características de convergencia y divergencia (ver Anexo: 5).
- ✓ Validación e institucionalización de los nuevos contenidos.
- ✓ Aplicar los nuevos contenidos en un instrumento de correspondencia (un apareo) donde el estudiante relacione la serie con el criterio de convergencia adecuado para determinar si converge o diverge (Anexo: 6).

### 5.1.2 Segunda fase:

- ✓ Facilitar nuevas informaciones sobre las series de potencias y sus radios de convergencia a través de clase magistral, referencias de libros de textos, videos y recursos en el aula virtual.
- ✓ Fomentar el trabajo en equipo con exposiciones usando la estrategia de clase invertida (presencial o en la modalidad virtual) para estimular la autogestión del conocimiento y el aprendizaje colaborativo.

- ✓ Diseñar una actividad para trabajar en el aula con los siguientes contenidos (ver Anexo:7).
  - **a)** Identificar el radio y el intervalo de convergencia.
  - **b)** Representar funciones como series de potencias, centradas en o y en c
  - **c)** Derivar e integrar término a término funciones representadas como series de potencias.
  - **d)** Evaluar una integral definida como serie de potencias.

- ✓ Preparar una estrategia para organizar la nueva información a través de un mapa conceptual sobre:
  - **a)** La serie de Taylor y el desarrollo de su patrón.
  - **b)** La serie de Maclaurin
  - **c)** Determinar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y su radio de convergencia.
  - **d)** Determinar la serie de Taylor de la función $f(x) = e^x$ centrada en x=3 y su radio de convergencia.
  - **e)** Utilizar simuladores para representar funciones elementales como series de Taylor y de Maclaurin

- ✓ Estrategia de puesta en común sobre la investigación asignada para la validación e institucionalización de los nuevos contenidos.

- ✓ Orientar a los estudiantes para que construyan una tabla con las funciones elementales representadas como series de potencias de Maclaurin.

- ✓ Representar gráficamente funciones elementales como series de Taylor y de Maclaurin.

- ✓ Aplicación de los polinomios de Taylor como una aproximación de funciones mediante polinomios.

## 5.2 Metodología de las estrategias propuestas.

Con relación a las fases mencionadas en el epígrafe anterior, es necesario que el docente implemente metodologías a partir de procedimientos heurísticos que favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema que nos ocupa. A continuación, se explican una serie de ejemplos y pasos a seguir para el cumplimiento de las fases antes mencionadas:

| ESTRATEGIAS PARA PROBAR SERIES INFINITAS |
|---|
| Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie diverge |
| Identificar si es una serie especial: geométrica, telescópica, serie p |
| Verificar si la serie se puede comparar con una serie especial |
| Verificar si se puede aplicar el criterio de la integral, el del cociente o el de la raíz |

**Ejemplos de las tres posibilidades de convergencia.**

**a)** Un caso cuando el radio de convergencia es igual a cero (R=0)

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ Aplicando el criterio de la razón tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!x^n x}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| < 1$$

Por lo que la serie sólo converge cuando $x = 0$

**b)** Un caso cuando el radio de convergencia es igual a $|x-4| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n}$ Aplicando el criterio de la razón tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^{n+1}}{(n+1)}\frac{n}{(x-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-4)^n(x-4)}{(n+1)}\frac{n}{(x-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)|x-4|$$

$$|x-4| < 1 \quad \rightarrow \quad -3 < x < 5$$

Evalúanos la serie:

Para x=3 $\quad \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ converge en 3 por el criterio serie alternante.

Para x=4 $\quad \sum_0^\infty \frac{(1)^n}{n}$ diverge por ser la serie armónica.

Concluimos que:

Su radio de convergencia es R=1 y converge en el intervalo $[-3,5)$ $\quad$ -3$\leq x < 5$

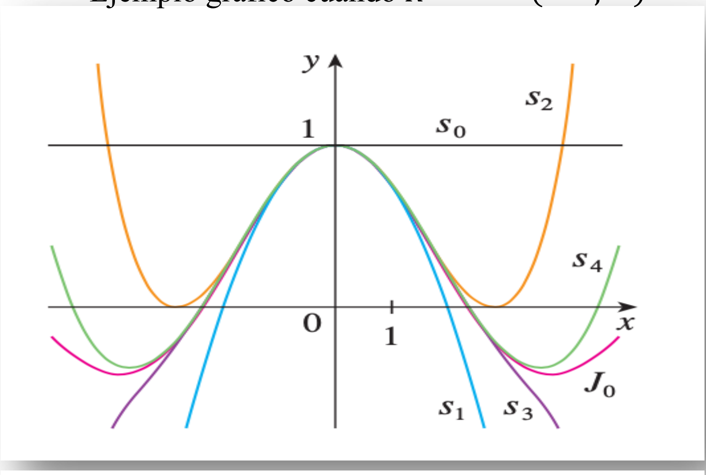
**c)** Un caso cuando el radio de convergencia es ∞ (R = ∞).

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$ Aplicando el criterio de la razón tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^n(x-1)}{(n+1)n!}\frac{n!}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)}\right| = 0 < 1$$

Converge para toda $x$ $\qquad R = \infty \quad (-\infty, \infty)$

Ejemplo gráfico cuando $R = \infty \quad (-\infty, \infty)$




***Fuente: Stewart, James, 2012: p.743***

En la figura la curva de color rojo $\boldsymbol{J_o}$ es la función de Bessel.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$ Es la curva en **rojo**

n=0 $\qquad S_0 = 1$

n=1 $\qquad$ ***$S_1$* es la curva azul** ∩

n=2 $\qquad$ ***$S_2$* es la curva naranja** ∪

n=3 $\qquad$ ***$S_3$* es la curva morada** ∩

n=4 $\qquad$ ***$S_4$* es la curva verde** ∪

Si observamos la gráfica veremos que a medida que el número de términos aumente más se acerca las aproximaciones por serie a la función de Bessel (la curva roja).

**$S_4$ está más próxima a $J_0$**

**Ejemplos:**

1. Expresar la función *f(x)*=$\frac{1}{(1+x)^2}$ como serie de potencias mediante la derivación

$\frac{1}{(1+x)^2}$ → $\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{1+x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2}$

- Expresar $\frac{-1}{1+x}$ como una serie de potencias:

$$\frac{-1}{1-(-x)} = -1\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\,x^n$$

- Derivar:

$\frac{d}{dx}\left[\frac{-1}{1-(-x)}\right]$=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\,x^n\right]$ =$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,nx^{n-1}$

Reemplazar a $n\ por\ (n+1) \rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{-1}{1-(-x)}\right]$=$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,nx^{\,n}$

- Determinar su radio e intervalo de convergencia.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^n x}{nx^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x| < 1$$

$|x| < 1$ R=1 y su intervalo de convergencia es (-1,1)

1. Expresar la función **f(x)=ln$(1-x)$** como serie de potencias mediante la integración.

$$-\ln(1-x) = \int\frac{1}{1-x}dx \ \rightarrow \ln(1-x) = -\int\frac{1}{1-x}dx$$

- Expresar $\frac{1}{1-x}$ como una serie de potencias:

  $\frac{1}{1-x}$ =$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

- Integrar:

  $\ln(1-x) = -\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right]dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

- Determinar su radio e intervalo de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+2}}{(n+1)} * \frac{n}{x^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n\,x^2}{(n+1)} * \frac{n}{x^n\,x}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| < 1$$

$|x| < 1$ R=1 y su intervalo de convergencia es (-1,1)

2. Expresar una función como serie de potencias centrada en c

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

$f(x) = \frac{5}{2x-3}$, c =-3

Mediante un artificio algebraico manipulamos la serie:

$$f(x) = \frac{5}{2(x+3)-9} = -\frac{5}{9}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{9}(x+3)}\right]$$

$$f(x) = -\frac{5}{9}\left[\frac{1}{1-\frac{2}{9}(x+3)}\right] = -\frac{5}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n (x+3)^n = -5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x+3)^n}{9^{n+1}}$$

- Determinar su radio e intervalo de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(x+3)^{n+1}}{9^{n+2}} * \frac{9^{n+1}}{2^n(x+3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(x+3)}{(9)}\right| < 1$$

$|(x+3)| < \frac{9}{2}$ R= $\frac{9}{2}$ y su intervalo de convergencia es $\left(-\frac{15}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3. Usar una serie de potencias para aproximar la integral $\int_0^{0.3} \ln(1+x^5)\,dx$ en seis cifras decimales

- $\ln(1+x^4) = \int \frac{5x^4}{1+x^5} dx$

- $\frac{1}{1-(-x^5)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n}$

- $\frac{5x^4}{1+x^5} = 5x^4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 5\,x^{5n+4}$

- $\ln(1+x^5) = \int [\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 5\, x^{5n+4}]$=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5x^{5n+5}}{5n+5} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5x^{5n+5}}{5(n+1)}$

  $\ln(1+x^5)$=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{5n+5}}{n+1}$

- $\int \ln(1+x^5)\, dx$ =$\int \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{5n+5}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{5n+6}}{(n+1)(5n+6)}$

  La integral definida:

  $\int_0^{0.3} \ln(1+x^5)\, dx = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{5n+5}}{n+1}\right]_0^{0.3} = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{5n+6}}{(n+1)(5n+6)}\right]_0^{0.4}$

  $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{5n+6}}{(n+1)(5n+6)}\right]_0^{0.3} = \frac{(0.3)^6}{6} - \frac{(0.3)^{11}}{22} + \frac{(0.3)^{16}}{48} - \frac{(0.3)^{21}}{84} = 1.214\, x\, 10^{-4}$

  $\int_0^{0.3} \ln(1+x^5)\, dx = 0.001214$

- El intervalo de convergencia lo encontramos aplicando la prueba del cociente.

  $a_{n+1} = \frac{x^{(5n+5)+6}}{(n+2)[(5n+5)+6]}$ , $a_n$=$\frac{x^{5n+6}}{(n+1)(5n+6)}$

  $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(5n+5)+6}}{(n+2)[(5n+5)+6]} * \frac{(n+1)(5n+6)}{x^{5n+6}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{5n}x^{11}}{(n+2)(5n+11)}\frac{(n+1)(5n+6)}{x^{5n}x^{6}}\right| =$

  $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(5n+6)}{(n+2)(5n+11)}x^4\right|$ =$\lim_{n\to\infty}|x^5| < 1$

  $|x| < 1$ R=1

  Para x= -1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{5n+6}}{(n+1)(5n+6)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)^n}{(n+1)(5n+6)}$ es convergente por el criterio de la serie P $\to p > 1$

  Para =1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1)^{5n+6}}{(n+1)(5n+6)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(5n+6)}$ es convergente por el criterio de serie alternante→ $b_{n+1} < b_n\ y\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

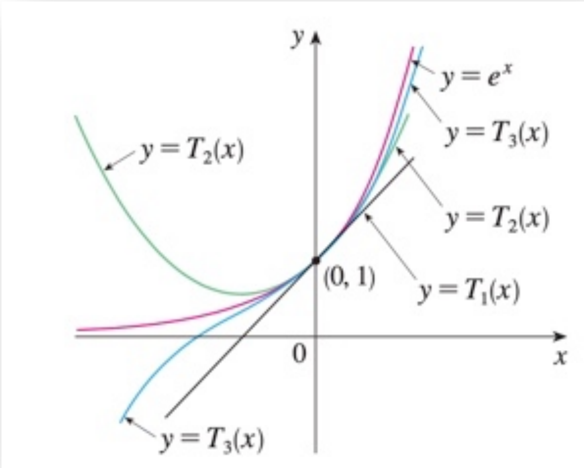
  Por consiguiente, el intervalo de convergencia es [-1,1]

**5.** Representar la función $f(x) = e^x$ como una serie de Maclaurin.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n \to f(0) = e^0 = 1 \to C_n = \frac{f^n(0)}{n!} \to f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ es igual a la suma de su serie de Taylor.




Se observa que **Tn (x)** es una función polinomial de grado n, que se conoce como el **polinomio de Taylor de *n-ésimo* grado**, y que a medida que *n* crece el polinomio se acerca más a la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = e^x}$.

| | |
|---|---|
| $T_1 = 1 + x$ | es la línea recta color negro |
| $T_2 = \mathbf{1 + x + \frac{x^2}{2!}}$ | es la parábola de color azul |
| $T_3 = \mathbf{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}$ | es la función potencia verde de grado 3 |
| $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ | es la función exponencial de color rojo |

Se puede observar que $f(x) = T_n(x) + R_x(x)$, donde $R_n(x)$ es el residuo que a medida que n crece tiende a ser cero.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Aplicando el **Teorema 11**

$f^{(n+1)}(x) = e^x$ para toda $x$ y si $\boldsymbol{x \le d} \to f^{(n+1)}(x) = e^x \le e^d \to M = e^d$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Por consiguiente, se infiere $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de $x$ y de acuerdo con el **Teorema 10** $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ es igual a la suma de la serie Taylor centrada en **x=0 (**o la suma de la serie de Maclaurin).

$$\boldsymbol{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

# CONCLUSIÓN

La investigación que hemos realizado sobre los criterios de convergencias de las series infinitas y las series de potencias nos ha arrojado datos importantes sobre las estrategias que se pueden usar para contribuir a mejorar y dinamizar el proceso de enseñanza.

1). Los factores que afectan el proceso de enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y series de potencias.

- En nuestra investigación constatamos que los profesores de **UNIBE** que han impartido este tema, coinciden unánimemente (100%) que el principal factor que afecta el proceso de enseñanza es la lectura comprensiva del libro de Cálculo.

- Un 50% señalan que el nivel de abstracción que requiere el tema es otro factor que se debe tener en cuenta ya que también dificulta el proceso de enseñanza.

2). Los contenidos que afectan el proceso de enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y series de potencias.

La conceptualización de los contenidos que dificultan el proceso de enseñanza está relacionada con los conocimientos previos que se deben dominar para comprender el tema.

Los resultados obtenidos de las experiencias de los docentes que imparten esta asignatura en UNIBE son los siguientes:

- Un 100% de los docentes encuestados coinciden que la conceptualización de los contenidos de límites y de series infinitas representan una dificultad a la hora de abordar el tema de las series infinitas y los criterios de convergencia.

- Por otro lado, un 50 % de los docentes encuestados señalan la conceptualización de sucesión como otra dificultad a la hora de abordar el tema de las series infinitas y los criterios de convergencia.
- Por los resultados obtenidos podemos afirmar que las estrategias para activar o generar los conocimientos previos son necesarias.

3). La experiencia de los docentes de UNIBE al impartir el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias.

- Todos los docentes encuestados (4/4) marcaron 1 que en la escala de 1 a 5 significa mala (experiencia).

- En cuanto al rendimiento de sus estudiantes 2/4 marcaron 1 (rendimiento muy malo) y 2/4 marcaron 3 (rendimiento regular.

4). Las estrategias que han implementado los docentes en UNIBE al impartir el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y series de potencias.

A partir del conjunto de estrategias que se le presentaron a los docentes en la encuesta, la información recogida fueron las siguientes.

- El 100% de este equipo de docentes han desarrollado las estrategias de enseñanza: trabajo en equipo y clase magistral.

- El 50 % de este equipo de docentes han desarrollado las estrategias de enseñanza: aprendizaje basado en problemas, aprendizaje colaborativo y la clase invertida.

- Un 25% desarrollo la estrategia de aprendizaje autónomo.

Partiendo de los resultados de nuestra investigación podemos contestar nuestra pregunta fundamental del planteamiento de nuestro problema.

Las estrategias didácticas para la enseñanza de los criterios de convergencia y de las series infinitas que se pueden utilizar son:

- Estrategias para activar o generar conocimientos previos y estrategias para captar la atención de los alumnos, creando situaciones didácticas y situaciones a-didácticas en el aula tal como lo propone Guy Brousseau en su teoría de Situaciones Didácticas.
- Construir la situación didáctica mediante actividades basadas en problemas donde se establezca una iteración entre el saber, el alumno el profesor y el medio, estableciendo las reglas de juego mediante un contrato didáctico.

- Diseñar la situación a-didáctica tomando en cuenta el medio y los conocimientos previos activado de los alumnos, de manera que los alumnos se sientan motivados para realizar las actividades diseñadas por el docente.

- Exposiciones de los trabajos asignados en equipos para la formulación, conceptualización y socialización de los contenidos investigados.

- Estrategias para la validación de los nuevos conceptos: cuestionarios, apareo, preguntas intercaladas, crucigramas.

- Estrategias tecnológicas para representar las series de Taylor y Maclaurin usando simuladores (Desmos, Symbolab, Mathway, Photomath, Mathstep, etc).

Aclaramos que los planteamientos formulados en esta investigación no son definitivos. Nuestra intención ha sido la de contribuir y ayudar a los docentes en el proceso de enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias. Esta investigación es un eslabón más en el amplio mundo de las estrategias de la enseñanza de las series infinitas.

# RECOMENDACIONES

Tomando en cuenta los resultados de nuestra investigación y a la vez considerando la importancia de esta, hacemos las siguientes recomendaciones a los docentes que imparten el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias.

- Motivar a que sigan investigando sobre las estrategias didácticas para la enseñanza de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias.

- Animar a los docentes a que apliquen las estrategias propuestas en nuestra investigación, de manera que puedan ser enriquecidas con sus sugerencias y creatividad.

- Incorporar la tecnología en sus prácticas docentes usando simuladores, graficadores, y juegos.

- Incentivar a los docentes para que se capaciten y se actualicen con los nuevos avances de la tecnología, herramienta valiosa y necesaria en nuestra práctica docente, a través de la cual podemos establecer una mejor comunicación con las generaciones de este nuevo milenio.

# BIBLIOGRAFÍA

**Textos:**


1. Anton, Howard, (1999). Calculus: A New Horizon (6 ta ed.). JOHN WILEY & SONS.
2. Ary, Donald y Cheser Jacobs, Lucy, (1999). Introducción A La Investigación Pedagógica. 2 da ed. McGrawHill.
3. Bartle, Robert G. (1992). Introducción Al Análisis Matemático. LIMUSA. Grupo Noriega Editores.
4. Boyer, Carl. B. (1974). História Da Matemática. Editora Da Universidade De São Paulo.
5. De la Torre, Saturnino. (1993). Didáctica Y Currículo. DYKINSON, S.L
6. Granville, Willian A; Smith, Percey F. y Longley Willian R. (1975). Cálculo Diferencial E Integral. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana.
7. Díaz B., Juan y Martins P., Adair (1997). Estrategias De Enseñanza-Aprendizaje. Publicado INSTITUTO INTERAMERICANO DE COOPERACION PARA LA AGRICULTURA.
8. Díaz Barriga, Frida y Hernández Rojas, Gerardo, (1999). Estrategias Docentes Para Aprendizaje Significativo. McGrawHill.
9. Hernández-Mas, Gustavo, (2004). Cálculo Integral, Geometría Analítica del Espacio Series. Editora Universitaria.
10. Hofmann, Joseph, (2006). Historia de la Matemática. LIMUSA. Noriega Editores
11. Kaplan, Wilfred, (1972). Cálculo Avanzado.(10 ma ed.). COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A.
12. Klime, Morris, (1992). El pensamiento matemático.
13. Larson, Ron y Bruce, Edwards, (2016). CÁLCULO (10 ma ed. Vol.II). CENGAGE Learning.
14. Pimienta Prieto, Julio H., (2005). Metodología Constructivista. Pearson Education.
15. Purcell, Edwin J., Varberg, Dale y Rigdon, Steven.E, (2007), Cálculo (9na ed.), PEARSON. Educación.
16. Stewart, James, (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7ma ed.). CENGAGE Learning.
17. Thomas, George. B. Jr. CÁLCULO: UNA VARIABLE (11 ma ed.). PEARSON. Educación.

18. Uzcátegui Aylwin, Carlos. (2011). Los números reales y el infinito. Universidad de los Andes. Version 2011. uzca@ula.ve.
19. Zill, Dennis y Dewar, Jacqueline (2008). (3era ed.) Cálculo Vectorial, Análisis De Fourier Y Analisis Complejo. McGraWHill.
20. Zill, Dennis. G y Wright, Warren. S., (2011). CÁLCULO: Trascendentes tempranas (4ta ed.). McGraWHill.
21.

**Artículos de Revistas Especializadas:**

22. Bellon, Waldemar. (1945) Cantor, el conquistador del Infinito. Revista De la Universidad Nacional de Colombia. No. 3, pp. 353-373.
23. Brousseau, Guy. (1999). Educación y didáctica de las matemáticas. Educación Matemática. Vol. 12 No.1 Abril 2000 pp. 5-38.
24. Codes Valcarce, Myriam y González-Martin, Alejandro S. (2017) Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS.ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 35.1, (2017): 89-110. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927.
25. Cortez, Iracheta R. (2015) Una fórmula recursiva para la evaluación de la impedancia de retorno por tierra en cables subterráneos Ingeniería e investigación,35(3), 34-43. http://dx.doi.org/10.15446/ing.investig.v35n3.49391.
26. De Pablos, J.M., Colás, M.P., López Gracia, A., García Lázaro, I. (21019). Los usos de la plataforma digitales en la enseñanza universitaria. Perspectivas desde la investigacion educativa. REDU, Vol. 17(1), 59-72.
27. Dreyfus (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D.Tall(ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 24-41.
28. Dubinsky, E., Weller, K., Mc Donald, M.A., brown, A. (2005 b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept infinity: an APOS-based analysis part II. Educational Studies in Mathematics, 60, 253-266. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z.
29. Guicciardini, Niccolò (2006). LA ÉPOCA DEL PUNTO:EL LEGADO MATEMÁTICO DE NEWTON EN EL SIGLO XVIII. *Estud.filos,* ISSN 0121-3628 no35 febrero de 2007 *Universidad de Antioquia* pp.67-109.

30. López, Claudia Andrea (2014), El infinito en la historia de la matemática. Universidad de Palermo, Ciencia y Tecnología, 14, 2014, pp. 277-298 ISSN 1850-0870.
31. Morales Soto, Astrid (2014). La graficación- modelación y la serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo”. RELIME, ISSN 1665-2436, Vol. 17, No.3, pp. 319-345.
32. Rodríguez Meléndez, Oscar Alberto (2016). Series estocásticas de Taylor – Itô y métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas “. Boletín de Matemáticas, ISSN-e 0120-0380, Vol. 23, No. 1, pp. 81-103. Repositorio Dialnet.
33. Vega Urquieta, M. Angélica y Yañez, José Carrillo y Andrades, Jorge Soto. (2014).Análisis según el Modelo Cognitivo APOS del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada. Bolema, Rio Claro (SP),28(48),403-429. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20.
34. Valdes, Juan E. Nápoles. (2008) DE LEIBNIZ A D'ALEMBERT: DIEZ PROBLEMAS QUE MARCARON UN SIGLO. Boletín de Matemáticas. Nueva Serie, XV(2),130-161.

**Tesis**


35. Arnal Palacián, Mónica. (2019) Limite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza [Tesis Doctoral, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID]. Dialnet.
36. Carmona Jover, Isabel. (1996). Una Construcción De La Noción De Convergencia De Series Para Facilitar La Solución De Ecuaciones Diferenciales: Secuencias Didácticas Para Su Enseñanza En El Sistema ITESM. Instituto Y De Estudios Superiores De Monterrey.
37. Codes Valcarce, Myriam. (2009). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. ACADEMIA.
38. Prieto Sánchez, Juan Antonio. (2015). Estudio del infinito actual como identidad cardinal en estudiantes de educación secundaria de 13 a 16 años. [Tesis Doctoral Universidad de Málaga]. Dialnet.
39. Villareal Treviño, María M., (2006). La Importancia De La Estrategias De Enseñanza En El Logro Del Aprendizaje En Loa Alumnos Universitarios [tesis de maestría, Instituto de Estudios Superiores de Occidente, Guadalajara].
40. Ramos Valenzuela, J.A. (2012). El estudio de las sucesiones y series desde la teoría del Aprendizaje Significativo [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia].


**Internet**


41. Sánchez Cano, José A. (2010). Método de las series de Taylor para resolver ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. https://www.monografias.com/trabajos91/metodo-series-taylor-resolver-ecuaciones/metodo-series-taylor-resolver-ecuaciones.shtml. Consultado el 31de mayo de 2020.

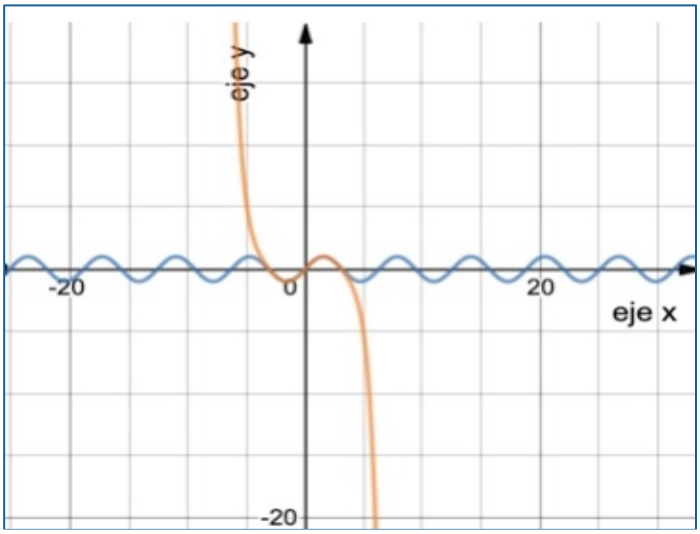
# ANEXOS

**Anexo 1**

**Representaciones gráficas de series importantes.**

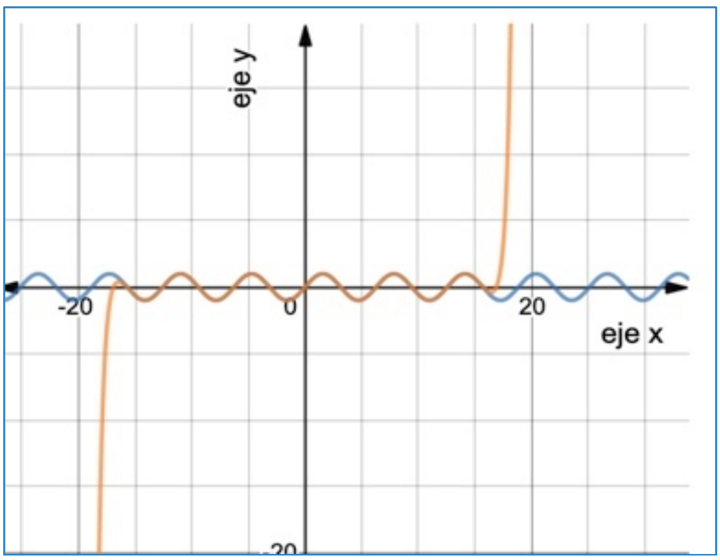
**Simulador usado: Desmos**

Representación gráfica de la serie de Maclaurin del sin $x$ para n=3.



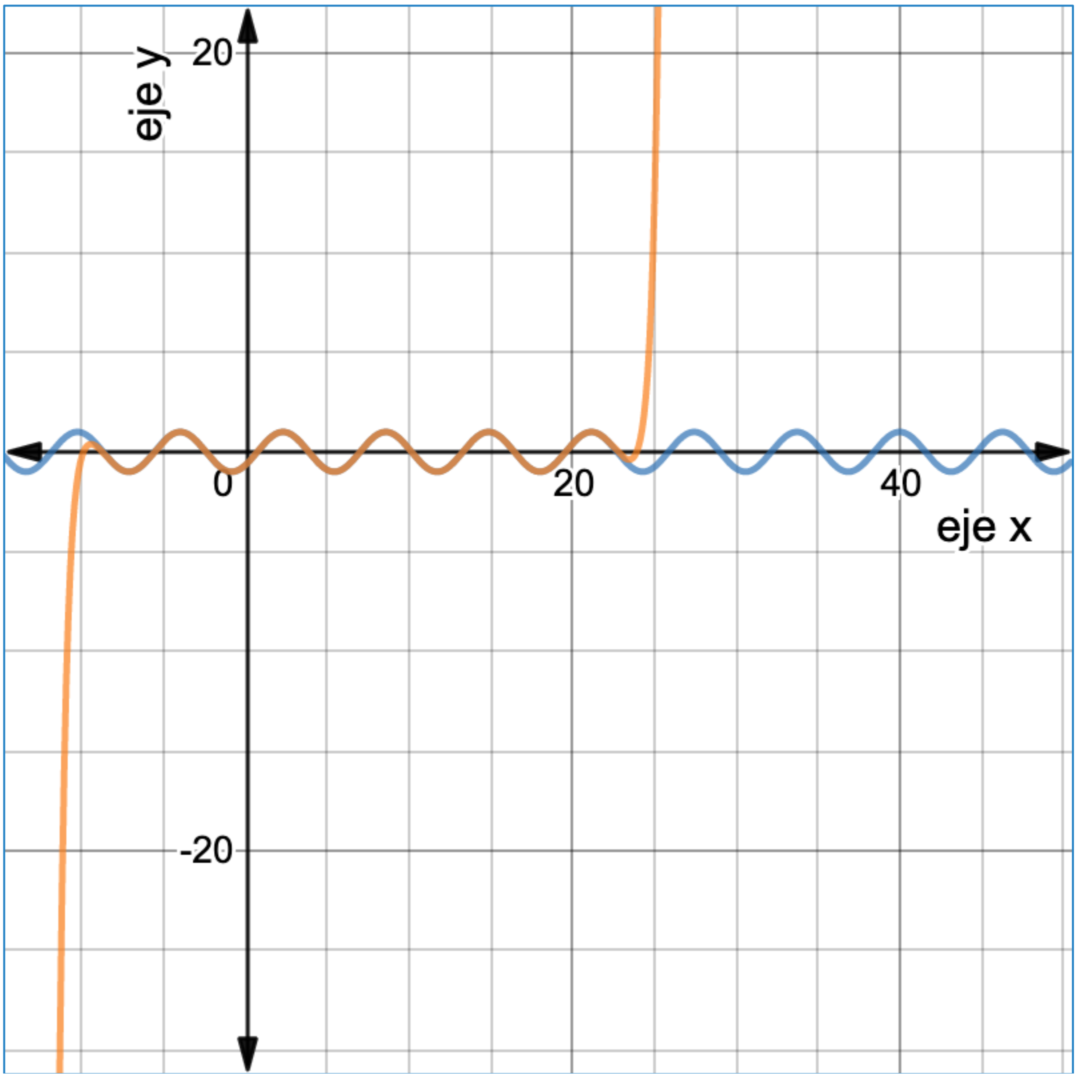

Representación grafica de la serie de Maclaurin del sin $x$ para n=20.

Se verifica que a medida que $n$ crece el polinomio de Taylor se aproxima con mas exactitud a la función *f(x)= sen(x)*.

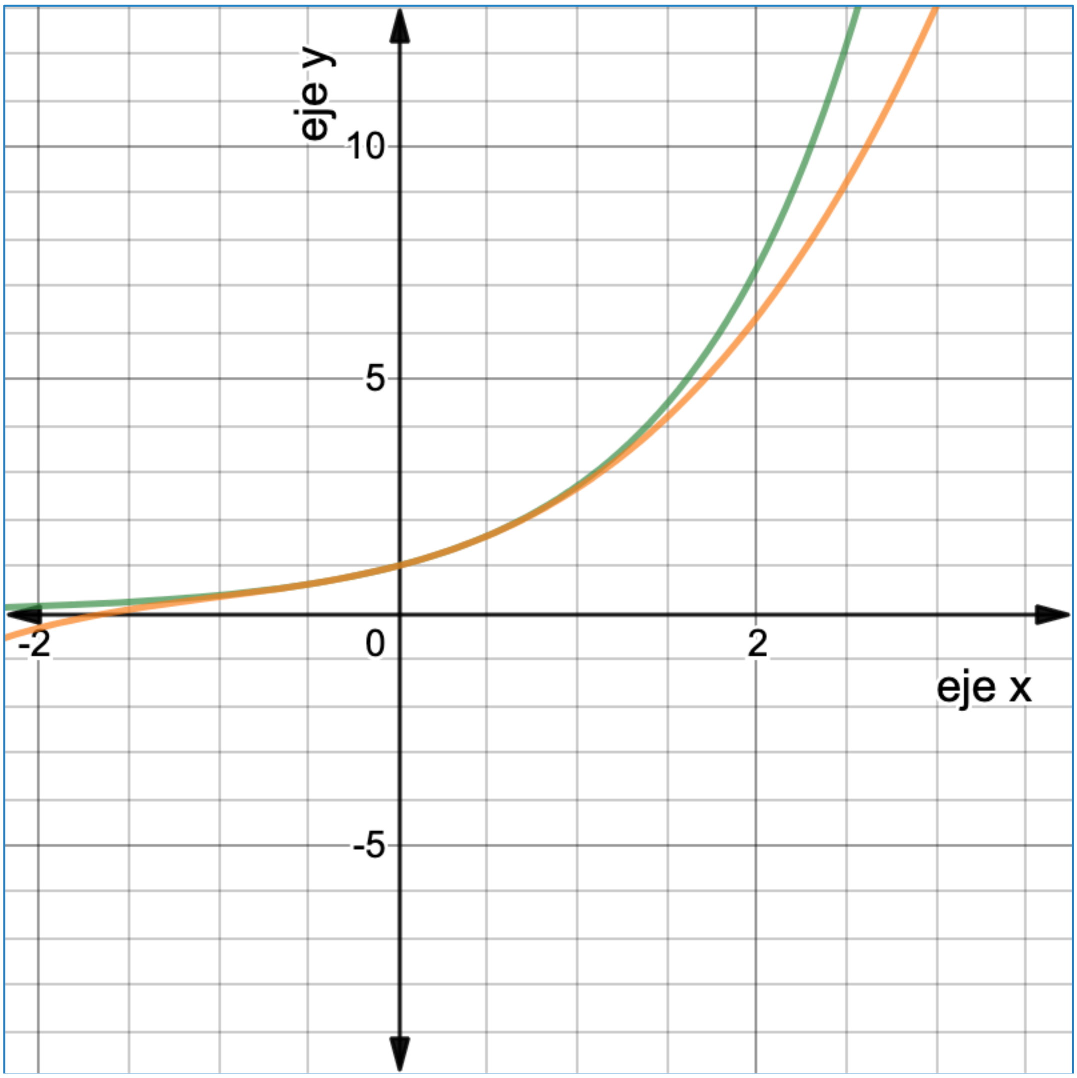


Representación gráfica de la serie de Taylor del $\sin x$ para n=3 y centrada en c=7.

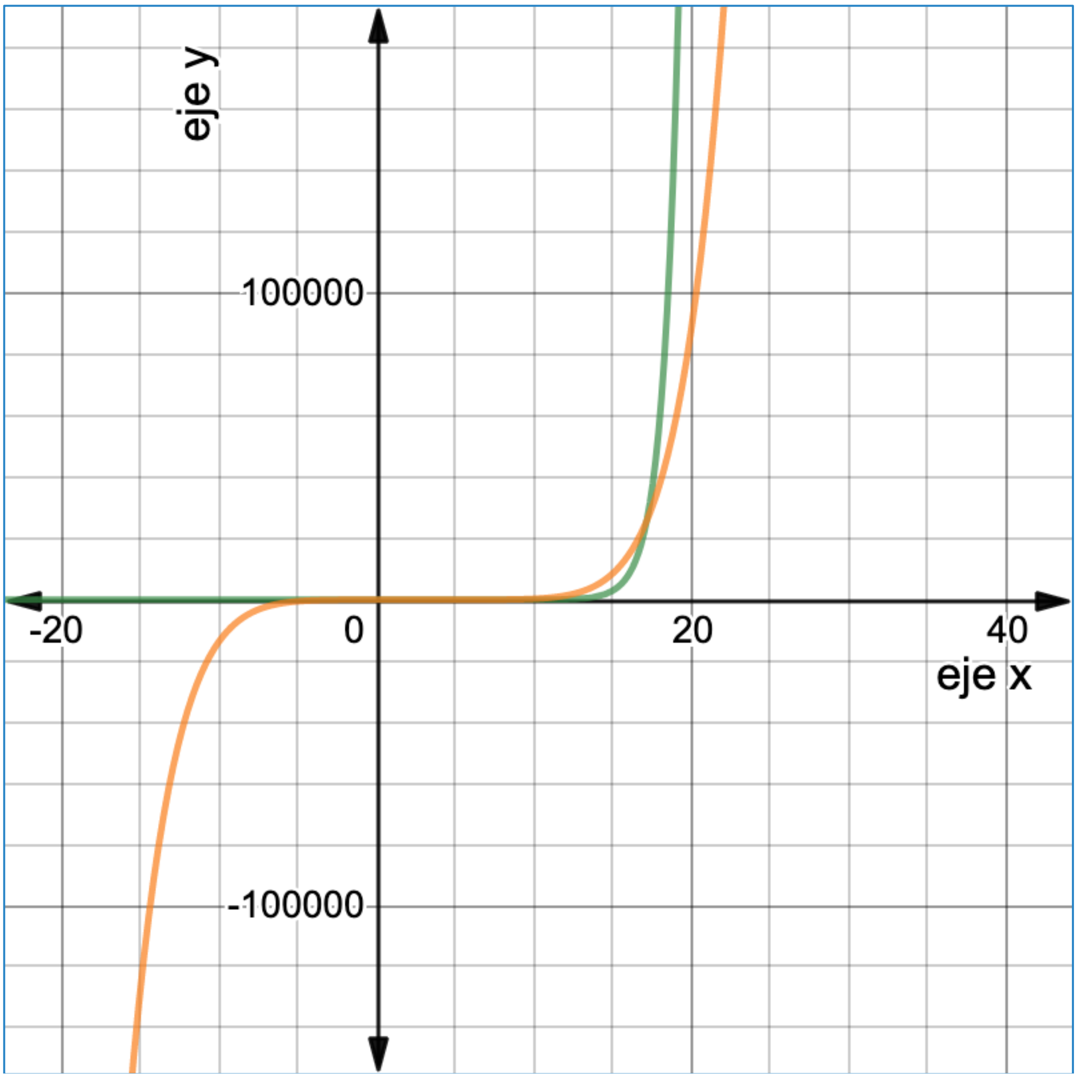
Se verifica como se traslada la función hacia la derecha.



Representación gráfica de la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$ para n=3.



Representación gráfica de la serie de Taylor de la $f(x) = e^x$ para n=20 centrada c=7



**Anexo 2**

**Encuesta para los docentes que imparten cálculo en UNIBE**

| |
|---|
| **Indique cuáles de los siguientes contenidos que dificultan el proceso de aprendizaje de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias:** |

| **No.** | **Contenidos** | **Total** |
|---|---|---|
| 1 | Conceptualización de límites | 4/4 |
| 2 | Conceptualización de sucesión | 2/4 |
| 3 | Conceptualización de series | 4/4 |
| 4 | Conceptualización del infinito actual | 0 |
| 5 | Otros, especifique | 0 |

| |
|---|
| Indique cuáles de los siguientes factores que dificultan el proceso de aprendizaje de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias: |

| **No.** | **Factores** | **Total** |
|---|---|---|
| 1 | El nivel de abstracción que requiere el tema | 2/4 |
| 2 | Lectura comprensiva del libro de cálculo | 4/4 |
| 3 | Otros, especifique | 0 |

Indique cuáles de las siguientes estrategias ha desarrollado en clase al impartir el tema de los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias:

| **No.** | **Estrategias** | Total |
|---|---|---|
| 1 | Aprendizaje autónomo | 1/4 |
| 2 | Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) | 2/4 |
| 3 | Aprendizaje Colaborativo | 2/4 |
| 4 | Clase invertida | 2/4 |
| 5 | Clase magistral | 4/4 |
| 6 | Exposición | 0 |
| 7 | Métodos de proyectos | 1/4 |
| 8 | Preguntas intercaladas | 0 |
| 9 | Lluvia de ideas | 0 |
| 10 | Trabajo de casos | 0 |
| 11 | Trabajo en equipo | 4/4 |
| 12 | Mapas mentales | 0 |
| 13 | Informe de lectura | 1/4 |
| 14 | Gamificación | 0 |
| 15 | Otras, especifique | 0 |

La escala que vamos a utilizar es del 1 al 5 según se indica

**1 = muy mala; 2 =mala; 3 =regular; 4=muy buena; 5=excelente**

| **No.** | **Conteste las siguientes preguntas** | **5** | **4** | **3** | **2** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | ¿Cómo ha sido su experiencia al impartir el tema los Criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias? | | | 4/4 | | |
| **2** | ¿Cómo es el rendimiento de sus estudiantes al impartir los criterios de convergencia de las series infinitas y las series de potencias? | | | 2/4 | | 2/4 |

**Anexo 3**

**Problema**: Calcular la altura y el volumen de la Pagoda 1 y de la Pagoda 2 para 7 pisos, 25 pisos, 100 pisos, de acuerdo con las especificaciones señaladas en el problema.

Pagoda 1: los radios son inversamente proporcional a la posición por piso.

Pagoda 2: los radios son la razón de $\frac{1}{2}$ elevada a la posición por piso.

Se divide el curso en cuatro grupos de estudiantes

El grupo1: va a calcular las diferentes alturas de la Pagoda 1

El grupo 2: va a calcular los diferentes volúmenes de la Pagoda 1

El grupo 3: va a calcular las diferentes alturas de la Pagoda 2

El grupo 4: va a calcular los diferentes volúmenes de la pagoda 2

**Pagoda 1** **Pagoda 2**

**Discutir y analizar los resultados con los diferentes grupos.**

**Anexo 4**

a) Revisión de los nuevos conceptos a través de un cuestionario.

1. Diferencia entre una sucesión y una serie convergentes
2. Sucesión acotada
3. Serie geométrica:
   a) Explicar cuando es convergente
   b) Si es convergente, encontrar su suma
4. Definir la serie p.

a) Explicar con ejemplos cuando la serie p es convergente y cuando es divergente.

5. Realizar en resumen de los criterios de convergencia indicando sus características de convergencia y de divergencia

**Anexo 5**

Aparee correctamente las siguientes series con los siguientes criterios de convergencia. Coloque el numero de la serie en la casilla No.1

| Series | No. 1 | Pruebas |
|---|---|---|
| 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ | 3 | Por comparación en el limite |
| 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{x^n}$ | 6 | Serie p |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5+11}}$ | 1 | Por comparación |
| 4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{n}$ | 8 | De la integral |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{11}}{(-11)^{n+1}}$ | 5 | De la razón |
| 6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{k^7}}$ | 4 | Serie alternante |
| 7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{8}{n^2-1}$ | 2 | Serie geométrica |
| 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(13n+3)^3}$ | 9 | De la raíz |
| 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^4}$ | 7 | Serie telescópica |

Determine si las series del ejercicio anterior son: convergentes (C); divergentes(D); absolutamente convergentes (Ab. C). Coloque el resultado en la casilla No. 2

| Series | No. 2 |
| --- | --- |
| 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ | D |
| 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{x^n}$ | C |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5+11}}$ | D |
| 4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ | C |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{11}}{(-11)^{n+1}}$ | Ab. C |
| 6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{k^7}}$ | C |
| 7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{8}{n^2-1}$ | C |
| 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(13n+3)^3}$ | C |
| 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^4}$ | D |

**Anexo 6**

Práctica sobre la representación de funciones como series de potencias y sus radios de convergencia.

**a) Defina:**

1) Serie de potencia. Escriba la forma mas general de una serie de potencias.

2) Explique cuales son las tres posibilidades de convergencia en una serie de potencias.

3) Defina radio de convergencia e intervalo de convergencia.

4) Explique cuando el radio de convergencia R es igual a 0. Cuando el radio de convergencia R =∞

5) Determine el intervalo de convergencia de la función de Bessel $J_0$de orden 0

**b) Dadas las siguientes series de potencias, determine su radio y su intervalo de convergencia.**

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{9n-1}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+6)^n}{\sqrt{n}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-9)^n}{n^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(3x-1)^n$

6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{\ln n}(x-b)^n$, a> 0

7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$

**c) Represente las siguientes funciones como serie de potencias y determine sus intervalos de convergencia.**

1) $f(x) = \frac{1}{1-7x}$

2) $f(x) = \frac{5}{1-4x^2}$

3) $f(x) = \frac{x}{2x^2+5}$

4) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

5) $f(x) = \frac{x^2}{a^3-x^3}$

6) $f(x) = \frac{3}{x^2-x-2}$

7) $g(x) = \frac{5}{2x-3}$ *centrada en c=-3*

8) $g(x) = \frac{4}{3x+2}$ *centrada en c=3*

9) $h(x) = \frac{3}{2x-1}$ *centrada en c=2*

**d) Use la derivación para determinar una representación como serie de potencia y su radio de convergencia para:**

1) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$

3) $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x^3)$

**e) Mediante la integración encuentre una representación como serie de potencias y su radio de convergencia para:**

1) $f(x) = \ln(1-x)$

2) $f(x) = \int_0^{0.3} \ln(1+x^5)\, dx$