DECANATO DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA SUPERIOR

Título

INTEGRALES DE FUNCIONES DE PARTE FRACCIONAL

Sustentante

Omar Pérez Veloz
2018-2223

Asesor

Carlos R. Valdez C. MSc

Santo Domingo, R. D.
Agosto 2020

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que siempre han contribuido en mi vida personal y profesional, y que me han permitido con su amistad, su ejemplo y consejos ser una mejor persona y tener a la vista el deseo de ser un profesional con competencias de excelencia.

Quiero agradecer profundamente a mi esposa **Pamela Lora Mendoza** por haberme animado a realizar esta maestría y por apoyarme en todo para que la pudiera concluir con éxito. Gracias amor por tu dedicación y por tu apoyo desmesurado.

A mi hermano mayor **Vladimir Perez Veloz** por ser un modelo a seguir, siempre has sido una admirable y una excelente persona. A mis padres, **Milagros** y **Domingo**, que siempre me ha apoyado en todo y siempre están para mi cuando los necesito.

Quiero agradecer a **Cruza Mendoza** y a **Nicolás Lora**, padres de mi amada esposa, por su soporte y por el apoyo que hemos recibido en el cuidado de nuestros hijos, mientras estaba inmerso en este proyecto.

Expreso mi gratitud a mis amigos y colegas de mi generación de mi carrera de formación: **Juan Manuel López, Washington Silvestre, Melvin Arias, José Miguel Liriano**, **José Ramón Álvarez** y **Víctor Liriano**: Porque siempre están prestos a alentar y apoyar en este tipo de emprendimiento.

No puedo dejar de reconocer a, mis amigas y compañeras de la maestría, **Mónica Santa** e **Iris María** por ser una fuente constante de apoyo y de ánimo.

Quiero agradecer profundamente a mis profesores de la maestría. Todos contribuyeron a mi formación y me siento muy honrado de haber sido parte de UNAPEC. En especial quiero mencionar al perenne **José Apolinar**: siempre le recordare estimado y querido profesor. No puedo dejar de mencionar, por sus aportes a nuestra formación y su dedicación al grupo de la maestría, a los profesores: **Ricardo Valdez, Ricardo Reynoso, Miguel Ángel Sánchez Almonte**, **Freddy Ramírez y Angela Martín** me siento muy agradecido por la interacción calidad que se estableció en clases ustedes dejaron sus marcas en mi formación. Deseo reconocer a mi profesor y asesor **Carlos Valdez** por sus asiduas y tenaces recomendaciones y guías para que esta tesis fuera una realidad en tan poco tiempo. Mi más sincero agradecimiento estimado profesor.

Quiero agradecer al **MESCyT** por darme la media beca que me permitió realizar esta maestría.

Dedicatoria

Este trabajo se lo dedico a mis hijos

Johannes Nicolás y Mileva Amirá

¡¡¡Ustedes son mi futuro!!! ¡¡¡Los amo!!!

Índice

Introducción

Una de las ramas más importantes de la matemática es el Análisis Matemático. Existen miles de referencias del análisis, tales como, artículos, libros, conferencias, clases universitarias, etc. Sin embargo, existen temas novedosos de matemática que son potencialmente relevante por su aparente relación con otras disciplinas del área de matemática que son de gran importancia, pero, no tienen una fundamentación clara con la formalidad matemática que amerita. Todas las áreas de la matemática comenzaron como una curiosidad de una persona, o como la solución de un problema práctico muy relevante por sus consecuencias económicas en la sociedad donde se concretó, o simplemente como consecuencia de las investigaciones previas realizados.

Las integrales de funciones de parte fraccional es un tema novedoso en la matemática, hasta el momento solo han sido vistas como mera curiosidad por los profesionales y amateur de la matemática, y no existe una colección de trabajos del tema que sea significativa, apenas hay como mucho alrededor de 50 publicaciones al respecto de un puñado de investigadores.

En esta investigación pretende indagar sobre el tema de las integrales de funciones de parte fraccional para reunir en un solo documento los avances del tema y tratar de conectarla con otras disciplinas, como la teoría de números y el análisis matemático, que, por ahora es una exótica nueva disciplina.

Capítulo I. Aspectos Introductorios

1.1 Planteamiento del problema de investigación.

La finalidad de este estudio documental sobre las ***Integrales de funciones de parte fraccional*** es indagar sobre los avances que se ha desarrollado alrededor del tema en los últimos años, y como ha madurado como disciplina matemática. Las integrales de funciones de parte fraccional son relativamente nuevas y desconocidas en matemáticas, muchos matemáticos las denominan integrales “exóticas” por su carácter novedoso. El interés en este tipo de integrales viene dado por su aparente y hasta ahora desconocida conexión con otras funciones especiales y constantes matemáticas, llamadas también “exóticas”, y con la teoría de números, una disciplina muy madura e influyente en la matemática. Explorar dichas conexiones es de interés matemático y podría servir de base para hacer estudios posteriores.

Las integrales de funciones de parte fraccional se resuelven usando técnicas inusuales a diferencia de las integrales convencionales. Investigar dichos métodos y técnicas son también cruciales en el ámbito de la matemática, con el fin de comparar los procedimientos deductivos con otros métodos proveniente de otras parcelas de la matemática.

Existen muy pocas publicaciones y estudios sobre estas integrales. Reunir los desarrollos y los avances importantes del área en un solo documento representa un pequeño avance en la conformación de una disciplina matemática, pero importante.

1.2 Preguntas de investigación

1. ¿Qué relación existen entre algunas integrales de funciones de parte fraccional con la constante de Euler-Mascheroni?
2. ¿Cuál es la relación de algunas integrales de funciones de parte fraccional con la función Zeta de Riemann y con otras funciones especiales?
3. ¿Cómo se resuelven algunas integrales de funciones de parte fraccional?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Analizar la relación de las integrales de funciones de parte fraccional con la constante de Euler-Mascheroni, con la función Zeta de Riemann y con otras funciones especiales.

1.3.2 Objetivos específicos

- Determinar las soluciones de algunas integrales de funciones parte fraccional relacionadas con la constante de Euler-Mascheroni.
- Calcular algunas integrales de funciones de parte fraccional que se relacionan con la función Zeta de Riemann y con otras funciones especiales.
- Analizar algunas integrales de funciones de parte fraccional clásicas y otras inéditas.

1.4 Justificación de la investigación

La MSC2020 (siglas en inglés de Mathematic Subject Classification) es un documento que preparan la Asociación de Editores de revisores de matemática y la zbMATH para regular las terminologías sobre las distintas disciplinas de la matemática. La MSC es consensuada con la comunidad de los matemáticos de todo el mundo. En la edición del 2020 el tema “Integrales de funciones de parte fraccional” no aparece, porque es un tema muy novedoso y aun no tiene suficientes matemáticos que lo estudien y por tanto no figura como una disciplina de la matemática. Pero tampoco aparece el término funciones de parte fraccional, lo que indica que no se publican libros ni artículos de matemáticas con esos temas de manera rutinaria.

Indagar sobre el tema en cuestión es fundamental para que se pueda convertir en una disciplina matemática y que la comunidad de matemáticos de todo el mundo pueda hacer referencia y hablar sobre el tema apropiadamente. Explorar las implicaciones matemáticas de estas integrales y ver en qué áreas de la matemática se pueden unificar o complementar resultan un aporte fundamental. No se puede dejar fuera la posibilidad de las aplicaciones fuera del campo matemático, es posible que existan fenómenos que no han sido apropiadamente explicado y tal vez esta herramienta pueda servir para darle claridad a una hipótesis no descubierta en las ciencias naturales.

De estas integrales existen tan pocos estudios formarles al respecto que se considera investigar el tema es un potencial semillero de nuevos descubrimientos.

1.5 Viabilidad de la investigación

Existen muchas pruebas de olimpiadas de matemática alrededor del mundo y en algunos exámenes han sido propuesto integrales de funciones de parte fraccional. Una pequeña cantidad de matemáticos se han dedicado a estudiar este tipo de integrales y han publicado varios artículos y al menos un libro. La cantidad de material que se revisará es relativamente pequeña para hacerse en un tiempo de un mes aproximadamente y los documentos están disponibles en internet. Por eso se considera viable realizar esta investigación, dado un tiempo corto para terminarla y por los recursos que se necesitan que ya están en manos del investigador.

1.6 Deficiencia del conocimiento del problema

En análisis matemático no aparecen referencias a las integrales de funciones de parte fraccional, y en los libros que hablan al respecto solo muestran ejemplos resueltos de las integrales. Hasta el momento no se ha encontrado referencia bibliográfica sobre las integrales de funciones de parte fraccional debidamente formalizada dentro de la estructura de la matemática.

A la fecha, no existen evidencia documental (artículos o libros) sobre cómo se relaciona las integrales de funciones de parte fraccional con las funciones especiales, con la teoría de números, series infinitas, etc. Conocidas las soluciones de muchas integrales de este tipo se infiere que debe de haber una relación, pero hasta ahora no se ha establecido formalmente. En este trabajo no se intentará buscar formalmente estas relaciones fundamentales, solo se resaltará en cada caso las sospechas y las razones evidenciadas de dichas aseveraciones.

Capitulo II. Marco de referencia

2.1 Marco teórico

2.1.1 Antecedentes

La matemática es un lenguaje formal que se desarrolló junto con las necesidades de organización de los seres humanos. Hasta el momento, la matemática, es una disciplina en la cultura humana con mayor expansión en todas las demás ramas de la cultura.

Por ejemplo, el concepto de función es reciente comparado con la historia de la humanidad, apenas tiene unos 400 años. La idea de una función no se ha mantenido en el tiempo, ha evolucionado con la matemática y sus necesidades de cambios para abarcar cada vez más campos de aplicación en las actividades y en el pensamiento abstracto de los seres humanos.

Las integrales de funciones de parte fraccional se han ventilado en competencias de Olimpiadas de matemática. No ha surgido como un problema practico o de una solución a un problema de las ciencias naturales. Probablemente por esa razón no se ha desarrollado como una disciplina matemática propia.

Las funciones de parte fraccional se definen a partir de las funciones enteras de redondeo por exceso o defecto. Las funciones enteras son fundamentalmente modernas, y ligadas al campo de la electrónica y de la informática, disciplina matemática que se ha ganado el derecho propio de disciplina formal independiente.

El interés en el campo de las integrales de funciones de parte fraccional en la mayoría de los casos se circunscribe a una competencia o simple curiosidad matemática. Hasta el momento no se ha establecido una relación de estas integrales con otras áreas de la matemática de manera rigurosa, solo se discute que sí debe de existir debido al tipo de soluciones que se obtiene de estas integrales, que dan una pista evidenciada y creíble de la importancia de éstas.

2.2 Sucesiones y Series

Una sucesión $\{a_n\}$ es una función que depende de los enteros positivos n, que bien podría expresarse con esta notación $f(n)$.

Se dice que una sucesión es finita cuando la sucesión tiene finitos términos, por ejemplo:

La sucesión $g(n) = 2n + 1$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6,7,8 , 9$. Solo tiene 9 términos.

Se dice que una sucesión es infinita cuando tiene infinitos términos:

La sucesión $h(n) = n(n + 1)$, $n = 1, 2, 3, ...$ Es una sucesión infinita, por ejemplo.

En adelante, todas las sucesiones a las que se haga referencia serán siempre una sucesión infinita.

El límite de una sucesión se establece de la siguiente manera: Sea $\{a_n\}$ una sucesión infinita con $n \in \mathbb{Z}^+$. Si para todo número positivo ε se puede determinar otro número N dependiente de ε de tal forma que $|a_n - \lambda| < \varepsilon$ para todo número entero positivo $n > N$. Se puede concluir que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$$

Cuando el límite de una sucesión infinita es un valor finito, se dice que la sucesión infinita converge, de lo contrario se dice que la sucesión diverge.

Se dice que una sucesión está acotada si

$$k \leq a_n \leq K$$

Para k y K constantes e independientes de n.

Se dice que una sucesión es monótona creciente si y solo si

$$a_{n+1} \geq a_n$$

Se dice que una sucesión es monótona decreciente si y solo si

$$a_{n+1} \leq a_n$$

Una serie S es la suma de los términos de una sucesión infinita. Así la serie de la sucesión a_n se puede expresar así:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si el término S existe para cuando $n \to \infty$ entonces la serie es convergente, de lo contrario es divergente.

Las series tienen las siguientes propiedades:

- Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pero, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces no necesariamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente. También lo contrario es cierto, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente también $k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
- Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + k)$ también es convergente. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + k)$ también será divergente.

2.2.1 Criterios de convergencia de las series

1. Para series de términos positivos:
   a. Criterio de comparación.
      i. Si una serie cuyo término $a_n > 0$ converge y al compararlas con el término de otra serie $b_n > 0$, se tiene $0 \leq b_n \leq a_n$, se puede concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también converge.
      ii. Si una serie cuyo término $a_n > 0$ diverge y al compararlas con el término de otra serie $b_n > 0$, se tiene $0 \leq a_n \leq b_n$, se puede concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.
   b. Criterio del cociente.
      i. Si dos series cuyos términos $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, y además $\frac{a_n}{b_n} = k$, siendo k diferente de cero y de infinito, se puede concluir que las series asociadas a los términos ambas convergen o divergen.
      ii. Del caso i, si el valor de k es cero, entonces las series asociadas a los términos convergen ambas.

        iii. Del caso i, si el valor de k es infinito, entonces las series asociadas a los términos divergen ambas.

   c. Criterio de la integral.

        i. Si convertimos la serie en una integral $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_{1}^{\infty} f(x)dx$, si la integral es convergente entonces la serie lo será también y lo contrario también es cierto.

2. Si la serie es de términos alterna.

   a. En este caso la serie es convergente si cumple con las siguientes condiciones

        i. $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, para todo $n \geq 1$

        ii. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

   b. Convergencia absoluta. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

   c. Convergencia absoluta condicional. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, pero $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

   d. Criterio de cociente. Si el $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k$, se puede concluir sobre la serie:

        i. Si $k < 1$ entonces la serie converge absolutamente.

        ii. Si $k > 1$ entonces la serie diverge.

        iii. Si $k = 1$ entonces no se puede determinar si la serie converge o no.

   e. Criterio de la raíz enésima. Si el $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$, se puede concluir sobre la serie:

        i. Si $k < 1$ entonces la serie converge absolutamente.

        ii. Si $k > 1$ entonces la serie diverge.

        iii. Si $k = 1$ entonces no se puede determinar si la serie converge o no.

   f. Criterio de Raabe. Si el $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = k$, se puede concluir sobre la serie:

        i. Si $k > 1$ entonces la serie converge absolutamente.

        ii. Si $k < 1$ entonces la serie diverge o converge condicionalmente.

        iii. Si $k = 1$ entonces no se puede determinar si la serie converge o no.

2.3 Integrales impropias

Se establece que una integral definida

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Es impropia si:

1) Si al menos uno de los límites de integración es infinito.
2) Si la función del integrando tiene alguna singularidad en el intervalo de la integral definida incluido al menos unos de los límites de integración.

Por ejemplo, la integral siguiente es una integral impropia:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{senx}{x} dx = \lim_{a\to\infty} \int_{0}^{a} \frac{senx}{x} dx$$

Existen diferentes clasificaciones de las integrales impropias que se verán más adelante.

2.3.1 Integrales impropias de primera especie

Se dice que una integral impropia es de primera especie si la función del integrando es acotada e integrable en el intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ y la integral está expresada de la siguiente forma

$$\int_{\alpha}^{\infty} g(x)dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Se dice que la integral cuyos límites son $[\alpha, \infty]$, en el primer miembro, es convergente si el límite de la otra integral existe, y diverge si dicho límite no existe.

Lo anterior es válido si la integral tiene la estructura que se muestra

$$\int_{-\infty}^{\beta} g(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Se dice que la integral cuyos límites son $[-\infty, \beta]$, en el primer miembro, es convergente si el límite de la otra integral existe, y diverge si dicho límite no existe.

2.3.1.1 Integrales de primera especie, criterios de convergencia

Si el límite de la integral impropia es infinito, o menos infinito, se deben usar unos de estos criterios que se mostrarán a continuación. Al igual que en las series infinitas, cuando un criterio falla se debe hacer la prueba con el siguiente.

1. **Criterio de comparación**. Este criterio se usa solo cuando el integrando es positivo en el rango de integración.
   a. Si el integrando es mayor que cero ($f(x) > 0$) para los valores de $x \geq \alpha$ y se sabe que la integral $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ converge. Si se cumple esta otra condición adicional $0 \leq h(x) \leq f(x)$ para los valores de $x \geq \alpha$, entonces se puede concluir que la integral $\int_{\alpha}^{\infty} h(x)dx$ también converge.
   b. Si el integrando es mayor que cero ($f(x) > 0$) para los valores de $x \geq \alpha$ y se sabe que la integral $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ diverge. Si se cumple esta otra condición adicional $f(x) \leq h(x)$ para los valores de $x \geq \alpha$, entonces se puede concluir que la integral $\int_{\alpha}^{\infty} h(x)dx$ también diverge
2. **Criterio del cociente**. Este criterio solo se puede aplicar cuando el integrando es positivo. Sean $f(x) \geq 0$ y $h(x) \geq 0$. Además, si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{h(x)} = L$. Se tienen los siguientes casos en función del valor de L
   a. Si el valor de L es finito, pero diferente de cero, las integrales $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ y $\int_{\alpha}^{\infty} h(x)dx$ convergen o divergen ambas.
   b. Si el valor de $L = 0$, y la integral $\int_{\alpha}^{\infty} h(x)dx$ converge, entonces se puede concluir que la integral $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ también converge.
   c. Si el valor de $L = \infty$ y también la integral $\int_{\alpha}^{\infty} h(x)dx$ diverge, entonces se puede concluir que la integral $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ diverge también.
3. **Criterio de serie**. Este criterio se aplica únicamente si el integrando es positivo. Si la función del integrando reconvertida en término de una serie$a_n = f(n)$ y esta converge o diverge la integral $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ converge o diverge de igual manera.
4. Convergencia absoluta y condicional. Una integral impropia $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ es convergente de manera absoluta si la integral del valor absoluto de la función del integrando $\int_{\alpha}^{\infty} |f(x)|dx$ converge. Ahora, la integral impropia $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ converge, empero la integral del valor

absoluto de la función del integrando $\int_{\alpha}^{\infty}|f(x)|dx$ diverge, se dice que la integral impropia converge condicionalmente.

5. Existen unos teoremas que son muy útiles para evaluar la convergencia de las integrales impropias:
    a. Teorema: Si $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = L$, entonces
        i. Cuando $p > 1$ y L tiene un valor finito, se tiene que la integral impropia $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ converge.
        ii. Cuando $p \leq 1$ y $L \neq 0$ (con posible valor en el infinito), se tiene que la integral impropia $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ diverge.
    b. Teorema: Si la integral impropia con el valor absoluto de la función del integrando $\int_{\alpha}^{\infty}|f(x)|dx$ es convergente, también converge la integral impropia original, $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$.

2.3.2 Integrales impropias de segunda especie

Si en el integrando de la integral impropia la función es no acotada en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ se dice que la integral impropia es de segunda especie. Así, queda definida cuando la función no es acotada en $x = \alpha$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\alpha+\epsilon}^{\beta} f(x)dx$$

Cuando el valor del límite de la integral del segundo miembro tiene un valor finito se dice que la integral impropia del primer miembro converge, pero en el caso opuesto, se dice que la integral del primer miembro diverge.

Así, queda definida cuando la función no es acotada en $x = \beta$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\alpha}^{\beta-\epsilon} f(x)dx$$

Cuando el valor del límite de la integral del segundo miembro tiene un valor finito se dice que la integral impropia del primer miembro converge, pero en el caso opuesto, se dice que la integral del primer miembro diverge.

Cuando la función de la integral impropia no es acotada en $x = x_0$, de manera que $\alpha \leq x_0 \leq \beta$, la integral impropia queda expresada de la siguiente manera

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{\alpha}^{x_0-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{x_0+\epsilon_2}^{\beta} f(x)dx$$

De manera parecida a lo que se establecido anteriormente, la integral impropia converge si y solo si las dos integrales del segundo miembro tengan un valor de límite finito.

En algunos casos, realmente extraños, los límites de las integrales del segundo miembro no arrojan valores finitos cuando se hacen los cálculos de manera independiente, con $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Pero si se toma el mismo valor $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$, que puede escribirse así

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\alpha}^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{x_0+\epsilon}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{\alpha}^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^{\beta} f(x)dx \right)$$

Si el limite tiene un valor finito en el segundo miembro, se dice que el limite es el valor principal de Cauchy la integral del primer miembro.

2.3.2.1 Integrales impropias de segunda especie. Criterios de convergencia.

1. **Criterio de comparación**. Este criterio se usa solo cuando el integrando es positivo en el rango de integración.
    a. Si el integrando es mayor que cero ($f(x) \geq 0$) para los valores de $\alpha < x \leq \beta$ y se sabe que la integral $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ converge. Si se cumple esta otra condición adicional $0 \leq h(x) \leq f(x)$ para los valores de $\alpha < x \leq \beta$, entonces se puede concluir que la integral $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$ también converge.
    b. Si el integrando es mayor que cero ($f(x) \geq 0$) para los valores de $\alpha < x \leq \beta$ y se sabe que la integral $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ diverge. Si se cumple esta otra condición adicional $f(x) \leq h(x)$ para los valores de $x \geq \alpha$, entonces se puede concluir que la integral $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$ también diverge
2. **Criterio del cociente**. Este criterio solo se puede aplicar cuando el integrando es positivo. Sean $f(x) \geq 0$ y $h(x) \geq 0$. Además, si $\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x)}{h(x)} = L$. Se tienen los siguientes casos en función del valor de L

a. Si el valor de L es finito, pero diferente de cero, las integrales $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ y $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$ convergen o divergen ambas.

b. Si el valor de $L = 0$, y la integral $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$ converge, entonces se puede concluir que la integral $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ también converge.

c. Si el valor de $L = \infty$ y también la integral $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$ diverge, entonces se puede concluir que la integral $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx$ diverge también.

3. **Convergencia absoluta y condicional**. Una integral impropia $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ es convergente de manera absoluta si la integral del valor absoluto de la función del integrando $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$ converge. Ahora, la integral impropia $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ converge, empero la integral del valor absoluto de la función del integrando $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$ diverge, se dice que la integral impropia converge condicionalmente.
4. Existen unos teoremas que son muy útiles para evaluar la convergencia de las integrales impropias:
   a. Teorema: Si $\lim_{x \to \alpha^+} (x - \alpha)^p f(x) = L$, entonces
      i. Cuando $p < 1$ y L tiene un valor finito, se tiene que la integral impropia $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ converge.
      ii. Cuando $p \geq 1$ y $L \neq 0$ (con posible valor en el infinito), se tiene que la integral impropia $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ diverge.
   b. Teorema: Si $\lim_{x \to \beta^-} (\beta - x)^p f(x) = l$, entonces
      i. Cuando $p < 1$ y l tiene un valor finito, se tiene que la integral impropia $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ converge.
      ii. Cuando $p \geq 1$ y $l \neq 0$ (con posible valor en el infinito), se tiene que la integral impropia $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ diverge
   c. Teorema: Si la integral impropia con el valor absoluto de la función del integrando $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$ es convergente, también converge la integral impropia original, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

2.4 Función Gamma

Función Gamma se escribe $\Gamma(n)$ y se define así

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x} dx$$

La función Gamma es conocida como la función factorial. Se puede observar la función Gamma queda definida con una integral impropia.

Existen varias definiciones de la función Gamma, la primera fue suministrada por Leonard Euler en el 1729, existen registros de ello en varias correspondencias que intercambió Euler con el matemático Goldbach. Para ese entonces solo se conocía el factorial, pero no la función que generaliza el factorial para cualquier valor real mayor que cero.

La forma generalizada de la función Gamma es

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-x} dx$$

En donde la parte real de z es mayor que cero, $\Re(z) > 0$. La función Gamma definida sobre los números complejos es meromorfa, si se extiende sobre todo el conjunto de los complejos, con polos en $n = 0, -1, -2, \ldots$

Se puede observar en el gráfico de la función Gamma esta propiedad

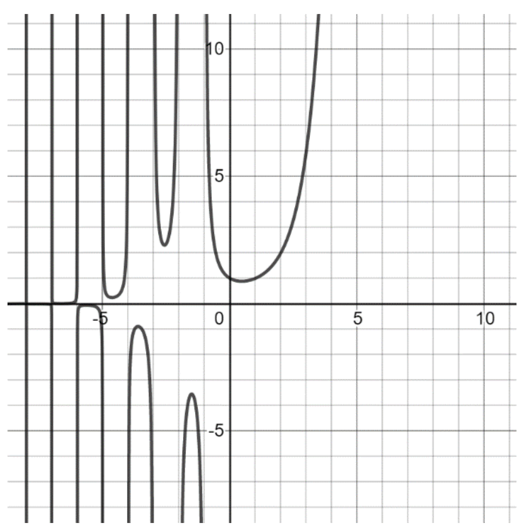

Figura 1. Función Gamma.

La propiedad principal de la función gamma es la relación de recurrencia que exhibe:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

De la relación anterior se puede deducir esto

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1)$$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)n\Gamma(n)$$

Es una propiedad muy útil para determinar los valores de la función Gamma.

La fórmula de reflexión de Euler también es muy importante:

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{sen(\pi z)}$$

En esta expresión se puede observar fácilmente los polos que la función Gamma.

También se encuentra la fórmula de reflexión de Legendre

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

Existe un valor muy conocido de la función Gamma

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Otros valores interesantes son

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$$

Existen otras definiciones de la función Gamma que son equivalente entre si. Otra definición de la Función Gamma de Euler es:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{z}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right]$$

Dado en términos de una productoria. Está también la definición de Weierstrass, con las mismas propiedades deducidas por Euler:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$$

En donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

La función Gamma se puede expresar en función de los términos de los Polinomios de Laguerre generalizados:

$$\Gamma(z,x) = x^{z}e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(z)}(x)}{n+1}$$

Con un rango de convergencia para los valores de la parte real mayor que menos uno y con x mayor que cero, ($\Re(z) > -1, x > 0$).

2.5 La función Poligamma

Se dice que una función Poligamma de orden m, $\psi^{(m)}(z)$, queda definida por *(m+1)*ésima derivada del logaritmo natural de la función Gamma, que se expresa así:

$$\psi^{(m)}(z) \equiv \frac{d^m}{dz^m}\psi(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln\Gamma(z)$$

La función Poligamma en forma integral queda definida de la siguiente manera:

$$\psi^{(m)}(z) = (-1)^{m+1}\int_0^\infty \frac{t^m e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt = -\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1-t}(\ln t)^m dt$$

Esta función exhibe la siguiente relación de recurrencia

$$\psi^{(m)}(z+1) = \psi^{(m)}(z) + \frac{(-1)^m\, m!}{z^{m+1}}$$

La función Poligamma se puede representar mediante una serie:

$$\psi^{(m)}(z) = (-1)^{m+1}\, m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{m+1}}$$

La función Poligamma de orden cero es la función Digamma:

$$\psi^{(0)}(z) = \frac{[\Gamma(z)]'}{\Gamma(z)}$$

2.6 Función Beta

La función Beta, es también conocida como la primera integral principal de Euler. Esta función está definida

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}dt$$

A continuación, se muestran las propiedades más importantes de la función Beta

- La función Beta muestra la propiedad de ser simétrica:
$$B(x,y) = B(y,x)$$
- La función Beta está relacionada con la función Gamma:
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

La función Beta tiene otras representaciones equivalentes que son útiles para realizar integrales. Se puede expresar en función de las funciones básica de seno y coseno:

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (sen\,\theta)^{2x-1}\,(\cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

En ocasiones, con un cambio de variables puede quedar así

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

2.7 La función Zeta de Riemann

La función Zeta de Riemann es una función de las funciones especiales más importantes de la matemática. También tiene un papel preponderante en la física, por ejemplo, en el modelo matemático del efecto Casimir.

La función Zeta de Riemann es una función de variable compleja continuamente analítica del tipo de la Serie de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

La serie converge cuando la parte real del complejo s es mayor que 1. Existen muchas formas de representar la función Zeta de Riemann.

La función Zeta es una de las funciones especiales más importante en teoría de número, en análisis matemático y en física. Esta función especial se relaciona con muchas otras, es unas de las funciones más estudiadas, posiblemente la más estudiada.

La función Zeta de Riemann se puede expresar en forma integral (con $Re(s) > 1$)

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

De esta expresión se puede demostrar la definición que se hizo al principio de la sección. La fracción del integrando se puede reescribir así

$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x^{s-1} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}$$

Este término se puede simplificar cuando se multiplica el término de la sumatoria por e^{-x}

$$e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)x} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$$

De ese modo la expresión original queda así

$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = x^{s-1} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$$

Se reintroduce en la integral

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-kx}dx$$

Se hace el cambio de variables $u = kx$, en consecuencia $du = kdx$, se introducen estos cambios y se tiene

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty \left(\frac{u}{k}\right)^{s-1} e^{-u}\,\frac{du}{k} = \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}dx$$

La integral que queda en el segundo miembro es la función Gamma $\Gamma(s)$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\Gamma(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$$

La función Zeta de Riemann aparece como resultado en varias integrales, como por ejemplo en la unidad cuadrada integral

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{[-\ln(xy)]^s}{1-xy}dxdy = \Gamma(s+2)\zeta(s+2)$$

La ecuación funcional de reflexión en la función Zeta de Riemann es

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

Una versión derivada de esta ecuación funcional de reflexión es

$$\frac{1}{(2\pi)^{s/2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{(2\pi)^{(1-s)/2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

La expresión anterior es simétrica.

En toda función de variable compleja que no contenga singularidades esenciales se puede extender analíticamente, la expresión es

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\gamma_k(s-1)^k$$

En donde γ_k son las constantes de Stieltjes.

Los valores de la función Zeta de Riemann tienen la particularidad de estar relacionada con otras funciones especiales. En adelante se mostrarán algunas:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

En donde B_{2n} es el número de Bernoulli $2n$. A continuación, se muestra otra relación interesante

$$\zeta(-n) = \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

Una forma muy usual en teoría de números es representar la función Zeta como una productoria involucrando los números primos p:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

2.7 Constantes de Stieltjes

Las constantes de Stieltjes γ_n provienen del desarrollo de Laurent de la función Zeta de Riemann, estas constantes representan los coeficientes de la expansión de la serie. Si se desarrolla la función Zeta en series de Laurent, cuya singularidad evitable en $s = 1$, queda como sigue

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n$$

Las constantes de Stieltjes quedan definidas por la siguiente expresión

$$\gamma_n = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{ln^n k}{k} \right) - \frac{ln^{n+1} m}{n+1} \right]$$

La constante de Euler-Mascheroni es la constante de Stieltjes cuando n es cero, lo que reduce la expresión anterior

$$\gamma_0 = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \right) - \ln m \right]$$

2.8 Constante de Glaisher-Kinkelin

Definición de la constante de Glaischer-Kinkelin A está dada por la siguiente expresión

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} k^k}{n^{n^2/2+n/2+1/12} e^{-n^2/4}}$$

2.9 Los Números Armónicos

Un número armónico n se define como la suma de los recíprocos de los n primeros números naturales

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Leonhard Euler definió con una integral estos números

$$H_n = \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} dx$$

Pero, esta definición es más práctica para determinar los números armónicos

$$H_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^k dx$$

2.10 Funciones de parte fraccionada

Una función de parte fraccional de x es:

$$\{\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{x} - \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$$

donde $\{x\}$ es la representación de la función de parte fraccional, x es el valor de la variable y $\lfloor x \rfloor$ es el valor entero redondeado por defecto. Si el valor de la variable x es 2.5, entonces la parte fraccional es

$$\{\mathbf{2.5}\} = \mathbf{2.5} - \lfloor \mathbf{2.5} \rfloor$$

$$\{\mathbf{2.5}\} = \mathbf{2.5} - \mathbf{2}$$

$$\{\mathbf{2.5}\} = \mathbf{0.5}$$

Si construimos una función a partir de la anterior para graficar, ver Figura 1, tendremos

$$\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{x} - \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$$

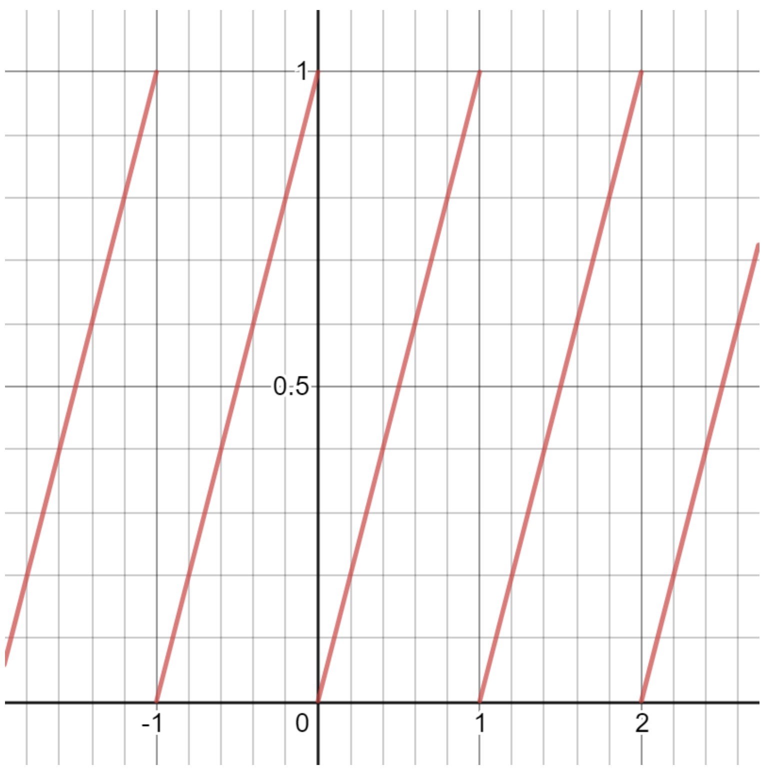

Figura 2. Gráfico de $y = \{x\}$

Si construimos una función a partir de la anterior para graficar, tendremos

$$\boldsymbol{y} = \left\{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}\right\}$$

Definida en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, el gráfico lucirá de esta forma

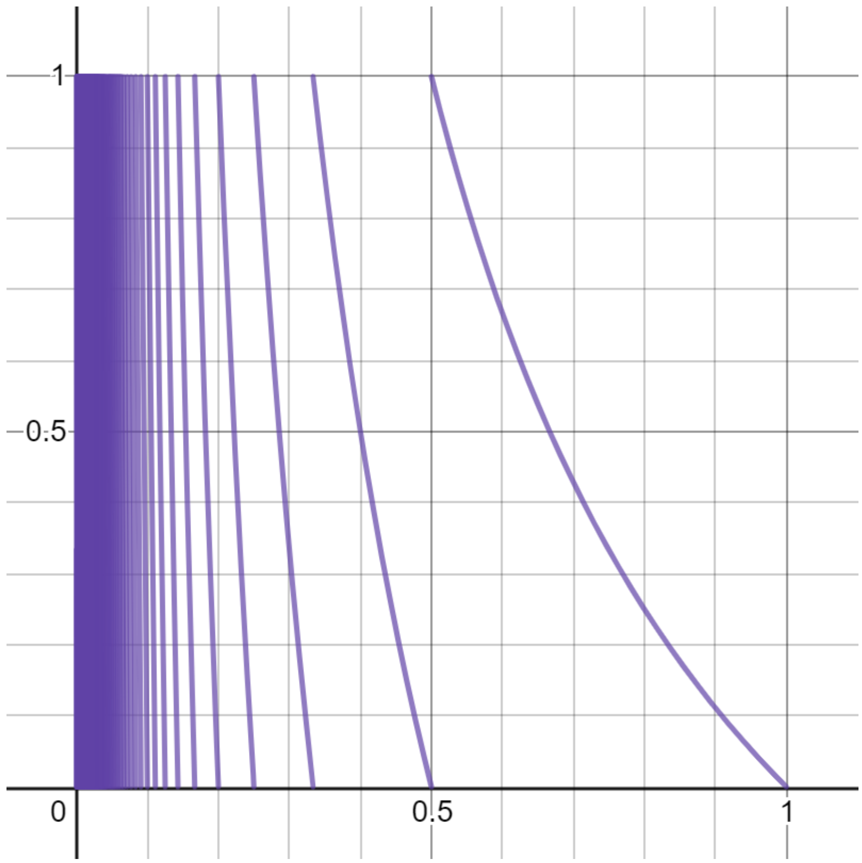

Figura 3. Grafica de la función $y = \{1/x\}$

Las funciones de parte fraccional tienen las siguientes propiedades:

$$\{x + a\} = \{x\}; a \in \mathbb{Z}$$

$$\{x\}^n = (x - 1)^n; 0 \leq x < 1$$

$$\{x\}^n = (x - 2)^n; 1 \leq x < 2$$

2.11 Integrales de funciones de parte fraccionada

Una integral de funciona de parte fraccional es una integral que tiene un término en el integrando que sea fraccional, por ejemplo

$$\int G(x)\{f(x)\}dx$$

En el ejemplo la función G(x) no es una función de parte fraccional, pero si lo es la función {f(x)}, con que tenga una función de parte fraccional es suficiente para la integral sea de parte fraccional.

El gráfico, observe la Figura 3, de la integral

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}dx$$

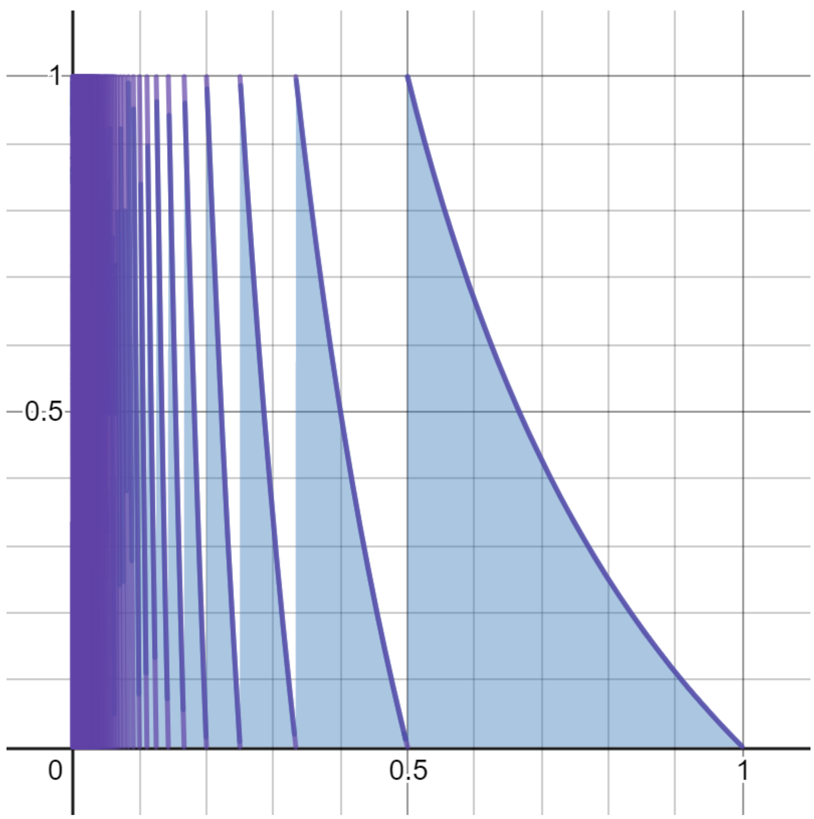

Figura 4

Capitulo III Diseño metodológico

3.1 Generalidades

La metodología consiste en la documentación y estudio de las referencias y los temas desarrollados por los diferentes autores que ha contribuido al desarrollo de esta nueva disciplina.

3.2 Tipo de investigación

Esta investigación es del tipo cualitativa dado el carácter documental usado. Aunque en esta investigación se presentan cálculos de integrales de funciones de parte fraccional, estos cálculos no son inéditos. El aporte que se ofrece la investigación consiste en la recopilación de las ideas centrales de las integrales de parte fraccional en el análisis matemático y en teoría de números. Se han realizado muchos trabajos de investigación que involucra estas integrales, este trabajo de investigación los reunirá de manera coherente.

3.3 Según el objetivo

Investigación de indagación

Las investigaciones de indagación consisten en documentación sobre los desarrollos que se han realizado sobre el tema en cuestión. En este trabajo de investigación se indagará sobre el estado del arte de las integrales de funciones de parte fraccional, cómo los matemáticos han integrado el tema en dentro de las diferentes categorías de la matemática. También se explorará de estas integrales sus aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

3.4 Según nivel de profundidad

Investigación exploratoria

En esta investigación se propone hacer modestas contribuciones de nuevos desarrollos y de nuevos conocimientos. En este caso, sí habrá una contribución dado que se reunirá el cuerpo de conocimiento sobre las integrales de funciones de parte fraccional de una manera ordenada, sistematizada y coherente. Estos atributos pueden arrojar luz sobre la estructura del tema respecto a otras disciplinas matemáticas.

3.5 Según el grado de manipulación de las variables

En esta investigación el objeto de estudio no es una variable, ni puede asumirse como tal. Como es una investigación cualitativa no es necesaria la utilización de variables.

3.6 Según tipo de inferencia

Método inductivo

El método inductivo servirá para que, a partir de las partes, las contribuciones de cada matemático al tema de las integrales de las funciones de parte fraccional, se pueda dar un orden, coherencia y sistematicidad al tema tratado, que será el producto que se obtenga.

3.7 Métodos y software utilizados

Los métodos que se utilizarán serán los que se suelen usar en Análisis matemático para la realización de las integrales y en la determinación de las sumas infinitas. Se utilizará software para hacer gráficos y comprobaciones numéricas de las soluciones que se encuentren de las integrales. Para ello utilizaremos *Desmos* y *Mathematica*.

3.8 Método deductivo

En la realización de este trabajo se revisarán los cálculos de los investigadores para poder llegar a una comprensión de los desarrollos presentados y desarrollar las competencias para poder relacionar cada contribución y tratar de darle cohesión teórica a la temática.

Capítulo IV Resultados

4.1 Generalidades

Las integrales de parte fraccionadas son integrales avanzadas. Estas integrales solo pueden resolverse mediante métodos no convencionales: integrales impropias, métodos asintóticos, series infinitas y funciones especiales, tales como funciones Gamma, Beta, Zeta, Poligamma, etc.

En este apartado se presentarán un panorama general sobre el estado actual de desarrollo de las integrales de funciones de parte fraccional. Algunas de las integrales resueltas se lo han sido de manera inédita.

4.2 Soluciones de algunas Integrales de funciones de parte fraccional

4.2.1 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx$

Para resolver esta integral primero hacemos un cambio de variables

$$u = \frac{1}{x}$$

De este modo tendremos los diferenciales

$$du = -\frac{1}{x^2}dx$$

$$-\frac{1}{u^2}du = dx$$

Los nuevos límites de integración quedarían

$$x \to 0 \therefore u \to \infty$$

$$x = 1 \therefore u = 1$$

La nueva integral tendrá la siguiente forma

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx = -\int_\infty^1 \frac{\{u\}}{u^2} du$$

Aplicamos la siguiente propiedad de las integrales

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Y obtenemos

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx = \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^2} du$$

Para seguir con la solución de la integral se debe apelar las propiedades de las funciones de parte fraccional:

$$\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$$

En donde $\lfloor u \rfloor$ es la parte entera de u, para simplificar la notación se usará k. Se puede observar que la integral se debe evaluar desde $u = 1$ hasta u cuando tiende al infinito, en ese intervalo el valor de k va creciendo en 1 en cada etapa sucesiva. La integral queda expresada de esta manera cuando se aplica las propiedades de las funciones fraccionales:

$$\int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^2} du = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{(u-k)}{u^2} du$$

La forma de esta integral es muy convencional

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{(u-k)}{u^2} du = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{u} - \frac{k}{u^2}\right) du = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln u + \frac{k}{u}\right)_k^{k+1}$$

Al evaluar la integral y simplificar se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}\right)$$

Para hacer relucir la relación de esta integral con la constante de Euler-Mascheroni se suma y resta el inverso de k, para tener la siguiente expresión

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k}\right)$$

Se reagrupan los términos y se observa claramente donde emerge la constante de Euler-Mascheroni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)$$

El primer término tiende a 1 y el segundo es la famosa constante de Euler-Mascheroni. Así la integral queda resuelta de este modo

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = 1 - \gamma_0$$

4.2.2 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}\left\{\frac{1}{1-x}\right\} dx$

Se hace la sustitución

$$u = \frac{1}{x}$$

Que trae como consecuencia

$$du = -\frac{1}{x^2}dx$$

$$-\frac{du}{u^2} = dx$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{u}} = \frac{u}{u-1}$$

Los límites de integración quedan

$$x \to 0 \therefore u \to \infty$$

$$x = 1 \therefore u = 1$$

De manera que la integral queda con la siguiente estructura

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}\left\{\frac{1}{1-x}\right\} dx = -\int_\infty^1 \{u\}\left\{\frac{u}{u-1}\right\}\frac{du}{u^2} = \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^2}\left\{\frac{u}{u-1}\right\} du$$

Ahora se fracciona la integral en dos partes y se evalúan por separado

$$I = \int_1^2 \frac{\{u\}}{u^2}\left\{\frac{u}{u-1}\right\} du + \int_2^\infty \frac{\{u\}}{u^2}\left\{\frac{u}{u-1}\right\} du = I_1 + I_2$$

Para resolver la integral I_1 se hace la siguiente transformación de variables

$$u - 1 = v$$

$$du = dv$$

$$u = 1 \therefore v = 0$$

$$u = 2 \therefore v = 0$$

$$\int_{1}^{2} \frac{\{u\}}{u^2}\left\{\frac{u}{u-1}\right\} du = \int_{0}^{1} \frac{\{v+1\}}{(v+1)^2}\left\{\frac{v+1}{v}\right\} dv$$

Por las propiedades de la función de parte fraccional $\{v+1\} = \{v\}$, pero el valor de v está definido en el intervalo $0 \leq v \leq 1$, en consecuencia $\{v\} = v$. El otro término también se puede simplificar

$$\left\{\frac{v+1}{v}\right\} = \left\{1 + \frac{1}{v}\right\} = \left\{\frac{1}{v}\right\}$$

Si se actualizan los cambios en la integral se tiene

$$\int_{0}^{1} \frac{\{v+1\}}{(v+1)^2}\left\{\frac{v+1}{v}\right\} dv = \int_{0}^{1} \frac{v}{(v+1)^2}\left\{\frac{1}{v}\right\} dv$$

Se introduce otro cambio de variables

$$t = \frac{1}{v}$$

$$dt = -\frac{1}{v^2} dv$$

$$-\frac{1}{t^2} dt = dv$$

Los límites de integración quedan:

$$v \to 0 \therefore t \to \infty$$

$$v = 1 \therefore t = 1$$

La integral queda

$$\int_{0}^{1} \frac{\{v+1\}}{(v+1)^2}\left\{\frac{v+1}{v}\right\} dv = -\int_{\infty}^{1} \frac{1}{t\left(\frac{1}{t}+1\right)^2} \frac{\{t\}}{t^2} dt = \int_{1}^{\infty} \frac{t^2}{t(1+t)^2} \frac{\{t\}}{t^2} dt = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t(1+t)^2} \{t\} dt$$

Aplicamos la propiedad de la función de parte fraccional y se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{t-k}{t(1+t)^2} dt$$

Se usa fracciones parciales para simplificar aún más el integrando

$$\int_{k}^{k+1} \frac{t-k}{t(1+t)^2} dt = \int_{k}^{k+1} \left(\frac{-k}{t} + \frac{k}{t+1} + \frac{k+1}{(t+1)^2}\right) dt$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \left(\frac{-k}{t} + \frac{k}{t+1} + \frac{k+1}{(t+1)^2}\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-k \ln t + k \ln(t+1) - \frac{k+1}{t+1}\ \right)_{k}^{k+1}$$

Ahora se evalúa la integral y se simplifica

$$I_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) + k \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) + \frac{1}{k+2}\right)$$

Para realizar la integral I_2

$$I_2 = \int_{2}^{\infty} \frac{\{u\}}{u^2} \left\{\frac{u}{u-1}\right\} du$$

se procede de la siguiente manera

$$I_2 = \int_{2}^{\infty} \frac{\{u\}}{u^2} \left\{\frac{u}{u-1}\right\} du = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{(u-k)}{u^2} \left(\frac{u}{u-1} - 1\right) du = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{(u-k)}{u^2} \left(\frac{1}{u-1}\right) du$$

Se aplica fracciones parciales para simplificar

$$\sum_{k=2}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \left(\frac{k-1}{u} + \frac{k}{u^2} + \frac{1-k}{u-1}\right) du$$

$$I_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \left((k-1) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + (k-1) \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) + \frac{1}{k+1}\right)$$

Ahora se hacen unos arreglos para que los índices de suma sean similares a la otra integral

$$I_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) + k \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) + \frac{1}{k+2}\right)$$

Se puede observar que $I_1 = I_2$, por lo que la integral es

$$I = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) + k \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) + \frac{1}{k+2}\right)$$

Si esta expresión se evalúa en una computadora se tiene que este valor es

$$\int_{0}^{1} \left\{\frac{1}{x}\right\} \left\{\frac{1}{1-x}\right\} dx = 2\gamma_0 - 1$$

4.2.3 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\} dx$

Asumiendo la sustitución $\frac{k}{x} = z$, en la integral se obtiene

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\} dx = k\int_k^\infty \frac{\{z\}}{z^2} dz = k\sum_{l=k}^\infty \int_l^{l+1} \frac{z-l}{z^2} dz = k\sum_{l=k}^\infty \left(\ln\frac{l+1}{l} - \frac{1}{l+1}\right)$$

Con esto se muestra que

$$S_n = \sum_{l=k}^n k\left(\ln\frac{l+1}{l} - \frac{1}{l+1}\right)$$

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{l=k}^n k\left(\ln l + 1 - \ln l - \frac{1}{l+1}\right) \\ &= k\left(\ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{k+1}\right) + k\left(\ln(k+2) - \ln(k+1) - \frac{1}{k+2}\right) \\ &+ k\left(\ln(k+3) - \ln(k+2) - \frac{1}{k+3}\right) + k\left(\ln(k+4) - \ln(k+3) - \frac{1}{k+4}\right) + \cdots \\ &+ k\left(\ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right) + k\left(\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$S_n = k\left(-\ln k - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{1+n} - \ln(n+1)\right)\right)$$

Y lo anterior visto implica que $\lim_{n\to\infty} S_n = k\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k - \gamma\right)$. De este modo queda demostrado la integral.

Utilizando la sustitución $x = \frac{q}{y}$ se obtiene

$$I = \int_0^1 \left\{\frac{q}{x}\right\} dx = q\int_q^\infty \frac{\{y\}}{y^2} dy$$

Con esto se presentan dos casos

a) Cuando $q \leq 1$

$$I = q\left(\int_q^1 \frac{1}{y} dy + \sum_{k=1}^\infty \int_k^{k+1} \frac{y-k}{y^2} dy\right)$$

$$I = q\left(\ln\frac{1}{q} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$I = q(1 - \gamma - \ln q)$$

b) Cuando $q > 1$

$$I = q\left(\int_{q}^{q+1}\frac{y-q}{y^2}\,dy + \int_{q+1}^{\infty}\frac{\{y\}}{y^2}\,dy\right)$$

$$I = q\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1+q} - \gamma - \ln q + \frac{q(\{q\}-1)}{q(1+q)}\right)$$

4.2.4 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^2 dx$

Para hacer esta integral se debe hacer la siguiente transformación de variables

$$u = \frac{1}{x}$$

$$du = -\frac{1}{x^2}dx$$

$$-\frac{du}{u^2} = dx$$

Los límites de integración cambiaran por la siguiente razón

$$u(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

$$u(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Ahora se sustituye en la integral original para seguir con las operaciones de resolución

$$I = \int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^2 dx = -\int_\infty^1 \{u\}^2\frac{du}{u^2} = \int_1^\infty \frac{\{u\}^2}{u^2}\, du$$

Ahora se aplica las propiedades de las funciones de parte fraccional $\{u\} = u - k$, y se expande el binomio

$$\int_1^\infty \frac{\{u\}^2}{u^2}\, du = \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{(u-k)^2}{u^2}\, du = \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} \frac{u^2 - 2ku + k^2}{u^2}du$$

Se simplifica el binomio con el denominador (u^2), para luego integrar

$$I = \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\left(1 - \frac{2k}{u} + \frac{k^2}{u^2}\right)du = \sum_{k=1}^{\infty}\left[u - 2k\ln u - \frac{k^2}{u}\right]_k^{k+1}$$

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(k + 1 - 2k \ln(k+1) - \frac{k^2}{k+1} \right) - \left(k - 2k \ln(k) - \frac{k^2}{k} \right) \right]$$

Se reorganizan los términos y se suman los términos racionales

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-2k \ln(k+1) + \frac{k^2 + 2k + 1 - k^2}{k+1} + 2k \ln(k) \right)$$

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2k \ln(k) - 2k \ln(k+1) + \frac{2k+1}{k+1} \right)$$

Se vuelven a simplificar el término racional resultante para poder hacer simplificaciones más adelante

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2k \ln(k) - 2k \ln(k+1) + \frac{1}{k+1} + \frac{2k}{k+1} \right)$$

Para determinar la suma de todos los términos se procede con la suma parcial de la expresión encontrada. Se puede observar que la expresión es una serie telescópica, lo que implica que se puede simplificar a unos pocos términos fáciles de determinar.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(2k \ln(k) - 2k \ln(k+1) + \frac{1}{k+1} + 2 \right)$$

$$\begin{aligned} s_n = {} & 2\ln(1) - 2\ln(2) + \frac{1}{2} + 2 + 4\ln(2) - 4\ln(3) + \frac{1}{3} + 2 + 6\ln(3) - 6\ln(4) + \frac{1}{4} + 2 + \cdots \\ & + 2(n-1)\ln(n-1) - 2(n-1)\ln(n) + \frac{1}{n} + 2 + 2n\ln(n) - 2n\ln(n+1) + \frac{n^2}{n+1} \\ & + 2 \end{aligned}$$

Se puede observar en esta serie que quedan $2 \ln k$ y otros términos racionales. La suma parcial se puede simplificar de la siguiente forma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(2\ln(k) + \frac{1}{k+1} + 2 \right) - 2n \ln(n+1)$$

El término que contiene el logaritmo se puede expresar en otros términos si se usa la propiedad de los logaritmos

$$\ln a + \ln b = \ln ab$$

De ese modo se puede simplificar la suma de los logaritmos

$$2\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = 2\ln n!$$

Existe una identidad para el logaritmo natural del factorial de n

$$2\ln n! = \ln(2\pi) + (2n-1)\ln(n) - 2n$$

Se sustituye en la expresión encontrada de la suma parcial de la integral, observe la importancia de haber dejado el término 2 al principio,

$$s_n = \ln(2\pi) + (2n-1)\ln(n) - 2n - 2n\ln(n+1) + 2n + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

Se simplifica los términos y se suma y resta 1 en la suma parcial para hacer que la sumatoria del segundo miembro comience en 1

$$s_n = \ln(2\pi) + 2n\ln(n) - \ln(n) - 2n\ln(n+1) - 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Para valores grandes de n se cumple que

$$\ln(n) = \ln(n+1)$$

En consecuencia, los términos se eliminan y queda la expresión como sigue

$$s_n = \ln(2\pi) - \ln(n) - 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \ln(2\pi) - 1 + \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - \ln(n)\right]$$

Con este último paso se tiene el resultado final.

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^2 dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \ln(2\pi) + \gamma_0 - 1$$

4.2.5 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^{n} \left\{\frac{1}{1-x}\right\}^{n} dx$

Para resolver la integral de función de parte fraccional

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^n \left\{\frac{1}{1-x}\right\}^n dx$$

Primero se hace el cambio de variable:

$$t = \frac{1}{x};\ t^2 = \frac{1}{x^2};\ x^2 = \frac{1}{t^2}$$

El diferencial de una respecto de la otra queda como se muestra a continuación:

$$dt = -\frac{1}{x^2};\ -\frac{1}{t^2}dt = dx$$

Los límites de integración con el cambio de variable quedan así:

$$x = 0; t = \infty$$

$$x = 1; t = 1$$

Cuando ingresamos los cambios en la integra original, ésta queda de la siguiente forma

$$-\int_\infty^1 \{t\}^n \left\{\frac{1}{1-\frac{1}{t}}\right\}^n dt = \int_1^\infty \frac{\{t\}^n}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt$$

Parece útil dividir la integral en dos partes, más adelante se verá la utilidad:

$$I_n = \int_1^2 \frac{\{t\}^n}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt + \int_2^\infty \frac{\{t\}^n}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n$$

Observe que la integral I_{n1} se evalúa en [1,2] y la integral I_{n2} se evalúa entre los valores $[2,\infty]$

$$I_{n1} = \int_1^2 \frac{\{t\}^n}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt$$

$$I_{n2} = \int_2^\infty \frac{\{t\}^n}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt$$

Primero centraremos el esfuerzo de la solución de $I_{n1} = \int_1^2 \frac{\{t\}^n}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt$

Como se ya se señaló, esta integral se integra desde 1 a 2, así que el valor de la parte fraccional queda restringido a $k = 1$. Por eso se hace la siguiente simplificación

$$I_{n1} = \int_1^2 \frac{\{t\}^n}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt = \int_1^2 \frac{(t-1)^n}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt$$

Ahora se hace un cambio de variable y hace los demás cambios en consecuencia:

$$t - 1 = y$$

$$t = 1; y = 0$$

$$t = 2; y = 1$$

Se procede con la sustitución en integral original y se simplifica

$$\int_0^1 \frac{y^n}{(y+1)^2}\left\{\frac{y+1}{y}\right\}^n dy = \int_0^1 \frac{y^n}{(y+1)^2}\left\{1+\frac{1}{y}\right\}^n dy = \int_0^1 \frac{y^n}{(y+1)^2}\left\{\frac{1}{y}\right\}^n dy$$

Se ve la necesidad de hacer otro cambio de variable y se hacen los ajustes necesarios en los límites de integración:

$$u = \frac{1}{y};\;\; du = -\frac{1}{y^2}dy;\;\; -\frac{du}{u^2} = dy$$

$$y = 1; u = 1$$

$$y = 0; u = \infty$$

Se sustituye todo en la integral precedente y se simplifica

$$-\int_\infty^0 \frac{1}{u^n\left(\frac{1}{u}+1\right)^2}\{u\}^n\frac{du}{u^2} = \int_0^\infty \frac{u^2}{u^n(1+u)^2}\frac{1}{u^2}\{u\}^n du$$

Se aplica la propiedad de las funciones de parte fraccional y se aplica en la integral

$$I_{n1} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{(u-k)^n}{u^n(u+1)^2} du$$

Dejamos, la integral I_{n1} hasta ese nivel de solución. Ahora se abordará la integral I_{n2}

Para ejecutar la solución de $I_{n2} = \int_2^{\infty} \frac{\{t\}^n}{t^2} \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt$ se toma en cuenta que, en la parte fraccional del cociente, ese valor nunca excedería 1, por eso

$$\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n = \left(\frac{1}{t-1}\right)^n$$

Se sustituye en la integral

$$I_{n2} = \int_{2}^{\infty} \frac{\{t\}^n}{t^2} \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^n dt = \int_{2}^{\infty} \frac{\{t\}^n}{t^2} \left(\frac{1}{t-1}\right)^n dt$$

Se hace el siguiente cambio de variable

$$u = t - 1; \;\; du = dt$$

$$t = 2; u = 1$$

$$t = \infty; u = \infty$$

Ahora se aplican los cambios en la integral y se simplifica

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\{u+1\}^n}{(u+1)^2} \frac{1}{(u)^n} du = \int_{1}^{\infty} \frac{\{u\}^n}{u^n(u+1)^2} du$$

Ahora, se observa que la integral

$$I_{n1} = I_{n2}; \; I = 2I_{n1}$$

Esto implica que la integral buscada será el doble de las que se ha encontrado

$$I_n = 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{(u-k)^n}{u^n(u+1)^2} du$$

Otra vez más se hace el siguiente cambio de variable

$$u - k = x; du = dx$$

$$u = k; x = 0$$

$$u = k + 1; x = 1$$

Se aplica en la integral y se simplifica:

$$I_n = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(x+k)^n} \frac{dx}{(x+k+1)^2}$$

Se vuelve a hacer un cambio de variable:

$$y = \frac{x}{x+k}$$

$$x = 0; y = 0$$

$$x = 1; y = \frac{1}{k+1}$$

Se expresa x en función de y, para lograrlo se despeja de la relación de ambas, se multiplica ambos miembros por $(x + k)$

$$y(x + k) = x$$

Se factoriza los términos que contienen a x

$$yx - x + yk = 0$$

$$(y - 1)x + yk = 0$$

Se resta en ambos miembros ky y se divide todo entre $(y - 1)$ y se simplifica

$$x = \frac{-ky}{y-1} = \frac{ky}{1-y}$$

Para determinar la relación de los diferenciales entre las nuevas variables parte de la expresión

$$y = x(x + k)^{-1}$$

Los diferenciales serán entonces

$$dy = \frac{dx}{x+k} - x(x+k)^{-2}dx = \left[\frac{1}{x+k} - \frac{x}{(x+k)^2}\right]dx = \frac{x+k-x}{(x+k)^2}dx$$

$$dy = \frac{k}{(x+k)^2}dx$$

En esta expresión no deben aparecer términos de x, así que se usa la relación inversa de x(y), para escribir el diferencial de x en términos de y. Para lograrlo usamos

$$x = \frac{ky}{1-y}$$

Se remplaza en

$$dy = \frac{k}{(x+k)^2}dx$$

Para tener

$$\frac{(x+k)^2}{k}dy = dx$$

Sustituimos $x(y)$ en el primer miembro

$$\frac{\left(\frac{ky}{1-y} + k\right)^2}{k}dy = dx$$

Ahora se simplifica

$$\frac{\left(\frac{ky + k(1-y)}{1-y}\right)^2}{\frac{k}{1}}dy = \frac{k^2(y+1-y)^2}{k(1-y)^2}dy = dx$$

$$\frac{k}{(1-y)^2}dy = dx$$

Se introduce en la integral y se simplifica

$$I_n = 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{1/_{k+1}} y^n \frac{dy}{\left(\frac{ky}{1-y} + (k+1)\right)^2}\frac{k}{(1-y)^2}$$

El término se puede simplificar así

$$\frac{ky}{1-y}+\frac{k+1}{1}=\frac{ky+(k+1)(1-y)}{1-y}=\frac{ky+k-ky+1-y}{1-y}=\frac{k+1-y}{1-y}$$

Ahora se procede a introducirlo en la integral y simplificar

$$I_n=2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{1/_{k+1}}\frac{y^n}{(k+1-y)^2\frac{1}{(1-y)^2}}\frac{k}{(1-y)^2}dy=2\sum_{k=1}^{\infty}k\int_0^{1/_{k+1}}\frac{y^n}{(k+1-y)^2}dy$$

Se realiza otro cambio en las constantes

$$a=k+1>1$$

Se sustituye en la integral

$$\int_0^{1/_a}\frac{y^n}{(a-y)^2}dy$$

Ahora se hace un cambio de variable y se hacen los cambios consecuentes en los límites de integración

$$y=at;\;\; dy=a\,dt$$

$$y=0;t=0$$

$$y=\frac{1}{a};t=\frac{1}{a^2}$$

Se sustituye en la integral y se simplifica

$$\int_0^{1/_{a^2}}\frac{(at)^n}{(a-at)^2}adt=\int_0^{1/_{a^2}}\frac{a^{n+1}}{a^2}\frac{t^n}{(1-t)^2}dt=a^{n-1}\int_0^{1/_{a^2}}\frac{t^n}{(1-t)^2}dt$$

La integral anterior se integra por parte

$$u=t^n;du=nt^{n-1}dt$$

$$dv=\frac{1}{(1-t)^2}dt;\; v=\frac{1}{1-t}$$

$$a^{n-1}\int_0^{1/a^2}\frac{t^n}{(1-t)^2}dt = a^{n-1}\left[\left(\frac{t^n}{1-t}\right)\right]_0^{1/a^2} + a^{n-1}\int_0^{1/a^2}\frac{nt^{u-1}}{1-t}dt$$

$$= a^{n-1}\left[\left(\frac{1}{a^2}\right)^n\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a^2}}\right) + n\int_0^{1/a^2}\frac{t^{n-1}}{t-1}dt\right]$$

La integral queda con la siguiente estructura

$$I = a^{n-1}\left(\frac{1}{a^2}\right)^n\frac{a^2}{a^2-1} + na^{n-1}\left(t+\frac{t^2}{2}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{n-1}+\ln(1-t)\right)\Bigg]_0^{1/a^2}$$

La expresión se puede simplificar

$$I = \frac{1}{a^{n-1}(a^2-1)} - na^{n-1}\left(\sum_{j=n}^{\infty}\frac{t^j}{j}\right)\Bigg]_0^{1/a^2}$$

Se evalúa en los límites de integración y se tiene

$$I = \frac{1}{a^{n-1}(a^2+1)} + n\left(\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{a^{2j-n+1}}\frac{1}{j}\right)$$

Ahora se hace un cambio de índice de j a m, con el siguiente cambio de variables

$$m = j - n; j = m + n$$

Se aplica el cambio en la solución de la integral

$$I = \frac{1}{a^{n-1}(a^2-1)} - n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{a^{2m+2n-n}(m+n)} = \frac{1}{a^{n-1}(a^2-1)} - n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{a^{2m+n+1}}\frac{1}{(m+n)}$$

Se revierte el cambio de variable anterior y se sustituye en la expresión anterior y se simplifica

$$a = k + 1$$

$$I = \frac{1}{(k+1)^{2n-2}((k+1)^2-1)} - n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{2m+n+1}}\left(\frac{1}{m+n}\right)$$

$$I=\frac{1}{(k+1)^{2n-2}(k^2+2k+1-1)}-n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{2m+n+1}}\frac{1}{m+n}$$

$$I=\frac{1}{(k+1)^{2n-1}k(k+2)}-n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{2m+n+1}}\left(\frac{1}{m+n}\right)$$

Ahora, se puede introducir el segundo índice de suma para tener la integral dada en función de n

$$I_n=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{n-1}(k+2)}-2n\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k}{(k+1)^{2m+n+1}(m+n)}$$

Se puede demostrar que la suma de estos términos, cumplen con una relación de recurrencia con la función Zeta de Riemann

$$\frac{1}{(k+1)^{n-1}}-\frac{1}{(k+1)^{n-2}(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^{n-2}(k+2)-(k+1)^{n-1}}{(k+1)^{n-1}(k+1)^{n-2}(k+2)}=\frac{(k+1)^{n-2}[(k+2)-(k+1)]}{(k+1)^{n-1}(k+1)^{n-2}(k+2)}=\frac{1}{(k+1)^{n-1}(k+2)}$$

$$S_{n-1}=(\zeta(n-1)-1)-S_{n-2}$$

$$Y_{n-1}=(-1)^{n-1}(\zeta(n-1)-1)+Y_{n-2}$$

De ahí se tiene que

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}^n\left\{\frac{1}{1-x}\right\}^n dx=2\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{n+j-1}\,(\zeta(j)-1)+(-1)^n-2n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\zeta(2m+n)-\zeta(2m+n+1)\right)}{n+m}$$

Se puede observar que esta integral de función de parte fraccional está ligada a la función Zeta de Riemann.

4.2.6 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^2 dx$

Para solucionar la integral de parte fraccional $\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^2 dx$ se debe hace la siguiente transformación de variables

$$t = \frac{k}{x}$$

Si se busca los diferenciales de la expresión anterior se tiene

$$dt = -\frac{k}{x^2} dx$$

Se hacen los arreglos necesarios para tener en el primer miembro solo términos de t

$$-\frac{k}{t^2} dt = dx$$

Por otro lado, se determinan los nuevos límites de integración

$$x = 0; \;\; t = \infty$$

$$x = 1; \;\; t = k$$

Ahora se incorporan los cambios en la integral original y se aplica las propiedades de las funciones de parte fraccional

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^2 dx = -\int_\infty^k \{t\}^2 \frac{k}{t^2} dt = k \int_k^\infty \frac{\{t\}^2}{t} dt = \sum_{m=k}^{\infty} k \int_m^{m+1} \frac{(t-m)^2}{t^2} dt$$

Se extiende el binomio para luego ejecutar la integral

$$\sum_{m=k}^{\infty} k \int_m^{m+1} \left(\frac{t^2 - 2mt + m^2}{t^2}\right) dt = \sum_{m=k}^{\infty} k \int_m^{m+1} \left(1 - \frac{2m}{t} + \frac{m^2}{t^2}\right) dt$$

La integral resuelta queda así

$$\sum_{m=k}^{\infty} k \int_m^{m+1} \left(1 - \frac{2m}{t} + \frac{m^2}{t^2}\right) dt = \sum_{m=k}^{\infty} k \left(t - 2m \ln t - \frac{m^2}{t}\right)_m^{m+1}$$

Cuando se hacen las evaluaciones en los límites de integración la expresión tiene la siguiente forma

$$\sum_{m=k}^{\infty} k\left(t-2m\ln t-\frac{m^2}{t}\right)_m^{m+1}$$
$$=\sum_{m=k}^{\infty} k\left[\left(m+1-2m\ln(m+1)-\frac{m^2}{m+1}\right)-\left(-m+2m\ln m+\frac{m^2}{m}\right)\right]$$

Se simplifica la expresión anterior

$$\sum_{m=k}^{\infty} k\left[m+1-2m\ln(m+1)+2m\ln(m)-\frac{m^2}{m+1}\right]$$

Para facilitar en pasos posteriores se suma y resta 1 y se hace la siguiente transformación

$$\sum_{m=k}^{\infty} k\left[\frac{(m-1)(m+1)}{m+1}+2-2m\ln(m+1)+2m\ln(m)-\frac{m^2}{m+1}\right]$$

Ahora de se puede observar que un término adicional se puede simplificar

$$\sum_{m=k}^{\infty} k\left(\frac{m^2-1}{m+1}-\frac{m^2}{m+1}+2-2m\ln(m+1)+2m\ln m\right)$$

Cuando se suman se elimina el término cuadrático de m

$$\sum_{m=k}^{\infty} k\left(\frac{m^2-1-m^2}{m+1}+2-2m\ln(m+1)+2m\ln(m)\right)$$

$$\sum_{m=k}^{\infty} k\left(-\frac{1}{m+1}+2-2m\ln(m+1)+2m\ln m\right)$$

Ahora se busca la suma parcial de la solución encontrada, se prescinde de k, dado que multiplica toda la solución y no influye en el resultado buscado:

$$S_n=\sum_{m=k}^{n}\left(2-2m\ln(m+1)+2m\ln m-\frac{1}{m+1}\right)$$

Aplicamos la suma parcial y se tiene

$$S_n = 2 - 2k\ln(k+1) + 2k\ln k - \frac{1}{k+1} + 2 - 2(k+1)\ln(k+2) + 2(k+1)\,ln(k+1) - \frac{1}{k+2} + 2$$
$$- 2(k+1)\ln(k+3) + 2(k+2)\ln(k+2) - \frac{1}{k+3} + \cdots + 2$$
$$- 2(n-1)\ln(n) + 2(n-1)\,ln(n-1) - \frac{1}{n} + 2 - 2(n)\ln(n+1) + 2(n)\ln n - \frac{1}{n+1}$$

Se observa que se elimina muchos términos, de la parte telescópica de la serie, la suma se simplifica

$$S_n = 2(n-k+1) - 2n\ln(n+1) + \sum_{m=k}^{n} 2\ln(m+1) - \sum_{m=k}^{n} \frac{1}{m+1} + 2k\ln k$$

Estos términos se pueden simplificar aún más

$$2\sum_{m=k}^{n} \ln(m+1) = 2\ln n! - 2\ln(k!)$$

La expresión anterior, se puede ampliar usando la identidad

$$2\ln n! \approx \ln(2\pi) + (2n+1)\ln(n) - 2n$$

Se sustituye en la expresión de la suma parcial y se simplifica

$$S_n = 2n - 2k + 2 - 2n\ln(n+1) + \ln 2\pi + 2n\ln n + \ln n - 2n - \sum_{m=k}^{n} \frac{1}{m+1} + 2k\ln k - 2\ln k!$$

$$S_n = 2 + 2k + \ln 2\pi + \ln n - \sum_{m=k}^{n} \frac{1}{m+1} - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} + 2\ln k!$$

El término $\sum_{m=k}^{n} \frac{1}{m+1}$ comienza la suma en $m = k$, por eso se suman y restan todos los términos antes de llegar a $k+1$

$$\sum_{m=k}^{n} \frac{1}{m+1} + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$$

Esto se incorpora en la expresión de suma parcial y se buscar el límite de la suma para $n \to \infty$, solo los términos de la suma que tienen n son los que se verá afectados por la tendencia de n al infinito

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2(1+k) + \ln 2\pi + \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right) + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} - 2\ln k! + 2k\ln k$$

Como se ha visto el termino encerrado en el límite es $-\gamma_0$, la integral quedará así

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^2 dx = k\left(-2k + \ln 2\pi - \gamma_0 + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} + 2k\ln k - 2\ln k!\right)$$

Pero, si se quiere se puede simplificar un poco más si el valor de k es suficientemente grande, aplicamos la identidad del logaritmo natural de un factorial al termino $2\ln k!$

$$2\ln k! \cong \ln 2\pi + (2k+1)\ln k - 2k$$

De ahí se tiene y se simplifica

$$I \cong k\left(\ln 2\pi + 2k + 2 - \gamma + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} + 2k\ln k - \ln 2\pi - 2k\ln k - \ln k + 2k\right)$$

$$I \cong k\left(4k + 2 - \gamma_0 + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m} - \ln k\right)$$

Como se ventiló en el marco teórico los números armónicos H_k pueden usarse para expresar la suma de los inversos de m hasta el término k

$$I \cong k(4k + 2 - \gamma_0 + H_k - \ln k)$$

En resumen, la integral de la función de parte fraccional se relaciona con los números armónicos, con la constante de Euler-Mascheroni (siendo k un numero entero positivo mayor a 1000)

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^2 dx \cong k(4k + 2 - \gamma_0 + H_k - \ln k)$$

4.2.7 Solución de la integral $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \frac{x}{1-x} dx$

Primero se toma la expresión no fraccional para escribirla en serie

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \frac{x}{1-x} dx = \int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \sum_{k=1}^{\infty} x^k dx$$

Se hace la siguiente transformación de variables

$$t = \frac{1}{x}$$

$$dt = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$-\frac{1}{t^2} dt = dx$$

Los límites de integración se cambian

$$x = 0, t = \infty$$

$$x = 1, t = 1$$

Se remplaza en la integral original y se simplifica

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \sum_{k=1}^{\infty} x^k dx = -\int_{\infty}^1 \frac{\{t\}}{t^2} \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k} dt$$

Las variables de integración son mudas, por lo que se puede seguir usando x

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \sum_{k=1}^{\infty} x^k dx = \int_1^{\infty} \{x\} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^{k+2}} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{k+2}} dx$$

Ahora, se centra en la integral, se deja para después la sumatoria en k, se resuelte la integral J_k

$$J_k = \int_0^1 \frac{\{x\}}{x^2} x^{-k} dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_m^{m+1} \frac{(x-m)}{x^{k+2}} dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_m^{m+1} \left(x^{-k-1} - mx^{-k-2}\right) dx$$

Se procede a resolver la integral en los límites de integración y reorganizar los términos

$$J_k = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x^{-k}}{-k} - \frac{mx^{-k-1}}{-k-1} \right) \Bigg]_m^{m+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\frac{1}{x^k} + \frac{m}{k+1}\frac{1}{x^{k+1}} \right) \Bigg]_m^{m+1}$$

Se evalúa el término J_k en los límites de integración que queda la expresión

$$J_k = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\frac{1}{(m+1)^k} + \frac{1}{k}\frac{1}{m^k} + \frac{1}{k+1}\frac{m}{(m+1)^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\frac{m}{m^{k+1}} \right)$$

Ahora se busca la suma parcial en m, para simplificar la expresión de J_k

$$S_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \left(-\frac{1}{k}\frac{1}{(m+1)^k} + \frac{1}{k}\frac{1}{m^k} + \frac{1}{k+1}\frac{m}{(m+1)^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\frac{m}{m^{k+1}} \right)$$

En la suma se asignarán los valores de m y se sumarán

$$\begin{aligned} S_{n,k} = &-\frac{1}{k}\frac{1}{2^k} + \frac{1}{k}\frac{1}{1^k} + \frac{1}{k+1}\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\frac{1}{1^{k+1}} - \frac{1}{k}\frac{1}{3^k} + \frac{1}{k}\frac{1}{2^k} + \frac{1}{k+1}\frac{2}{3^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\frac{2}{2^{k+1}} - \frac{1}{k}\frac{1}{4^k} \\ &+ \frac{1}{k}\frac{1}{3^k} + \frac{1}{k+1}\frac{3}{4^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\frac{3}{3^{k+1}} - \frac{1}{k}\frac{1}{5^k} + \frac{1}{k}\frac{1}{4^k} + \frac{1}{k+1}\frac{4}{5^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\frac{4}{4^{k+1}} - \cdots \\ &- \frac{1}{k}\frac{1}{n^k} + \frac{1}{k}\frac{1}{(n-1)^k} + \frac{1}{k+1}\frac{n-1}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\frac{n-1}{(n-1)^{k+1}} - \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{k}\frac{1}{n^k} \\ &+ \frac{1}{k+1}\frac{n}{(n+1)^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\frac{n}{n^{k+1}} \end{aligned}$$

Se puede observar que se eliminan la mayoría de los términos que tienen $1/k$, los demás se reducen, la suma parcial queda así

$$S_{n,k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{(m)^{k+1}} - \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{k+1}\frac{n}{(n+1)^{k+1}}$$

La suma parcial se convierte en la integral origina en el límite cuando n tiende al infinito

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{(m)^{k+1}} - \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{k+1}\frac{n}{(n+1)^{k+1}} \right)$$

Pero, los primeros dos términos no dependen de n, excepto el límite de la suma del segundo término:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m)^{k+1}} + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)^{k}} + \frac{1}{k+1}\frac{n}{(n+1)^{k+1}}\right)$$

Los dos términos que dependen de n tienden a cero cuando n tiende a infinito, la expresión de la integral queda así

$$S_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\zeta(k+1)$$

Ahora sumamos y restamos el término $\frac{1}{k+1}$, y aplicamos la suma en k

$$S_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}\zeta(k+1)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}(\zeta(k+1)-1)\right)$$

Cuando se evalúa esta suma en el infinito arroja que es la constante de Euler-Mascheroni

$$I = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}(\zeta(k+1)-1) = \gamma_0$$

Así se puede concluir que la integral resuelta es la constante de Euler-Mascheroni

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}\frac{x}{1-x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}(\zeta(k+1)-1) = \gamma_0$$

4.2.8 Solución de la integral $\int_0^1 \left\{\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right\} dx$

Para realizar esta integral se procede con el cambio de variables

$$x = \frac{1}{y^k}$$

Las diferenciales de las variables tendrán la siguiente relación

$$dx = -ky^{-k-1}dy$$

Los límites de integración cambiaran de la siguiente manera

$$x = 0; y = \infty$$

$$x = 1; y = 1$$

Ahora se reemplaza en la integral los cambios analizados

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right\} dx = -\int_\infty^1 \{y\}\, ky^{-k-1}dy = k\int_1^\infty \frac{\{y\}}{y^{k+1}}dy$$

Se aplica la propiedad de las funciones de parte fraccional y la integral queda

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} k \int_m^{m+1} \frac{(y-m)}{y^{k+1}}dy = \sum_{m=1}^{\infty} k \int_m^{m+1} \left(y^{-k} - my^{-k-1}\right)dy$$

La integral sin evaluar luce así,

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} k \left(\frac{y^{-k+1}}{-k+1} - \frac{my^{-k}}{-k}\right)_m^{m+1}$$

Se simplifica un poco más y se sustituye los límites de integración

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} k \left(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{y^{k-1}} + \frac{m}{k}\frac{1}{y^k}\right)_m^{m+1}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} k \left(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(m+1)^{k-1}} + \frac{m}{k}\frac{1}{(m+1)^k} + \frac{1}{k-1}\frac{1}{m^{k-1}} - \frac{m}{k}\frac{1}{m^k}\right)$$

Se reorganizan los términos y se busca la suma parcial de la serie, con el fin de simplificar la suma y encontrar un término general para la suma total

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{k}{k-1} \frac{1}{m^{k-1}} - \frac{k}{k-1} \frac{1}{(m+1)^{k-1}} + \frac{k}{k} \frac{m}{(m+1)^k} - \frac{k}{k} \frac{m}{m^k} \right)$$

Se plantea la suma de los primeros n términos y se simplifica

$$\begin{aligned} S_n = {} & \frac{k}{k-1}\frac{1}{1^{k-1}} - \frac{k}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{k}\frac{1}{2^k} - \frac{1}{k}\frac{1}{1^k} + \frac{k}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{k}{k-1}\frac{1}{3^{k-1}} + \frac{1}{k}\frac{2}{3^k} - \frac{1}{k}\frac{2}{2^k} + \frac{k}{k-1}\frac{1}{3^{k-1}} \\ & - \frac{k}{k-1}\frac{1}{4^{k-1}} + \frac{1}{k}\frac{3}{4^k} - \frac{1}{k}\frac{3}{3^k} + \frac{k}{k-1}\frac{1}{4^{k-1}} - \frac{k}{k-1}\frac{1}{5^{k-1}} + \frac{1}{k}\frac{4}{5^k} - \frac{1}{k}\frac{4}{4^k} \dots \\ & + \frac{k}{k-1}\frac{1}{(n-1)^{k-1}} - \frac{k}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}} + \frac{1}{k}\frac{(n-1)}{n^k} - \frac{1}{k}\frac{n-1}{(n-1)^k} + \frac{k}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}} \\ & - \frac{k}{k-1}\frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{k}\frac{n}{(n+1)^k} - \frac{1}{k}\frac{n}{n^k} - \frac{1}{k}\frac{1}{n^k} \end{aligned}$$

Se puede observar que los términos telescópicos se simplifican, la suma total para los primeros n términos es:

$$S_n = \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{k}{k-1}\frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{k}\frac{n}{(n+1)^k} - \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^k}$$

La integral es igual a la suma anterior cuando n tiende al infinito

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{k-1} - \frac{k}{k-1}\frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \frac{n}{(n+1)^k} - \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^k} \right)$$

Los términos que no contienen n no influyen en la suma cuando n tiende al infinito, así que se excluyen dichos términos

$$I = -\frac{1}{k-1} - \frac{k}{k-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^{k-1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{m}{n^k} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^k}$$

En el límite algunos términos se hacen cero, y otro se convierte en la función Zeta de Riemann

$$I = -\frac{1}{k-1} - 0 + 0 - \frac{\zeta(k)}{k}$$

La integral está relacionada con la función Zeta de Riemann

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right\} dx = -\frac{1}{k-1} - \frac{\zeta(k)}{k}$$

4.2.9 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^2 \left\{\frac{1}{1-x}\right\}^2 dx$

Considere la integral

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^2 \left\{\frac{1}{1-x}\right\}^2 dx$$

Se hacen el siguiente cambio de variable

$$t = \frac{1}{x};\ dt = -\frac{1}{x^2}dx;\ -\frac{dt}{t^2} = dx$$

Y los límites de integración quedan cambiado por

$$x = 0;\ t = \infty$$

$$x = 1; t = 1$$

Se hacen todas las sustituciones en la integral original

$$-\int_\infty^1 \{t\}^2 \left\{\frac{1}{1-\frac{1}{t}}\right\}^2 \frac{dt}{t^2} = \int_1^\infty \{t\}^2 \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2 \frac{dt}{t^2} = \int_1^2 \{t\}^2 \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2 \frac{1}{t^2} dt + \int_2^\infty \{t\}^2 \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2 \frac{1}{t^2} dt$$

Nótese se que la integral se ha dejado partida en dos, se ha dejado así con el propósito de aprovechar las propiedades de las funciones de parte fraccional, se verá en detalle más adelante. Entonces, se tienen dos integrales idénticas, evaluadas en intervalos diferentes.

$$I_{n1} = \int_1^2 \{t\}^2 \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2 \frac{1}{t^2} dt$$

$$I_{n2} = \int_2^\infty \{t\}^2 \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2 \frac{1}{t^2} dt$$

$$I = I_{n1} + I_{n2}$$

En la integral I_{n1}, se tiene un intervalo de $[1{,}2]$, lo que implica que k solo toma un valor, $k = 1$. Por esta razón, la integral se simplifica así

$$I_{n1} = \int_{1}^{2} \frac{\{t\}^2}{t^2} \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2 dt = \int_{1}^{2} \frac{(t-1)^2}{t^2} \left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2 dt$$

Ahora se hace el siguiente cambio de variable

$$t - 1 = u; \;\; dt = du$$

$$t = 1; \;\; u = 0$$

$$t = 2; \;\; u = 1$$

Se introducen los cambios de variables y los cambios en los límites de integración,

$$I_{n1} = \int_{0}^{1} \frac{u^2}{(u+1)^2} \left\{\frac{u+1}{u}\right\}^2 du = \int_{0}^{1} \frac{u^2}{(u+1)^2} \left\{1 + \frac{1}{u}\right\}^2 du$$

En la parte fraccional se puede aplicar la propiedad $\{f(x) + N\} = \{f(x)\}$ para N entero, entonces la integral se simplifica

$$I_{n1} = \int_{0}^{1} \frac{u^2}{(u+1)^2} \left\{\frac{1}{u}\right\}^2 du$$

Se realiza otro cambio de variables y se hacen los demás ajustes rutinarios

$$z = \frac{1}{u}; \; -\frac{dz}{z^2} = du$$

$$u = 0; \;\; z = \infty$$

$$u = 1; \;\; z = 1$$

Se sustituye en la integral todos los cambios producto de la transformación y se tiene

$$I_{n1} = \int_{\infty}^{1} \frac{1}{z^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{z}+1\right)^2} \{z\}^2 \left(-\frac{dz}{z^2}\right) = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{z^4} \frac{z^2}{(z+1)^2} \{z\}^2 dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{z^2} \frac{1}{(z+1)^2} (z-k)^2 \, dz$$

Dada la integral, se prosigue con la otra que está pendiente

$$I_{n1}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1}\frac{(z-k)^2}{z^2(z+1)^2}dz$$

Se hace la siguiente transformación de variable para simplificarla

$$u=t-1;\;\; du=dt$$

$$t=2;\; u=1$$

$$t=\infty;\;\; u=\infty$$

Se introduce en la integral original todos los cambios y se simplifica. Observe la simplificación $\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2=\left\{\frac{1}{t-1}\right\}^2$

$$I_{n2}=\int_{2}^{\infty}\frac{\{t\}^2}{t^2}\left\{\frac{t}{t-1}\right\}^2dt=\int_{1}^{\infty}\frac{\{t\}^2}{t^2}\left\{\frac{1}{t-1}\right\}^2dt=\int_{1}^{\infty}\frac{\{u+1\}^2}{(u+1)^2}\left(\frac{1}{u}\right)^2du$$

Se simplifica aún más

$$I_{n2}=\int_{1}^{\infty}\frac{\{u\}^2}{(u+1)^2}\left(\frac{1}{u}\right)^2du=\sum\int_{1}^{\infty}\frac{(u-k)^2}{u^2(u+1)^2}du$$

Se puede observar que las integrales son iguales

$$I_{n1}=I_{n2}$$

$$I=2I_{n1}=2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1}\frac{(z-k)^2}{z^2(z+1)^2}dz$$

Se procede a resolverla haciendo el cambio de variables

$$u=z-k$$

$$du=dz$$

Los límites de integración

$$z=k;u=k-k=0$$

$$z=k+1;u=k+1-k=1$$

Se aplican los cambios citados antes

$$I = 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1} \frac{(z-k)^2}{z^2(z+1)^2}dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{1} \frac{u^2}{(u+k)^2(u+k+1)^2}du$$

Se implementa otro cambio de variable en la integral

$$y = \frac{u}{u+k}$$

Como se tienen otros términos en los factores con la variable u, se procede a despejarlo de la transformación anterior, aquí se muestra el proceso

$$yu + yk = u$$

$$yu - u = -yk$$

$$(y-1)u = -yk$$

$$u = \frac{-yk}{y-1} = \frac{ky}{1-y}$$

Ahora se buscan los diferenciales y su relación entre si,

$$y = \frac{u}{u+k} = u(u+k)^{-1}$$

$$dy = (u+k)^{-1}du + u(-1)(u+k)^{-2}du$$

Como se debe expresar todo en términos de la nueva variable en el primer miembro, se hacen todos los ajustes que sean necesarios

$$dy = \left(\frac{1}{u+k} - \frac{u}{(u+k)^2}\right)du$$

Finalmente los diferenciales se relacionan con la expresión siguiente

$$\frac{k}{(1-y)^2}dy = du$$

Ahora, se evalúan los límites de integración con el cambio de variables

$$u = 0;\ \ y = 0$$

$$u = 1;\ \ y = \frac{1}{k+1}$$

Se ejecutan todos los cambios y se hacen las simplificaciones necesarias para poder resolver la integral

$$I = 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_{0}^{1/_{k+1}} y^2 \left(\frac{1}{-\frac{yk}{y-1} + k + 1} \right)^2 \frac{k}{(1-y)^2} dy = 2\sum_{k=1}^{\infty} \int_{0}^{1/_{k+1}} y^2 \left(\frac{1}{(k+1-y)^2} \right) k\, dy$$

Se puede observar que la integral aún es simplificable

$$2\sum_{k=1}^{\infty} k \int_{0}^{1/_{k+1}} \frac{y^2}{(k+1-y)^2} dy$$

Se simplifica la notación de la constante que acompaña la variable en el denominador y se sustituye en la integral

$$a = k + 1$$

$$I = \int_{0}^{1/_a} \frac{y^2}{(a-y)^2} dy$$

Ahora, se hace otro cambio de variable y se hacen todos los ajustes necesarios para poder realizar la integral

$$y = at;\ \ dy = a\, dt;\ \ dy = dt$$

$$y = 0;\ \ t = 0$$

$$y = \frac{1}{a};\ \ t = \frac{1^2}{a^2}$$

Se implementa los cambios en la integral anterior y se simplifica la expresión

$$I = \int_{0}^{1/_{a^2}} \frac{a^2 t^2}{(a-at)^2} (a\, dt) = \int_{0}^{1/_{a^2}} \frac{a^2 t^2}{a^2(1-t)^2} (a) dt = a \int_{0}^{1/_{a^2}} \frac{t^2}{(1-t)^2} dt$$

Se integra por partes

$$u = t^2;\ \ du = 2t;\ \ dv = \frac{dt}{(1-t)^2};\ \ v = \frac{1}{(1-t)}$$

La integral ahora tiene el siguiente aspecto

$$I = a\int_0^{1/a^2} \frac{t^2}{(1-t)^2}dt = \frac{t^2}{1-t}\Big]_0^{1/a^2} - 2\int_0^{1/a^2} \frac{t}{1-t}dt$$

Se integra por partes otra vez

$$u = t;\ \ du = dt$$

$$dv = \frac{dt}{1-t};\ \ v = -\ln(1-t)$$

Se ejecuta la integración

$$I = \frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2}{1-\frac{1}{a^2}} - 2 - t\ln(1-t)\Big]_0^{1/a^2} + \int_0^{1/a^2} \ln(1-t)\,dt$$

Queda un reducto de la integral que se puede resolver usando el desarrollo en serie del logaritmo

$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}$$

La integral ahora tendrá el siguiente aspecto

$$\int_0^{1/a^2} \ln(1-t)\,dt = -\int_0^{1/a^2} \sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^l}{l}dt = -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_0^{1/a^2} t^l\,dt$$

Se integra y se evalúa en los límites

$$= -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\frac{t^{l+1}}{l+1}\Big]_0^{1/a^2} = -\sum\frac{1}{l(l+1)(a^2)^{l+1}}$$

Ahora, se reúnen todos los términos que ya se han determinado en la integral

$$I = \frac{1}{a^4}\frac{a^2}{(a^2-1)} + 2t\ln(1-t)]_0^{1/a^2} + 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l(l+1)}.\frac{1}{a^{2(l+1)}}$$

Se aplica una vez más la serie del logaritmo

$$I = \frac{1}{a^2(a^2-1)} + 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^{l+1}}{l}\Bigg]_0^{1/a^2} + 2\sum\frac{1}{l(l+1)}.\frac{1}{a^{2(l+1)}}$$

Se evalúa y se simplifica con los demás términos

$$I = \frac{1}{a^2(a^2-1)} + 2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\frac{1}{a^{2(l+1)}} + \frac{1}{l(l+1)}\frac{1}{a^{2(l+1)}}\right)$$

Ahora, se revierte la transformación de la constante

$$a = k+1$$

Se sustituye a por $k+1$ donde aparezca

$$I_k = \frac{1}{(k+1)^2((k+1)^2-1)} + 2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\frac{1}{(k+1)^{2(l+1)}} + \frac{1}{l(l+1)}\frac{1}{(k+1)^{2(l+1)}}\right)$$

Ahora, se suma en k, para tener la integral y se simplifica

$$I = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2(k^2+2k+1-1)} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)^{2(l+1)}}\right)\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l(l+1)}\right)$$

$$I = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2(k+2)k} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)^{2l+2}}\right)\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l(l+1)}\right)$$

Para simplificar el primer término del segundo miembro de la igualdad se usan fracciones parciales, se detalla el proceso:

$$\frac{1}{(k+1)^2(k+2)k} = \frac{A}{(k+1)} + \frac{B}{(k+1)^2} + \frac{C}{(k+2)} + \frac{D}{k}$$

Del planteamiento anterior se tiene esta expresión que permite determinar el valor de las constantes desconocidas

$$1 = A(k+1)(k+2)k + B(k+2)k + C(k+1)^2k + D(k+1)^2(k+2)$$

Para determinar el valor de D se hace $k = 0$

$$1 = D(1)(2); D = \frac{1}{2}$$

Para determinar el valor de B, se hace $k = -1$

$$1 = B(1)(-1);\ \ B = -1$$

Para determinar el valor de C, se hace $k = -2$

$$1 = C(-1)^2;\ \ C = 1$$

Para determinar el valor de A, se hace $k = 1$

$$1 = A(2)(3)(1) + (-1)(3)(1) + (1)(2)^2\ (1) + \left(\frac{1}{2}\right)(2)^2\ (3)$$

$$1 = 6A + (-3) + 4 + 6 = 6A + 7;\ \ 6A = -6; A = -1$$

Ahora la expresión queda simplificada

$$\frac{1}{(k+1)^2(k+2)k} = -\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{k}$$

La integral es igual a una suma infinita

$$I = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} + 2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l(l+1)}\right)[\zeta(2l+2) - 1]$$

Se hacen los siguientes cambios para simplificar aún más la expresión anterior

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right) - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right) - 1 - \frac{1}{2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$$

Las series quedas con una estructura más simplificable

$$I=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+1-\zeta(2)+1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{l+1+1}{l(l+1)}\right)(\zeta(2l+2)-1)$$

$$I=-\zeta(2)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{l+2}{l(l+1)}\right)(\zeta(2l+2)-1)$$

Se aplica la siguiente identidad

$$\zeta(2k)=\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2(l+1)}}{(2k)!}B_{2k}$$

En donde B_{2k} son los números de Bernoulli. Esta identidad es válida cuando $k\in\mathbb{N}$, propiedad que se cumple, dado que

$$k=l+1$$

El valor de la función Zeta de Riemann queda expresada

$$\zeta\big(2(l+1)\big)=\frac{(-1)^{l}2^{2l+1}\pi^{2(l+1)}}{\big(2(l+1)\big)!}B_{2l+2}$$

Se sustituye

$$I=-\zeta(2)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}+2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{l+2}{l(l+1)}\right)\left[\frac{(-1)^{l}2^{2l+1}\pi^{2(l+1)}}{\Gamma(2(l+1)+1)}B_{2l+2}-1\right]$$

Queda demostrado que también esta integral, igual que otras, se relaciona con funciones especiales, como la función Zeta de Riemann, la función Gamma, los Números de Bernoulli, etc.

4.2.10 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^m dx$

Se considera la siguiente integral

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^m dx$$

En donde k y m con números reales y mayores que 1.

Para resolver esta integral se debe hacer el siguiente cambio de variables

$$y = \frac{k}{x}$$

Los diferenciales serán

$$dy = -\frac{k}{x^2}dx; \ -\frac{k}{y^2}dy = -dx$$

Los límites de la integral quedarán así

$$x = 0; y = \infty$$

$$x = 1; y = k$$

Se sustituyen en la integral original todos los cambios calculados

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^m dx = -\int_\infty^k \{y\}^m \frac{k}{y^2}dy = k\int_k^\infty \frac{\{y\}^m}{y^2}dy$$

Se recurre a las propiedades de las funciones de parte fraccional y se aplica a la integral

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^m dx = \sum_{l=k}^{\infty} k\int_l^{l+1} \frac{(y-l)^m}{y^2}dy$$

Se hace otro cambio de variables para

$$u = y - l; \ \ u = l - l = 0; \ \ y = l$$

$$du = dy; \ \ u = 1; \ \ y = l + 1$$

Con esta transformación se puede obtener la solución de la integral

$$\sum_{l=k}^{\infty} k \int_{l}^{l+1} \frac{(y-l)^m}{y^2} dy = \sum_{l=k}^{\infty} k \int_{0}^{1} \frac{u^m}{(u+l)^2} du = k \int_{0}^{1} u^m \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{(u+l)^2} du$$

Como la sumatoria comienza en l=k y se necesita que comience en l=1, se aplica la siguiente identidad

$$\sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{(u+l)^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(u+l)^2} - \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(u+l)^2}$$

Ahora se sustituye en la integral anterior

$$k \int_{0}^{1} u^m \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{(u+l)^2} du = k \int_{0}^{1} u^m \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(u+l)^2} du - k \int_{0}^{1} u^m \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(u+l)^2} du$$

Ahora se tienen dos integrales, que se denominarán

$$I_1 = k \int_{0}^{1} u^m \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(u+l)^2} du$$

$$I_2 = -k \int_{0}^{1} u^m \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(u+l)^2} du$$

La segunda integral es una integral ordinaria

$$I_2 = -k \int_{0}^{1} u^m \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{(u+l)^2} du = \sum_{l=k}^{k} k \int_{0}^{1} \frac{u^m}{(u+l)^2} du$$

La integral es igual

$$I_2 = k \sum_{l=1}^{k} \left[\sum_{p=1}^{m-1} (-1)^{p-1} \frac{p l^{p-1} u^{m-p}}{(m-p)} + (-1)^{m-1} \frac{l^m}{(u+l)} + (-1)^{m-1} m l^{m-1} \ln(u+l) \right]_0^1$$

Ahora se evalúa en los límites de integración

$$I_2 = \sum_{l=1}^{k} k\left[\left(\sum_{p=1}^{m-1}(-1)^{p-1}\frac{pl^{p-1}}{(m-p)} + (-1)^{m-1}\frac{l^m}{(l+1)} + (-1)^{m-1}ml^{m-1}\ln(l+1)\right) - \left((-1)^{m-1}\frac{l^m}{l} + (-1)^{m-1}ml^{m-1}\ln(l)\right)\right]$$

Ahora, se enfocará el esfuerzo en la integral

$$I_1 = k\int_0^1 u^m \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^2}du$$

Se comienza con una identidad usando la función Gamma

$$\frac{1}{(u+l)^2} = \frac{1}{1!}\int_0^{\infty} e^{-(u+l)y} y dy$$

Se reintroduce la suma infinita

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^2} = \sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u+l)y} y dy = \sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-uy} y e^{-ly} dy$$

Se reorganiza los términos de la suma en l

$$\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-uy} y e^{-ly} dy = \int_0^{\infty} e^{-uy} y \left(\sum_{l=1}^{\infty} e^{-ly}\right) dy$$

Se usa la identidad

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty} e^{-ly}\right) = \frac{1}{e^y - 1}$$

Se reemplaza en la integral anterior y se simplifica

$$\int_0^{\infty} e^{-uy} u \left(\sum_{l=1}^{\infty} e^{-ly}\right) dy = \int_0^{\infty} e^{-uy} u \left(\frac{1}{e^y - 1}\right) dy = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-uy} y}{e^y - 1}\right) dy$$

Ahora se puede observar como se ha transformado la suma infinita que se apartó de la integral

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^2}=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y}{e^y-1}\right)dy$$

Se reintroduce la transformación en la integral original

$$I_1=k\int_0^1 u^m\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^2}du=k\int_0^1 u^m\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y}{e^y-1}\right)dy\right)du$$

Ahora se reorganizan los términos según los diferenciales de integración

$$k\int_0^1 u^m\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y}{e^y-1}\right)dy\,du=k\int_0^{\infty}\frac{y}{e^y-1}\int_0^1(u^m e^{-uy})du\,dy$$

Se puede observar que la integral interior, la que depende de u, tiene la siguiente propiedad

$$I_m=\int_0^1 u^m e^{-uy}du$$

El método más apropiado para resolverla es usando integral por partes

$$I_m=\int_0^1 u^m e^{-uy}du=-\left[\frac{u^m e^{-yu}}{y}\right]_0^1+\frac{m}{y}\int_0^1 u^{m-1}e^{-uy}du=-\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_0^1+\frac{m}{y}\int_0^1 u^{m-1}e^{-uy}du$$

Al final queda otra integral, similar a la primera, pero tiene una propiedad interesante

$$I_{m-1}=\int_0^1 u^{m-1}e^{-uy}du$$

Así en esta integral se puede observar una relación de recurrencia

$$I_m=-\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_0^1+\frac{m}{y}\int_0^1 u^{m-1}e^{-uy}du=-\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_0^1+\frac{m}{y}I_{m-1}$$

Para aprovechar esta propiedad, se define un término que depende de m

$$\alpha_m=\frac{I_m y^m}{m!}$$

Por la relación de recurrencia que tiene I_m, se puede escribir

$$\alpha_m = \left(-\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_0^1 + \frac{m}{y} I_{m-1}\right)\frac{y^m}{m!}$$

Si se continúa hasta llegar al primer término, se tiene

$$\alpha_m = -\frac{e^{-y}}{y}\left(\frac{y^m}{m!} + \frac{y^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + \frac{y}{1}\right) + \frac{1-e^{-y}}{y}$$

Si se ordenan los términos y se rescriben

$$\alpha_m = \frac{e^{-y}}{y}\left(e^y - \left(\frac{y^m}{m!} + \frac{y^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{y^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + \frac{y}{1}\right)\right) = \frac{e^{-y}}{y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{m+p}}{(m+p)!}$$

Recordemos que se está determinando I_m

$$I_m = \frac{m!}{y^m}\frac{e^{-y}}{y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{m+p}}{(m+p)!} = m!\, e^{-y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(m+p)!}$$

Ahora introducimos este resultado en la integral I_1

$$I_1 = k\int_0^1 u^m \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^2}\,du = k\int_0^1 u^m\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y}{e^y-1}\right)dy\right)du = k\int_0^{\infty}\frac{y}{e^y-1}\int_0^1 (u^m e^{-uy})\,du\,dy$$

$$I_1 = k\int_0^{\infty}\frac{y}{e^y-1}\int_0^1 (u^m e^{-uy})\,du\,dy = k\int_0^{\infty}\frac{y}{e^y-1} I_m\,dy = k\int_0^{\infty}\frac{y}{e^y-1}\left(m!\,e^{-y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(m+p)!}\right)dy$$

Ahora se hacen los arreglos necesarios para realizar la integral

$$I_1 = k\int_0^{\infty}\frac{y}{e^y-1}\left(m!\,e^{-y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(m+p)!}\right)dy = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{km!}{(m+p)!}\int_0^{\infty}\frac{y^p e^{-y}}{e^y-1}\,dy$$

Se usa la identidad

$$\frac{1}{e^y-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny}$$

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{km!}{(m+p)!} \int_0^{\infty} \frac{y^p e^{-y}}{e^y - 1} dy = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{km!}{(m+p)!} \int_0^{\infty} y^p e^{-y} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny}\, dy$$

Se simplifica y la integral queda así

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{km!}{(m+p)!} \int_0^{\infty} y^p \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2+n)y}\, dy$$

Sacamos la sumatoria de la integral y hacemos el cambio de variables $z = (2+n)y$

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{km!}{(m+p)!} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} y^p e^{-(2+n)y} dy = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{km!}{(m+p)!} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{z^p}{(2+n)^p} e^{-z} \frac{dz}{(2+n)}$$

Se simplifica la integral y se puede observar que es la función Gamma

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{km!}{(m+p)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^{p+1}} \int_0^{\infty} z^p e^{-z} dz$$

La integral queda resuelta

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{km!}{(m+p)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^{p+1}} \Gamma(p+1)$$

Se tiene la identidad con la función Zeta de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^{p+1}} = \zeta(p+1) - 1$$

Por esta razón la integral queda

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{km!}{(m+p)!} \Gamma(p+1)(\zeta(p+1) - 1)$$

El resultado se puede expresar de este modo

$$I_1 = k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+1)} \Gamma(p+1)(\zeta(p+1) - 1)$$

Ahora se puede escribir que la integral buscada es

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{x}\right\}^m dx = k\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+1)}\Gamma(p+1)(\zeta(p+1)-1)$$
$$-\sum_{l=1}^{k} k\left[\left(\sum_{p=1}^{m-1}(-1)^{p-1}\frac{pl^{p-1}}{(m-p)}+(-1)^{m-1}\frac{l^m}{(l+1)}+(-1)^{m-1}ml^{m-1}\ln(l+1)\right)\right.$$
$$\left.-\left((-1)^{m-1}\frac{l^m}{l}+(-1)^{m-1}ml^{m-1}\ln(l)\right)\right]$$

Si el valor de $m=k$

$$\int_0^1 \left\{\frac{m}{x}\right\}^m dx = m\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+1)}\Gamma(p+1)(\zeta(p+1)-1)$$
$$-\sum_{l=1}^{k} m\left[\left(\sum_{p=1}^{m-1}(-1)^{p-1}\frac{pl^{p-1}}{(m-p)}+(-1)^{m-1}\frac{l^m}{(l+1)}+(-1)^{m-1}ml^{m-1}\ln(l+1)\right)\right.$$
$$\left.-\left((-1)^{m-1}\frac{l^m}{l}+(-1)^{m-1}ml^{m-1}\ln(l)\right)\right]$$

4.2.11 Solución de la Integral $\int_0^1 \left\{\frac{\mathbf{k}}{\sqrt[k]{x}}\right\} \boldsymbol{dx}$

Para resolver esta integral

$$\int_0^1 \left\{\frac{k}{\sqrt[k]{x}}\right\} dx$$

Se debe hacer la siguiente transformación de coordenadas

$$x = \frac{k^k}{y^k};\ dx = -k^{k+1}y^{-k-1}dy$$

$$\frac{k}{\sqrt[k]{\frac{k^k}{y^k}}} = y$$

Con este cambio de variables se produce un cambio en límites de integración

$$x = 0; y = \infty$$

$$x = 1; y = k^k$$

Se hacen las sustituciones de los cambios en la integral

$$I = \int_0^1 \left\{\frac{k}{\sqrt[k]{x}}\right\} dx = \int_\infty^{k^k} \{y\}\left(-k^{k+1}y^{-k-1}\right)dy = k^{k+1} \int_{k^k}^{\infty} \{y\}y^{-k-1}dy$$

Se aplica la propiedad de las funciones de parte fraccional

$$I = \sum_{l=k}^{\infty} k^{k+1} \int_l^{l+1} (y-l)y^{-k-1}dy = \sum_{l=k}^{\infty} k^{k+1} \int_l^{l+1} \left(y^{-k} - ly^{-k-1}\right)dy$$

Después de ejecutar la integral se procede con reordenar los términos

$$I = \sum_{l=k}^{\infty} k^{k+1} \left(\frac{y^{-k+1}}{-k+1} - \frac{ly^{-k}}{-k}\right)\Bigg]_l^{l+1} = \sum_{l=k}^{\infty} k^{k+1} \left(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{y^{k-1}} + \frac{l}{k}\frac{1}{y^k}\right)\Bigg]_l^{l+1}$$

Se hacen las sustituciones de los límites de integración

$$I=\sum_{l=k}^{\infty}k^{k+1}\left(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(l+1)^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\frac{l}{l^{k-1}}+\frac{l}{k}\frac{1}{(l+1)^{k}}-\frac{l}{k}\frac{1}{l^{k}}\right)$$

Se plantea la suma parcial de la integral hasta el término n, observe que se obviaron el factor k^{k+1}

$$S_n=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}\frac{1}{l^{k-1}}-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(l+1)^{k-1}}+\frac{1}{k}\frac{l}{(l+1)^{k}}-\frac{1}{k}\frac{l}{l^{k}}\right)$$

Se realiza la suma hasta el término n

$$\begin{aligned}S_n=&\frac{1}{k-1}\frac{1}{1^{k-1}}-\frac{1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{k}\frac{1}{2^{k}}-\frac{1}{k}\frac{1}{1^{k}}+\frac{1}{k-1}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{k-1}\frac{1}{3^{k-1}}+\frac{1}{k}\frac{2}{3^{k}}-\frac{1}{k}\frac{2}{2^{k}}+\frac{1}{k-1}\frac{1}{3^{k-1}}\\&-\frac{1}{k-1}\frac{1}{4^{k-1}}+\frac{1}{k}\frac{3}{4^{k}}-\frac{1}{k}\frac{3}{3^{k}}+\frac{1}{k-1}\frac{1}{4^{k-1}}-\frac{1}{k-1}\frac{1}{5^{k-1}}+\frac{1}{k}\frac{4}{5^{k}}-\frac{1}{k}\frac{4}{4^{k}}+\cdots\\&+\frac{1}{k-1}\frac{1}{(n-1)^{k-1}}-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(n)^{k-1}}+\frac{1}{k}\frac{n-1}{(n)^{k}}-\frac{1}{k}\frac{n-1}{(n-1)^{k}}+\frac{1}{k-1}\frac{1}{(n)^{k-1}}\\&-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(n+1)^{k-1}}+\frac{1}{k}\frac{n}{(n+1)^{k}}-\frac{1}{k}\frac{n}{n^{k}}\end{aligned}$$

Se puede observar que se eliminan algunos términos y se simplifica bastante la suma parcial, dado que la serie es telescópica. En concreto,

$$S_n=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(n+1)^{k-1}}+\frac{1}{k}\frac{n}{(n+1)^{k}}-\frac{1}{k}\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m^k}$$

Cuando se hace tender n al infinito los términos que inversos de n se hacen cero y la expresión queda simplificada

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{k-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k-1}\frac{1}{(n+1)^{k-1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\frac{n}{(n+1)^{k}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{m=k}^{n}\frac{1}{m^k}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{m^k}$$

Cuando se lleva este resultado a la integral original y se hacen algunos cambios en índices para que la suma comience en $m=1$. Se puede observar que aparece la función Zeta de Riemann en el resultado y la Números Armónicos.

$$I = \frac{k^{k+1}}{k-1} - k^k \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^k} \right) = \frac{k^{k+1}}{k-1} - k^k \left(\zeta(k) - \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^k} \right)$$

En resumen, esta integral de función de parte fraccional está relacionada con la función Zeta de Riemann ($\zeta(k)$) y con los Números Armónicos (H_k)

$$\int_0^1 \left\{ \frac{k}{\sqrt[k]{x}} \right\} dx = \frac{k^{k+1}}{k-1} - k^k (\zeta(k) - H_k)$$

4.2.12 Solución de la integral $\int_0^{\pi/2}\{\tan x\}dx$

Se procede a realizar la siguiente transformación de variables

$$\tan x = \frac{sen\ x}{\cos x} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{sen\ x} = \cot x$$

Ahora los límites de integración cambian

$$u = \frac{\pi}{2} - x$$

$$du = -dx$$

$$u = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\ ; u = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Por lo que la integral queda de la siguiente forma

$$\int_0^{\pi/2}\{\tan x\}dx = -\int_{\pi/2}^{0}\{\cot x\}dx = \int_0^{\pi/2}\{\cot x\}dx$$

Ahora se aplica las propiedades de las funciones de parte fraccionada

$$\int_0^{\pi/2}\{\cot x\}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\cot^{-1}(k+1)}^{\cot^{-1}(k)}(\cot x - k)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\ln(sen\ x) - kx]_{\cot^{-1}(k+1)}^{\cot^{-1}(k)}$$

Observe que los límites de integración son funciones inversas de la cotangente evaluadas en k y $k+1$, en la integral original también se tienen ángulos como límites, ahora se está empleando todos los valores posibles que toma los límites atendiendo las propiedades de las funciones de parte fraccionada

$$\int_0^{\pi/2}\{\cot x\}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\ln\left(sen\ (\cot^{-1} k)\right) - k\cot^{-1} k\right) - \left(\ln\left(sen\ (\cot^{-1}(k+1))\right) - k\cot^{-1}(k+1)\right)\right]$$

Ahora buscamos las sumas parciales de la serie para simplificar la expresión:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}\left[\ln\left(sen\ (\cot^{-1} k)\right) - \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(k+1))\right) + k\cot^{-1}(k+1) - k\cot^{-1} k\right]$$

$$
\begin{aligned}
s_n = {} & \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(1))\right) - \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(2))\right) + 1\cot^{-1}(2) - 1\cot^{-1}(1) + \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(2))\right) \\
& - \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(3))\right) + 2\cot^{-1}(3) - 2\cot^{-1}(2) + \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(3))\right) \\
& - \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(4))\right) + 3\cot^{-1}(4) \\
& - 3\cot^{-1}(3) + \cdots + \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(n-1))\right) - \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(n))\right) + (n-1)\cot^{-1}(n) \\
& - (n-1)\cot^{-1}(n-1) + \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(n))\right) - \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(n+1))\right) \\
& + n\cot^{-1}(n+1) - n\cot^{-1}(n)
\end{aligned}
$$

Se puede observar que la serie es telescópica y por tanto se puede simplificar de manera sencilla. El resultado es

$$s_n = \ln\left(sen\ (\cot^{-1} 0)\right) - \ln\left(sen\ (\cot^{-1}(n+1))\right) - \sum_{k=1}^{n} \cot^{-1} k + n\cot^{-1}(n+1)$$

Usando las relaciones trigonométricas,

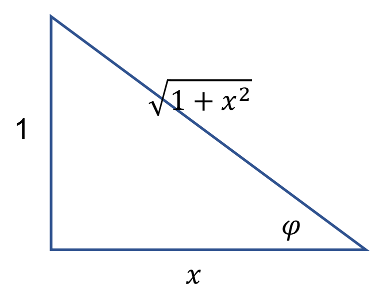

Figura 5. Triángulo que relaciona el ángulo con las funciones trigonométricas.

En la figura anterior se puede observar que la función trigonométrica cotangente es

$$\cot\varphi = x \to \varphi = \cot^{-1} x$$

$$sen\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ahora se puede hacer simplificaciones adicionales

$$ln\left(sen\ (\cot^{-1} 0)\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+0^2}}\right) = \ln 1 = 0$$

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} sen\,(\cot^{-1}(n+1)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(n)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Estas simplificaciones se justifican porque el valor de n tiende al infinito, eso trae como consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\mathrm{sen}(\cot^{-1}(n+1))) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\lim_{n\to\infty} \ln n$$

Por otro lado, el término $n\cot^{-1}(n+1)$ tiende a 0 cuando m tiende al infinito, así este término queda simplificado de la siguiente manera

$$\lim_{n\to\infty} n\cot^{-1}(n+1) = 1$$

Queda pendiente expresar de otra manera la suma de la función inversa de cotangente. Para ello se recurre a variable compleja. Se parte de la definición de seno y coseno de z

$$sen\,z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{sen\,z} = \frac{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}} = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = k$$

Como $z = \cot^{-1} k$, se busca el valor de z despejándolo de la ecuación

$$i(e^{iz}+e^{-iz}) = k(e^{iz}-e^{-iz})$$

Multiplicamos toda la expresión por e^{iz} y se simplifica

$$i(e^{2iz}+1) = k(e^{2iz}-1)$$

$$ie^{2iz}+i = ke^{2iz}-k$$

$$ie^{2iz}-ke^{2iz} = -i-k$$

$$(i-k)e^{2iz} = -i-k$$

$$e^{2iz} = \frac{-i-k}{i-k} = \frac{k+i}{k-i}$$

Se aplica la propiedad del logaritmo natural

$$2iz = \ln\left(\frac{k+i}{k-i}\right)$$

$$z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{k+i}{k-i}\right) = \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{k+i}{k-i}\right) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{k-i}{k+i}\right)$$

Se reordenan los términos para poder expresar el resultado en serie de potencias:

$$z = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{k-i}{k+i}\right) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{k\left(1-\frac{i}{k}\right)}{k\left(1+\frac{i}{k}\right)}\right) = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{\left(1-\frac{i}{k}\right)}{\left(1+\frac{i}{k}\right)}\right)$$

$$z = \frac{i}{2}\ln\left(1-\frac{i}{k}\right) - \frac{i}{2}\ln\left(1+\frac{i}{k}\right)$$

Se usa la identidad:

$$\ln(1-x) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}$$

$$\ln\left(1-\frac{i}{k}\right) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{i}{k}\right)^m}{m} = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\frac{1}{k^m}$$

$$\ln\left(1-\left(-\frac{i}{k}\right)\right) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{i}{k}\right)^m}{m} = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\frac{1}{k^m}$$

Ahora se puede sustituir en la serie cotangente inversa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cot^{-1}(k) = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{i}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{i}{k}\right)\right] = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\frac{1}{k^m} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\frac{1}{k^m}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cot^{-1}(k) = -\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\frac{1}{k^m} + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\frac{1}{k^m}$$

Obsérvese que en esta serie aparecen términos que se corresponden con la función Zeta de Riemann. La función Zeta de Riemann no converge cuando $m = 1$, por esta razón se desarrolla la serie para este valor. De este modo la serie queda de la siguiente manera

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cot^{-1}(k) = -\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i^1}{1}\right)\frac{1}{k^1} + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-i)^1}{1}\right)\frac{1}{k^1} - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\frac{1}{k^m} + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\frac{1}{k^m}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cot^{-1}(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\frac{1}{k^m} + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\frac{1}{k^m}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cot^{-1}(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\frac{1}{k^m} + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\frac{1}{k^m}$$

Se reordena las sumatorias para hacer relucir la función Zeta de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cot^{-1}(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m} + \frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m}$$

Para recordar, la función Zeta de Riemann es

$$\zeta(m) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m}$$

La expresión para la suma infinita de cotangente inversa es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cot^{-1}(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\zeta(m) + \frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\zeta(m)$$

Ahora la integral será

$$\int_0^{\pi/2}\{\tan x\}dx = I$$

$$I = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\zeta(m) - \frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\zeta(m)$$

Existe una identidad entre funciones especiales, en este caso la función Zeta de Riemann y la constante de Euler-Mascheroni y la función Gamma:

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(m)}{m}x^m = -\gamma x + \ln\big(\Gamma(1-x)\big)$$

Así los términos que tienen la función Zeta de Riemann se pueden expresar

$$\frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{i^m}{m}\right)\zeta(m) = \frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(m)}{m}i^m = \frac{i}{2}\big[-\gamma i + \ln\big(\Gamma(1-i)\big)\big]$$

$$\frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{(-i)^m}{m}\right)\zeta(m) = \frac{i}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(m)}{m}(-i)^m = \frac{i}{2}\big[\gamma i + \ln\big(\Gamma(1+i)\big)\big]$$

Ahora se puede sustituir en la expresión de la integral

$$I = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{i}{2}\big[-\gamma i + \ln\big(\Gamma(1-i)\big)\big] - \frac{i}{2}\big[\gamma i + \ln\big(\Gamma(1+i)\big)\big]$$

$$I = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{i}{2}(-\gamma i) + \frac{i}{2}\ln\big(\Gamma(1-i)\big) - \frac{i}{2}\gamma i - \frac{i}{2}\ln\big(\Gamma(1+i)\big)$$

$$I = 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2}\ln\big(\Gamma(1-i)\big) + \frac{\gamma}{2} - \frac{i}{2}\ln\big(\Gamma(1+i)\big)$$

Como se sabe que la constante de Euler-Mascheroni es

$$-\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

Se sustituye y la integral queda

$$I = 1 - \gamma + \frac{\gamma}{2} + \frac{i}{2}\ln\big(\Gamma(1-i)\big) + \frac{\gamma}{2} - \frac{i}{2}\ln\big(\Gamma(1+i)\big)$$

$$I = 1 + \frac{i}{2}\ln\big(\Gamma(1-i)\big) - \frac{i}{2}\ln\big(\Gamma(1+i)\big)$$

$$I = 1 + \frac{i}{2}\ln\left(\frac{\Gamma(1-i)}{\Gamma(1+i)}\right)$$

Para simplificar aún más la expresión se usa la siguiente identidad

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sen\ (\pi z)}$$

Se remplaza $z = i$

$$\Gamma(i)\Gamma(1-i) = \frac{\pi}{sen\ (\pi i)}$$

$$\Gamma(1-i) = \frac{\pi}{\Gamma(i) sen\ (\pi i)}$$

El valor de $sen\ (\pi i)$ no es convencional, por eso podemos expresarlo de una manera que pueda ser calculado en una calculadora científica de bolsillo

$$sen\ (\pi i) = \frac{e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}}{2i} = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i} = \frac{i}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$sen\ (\pi i) = i\ senh\ \pi$$

También, se puede usar la siguiente identidad para simplificar la expresión

$$\Gamma(1+i) = i\Gamma(i)$$

Se hacen todas las sustituciones para obtener

$$I = 1 + \frac{i}{2}\ln\left(\frac{\Gamma(1-i)}{\Gamma(1+i)}\right) = 1 + \frac{i}{2}\ln\left(\frac{\frac{\pi}{\Gamma(i) i\ senh\ \pi}}{\frac{i\Gamma(i)}{1}}\right) = 1 + \frac{i}{2}\ln\left(\frac{-\pi}{\left(\Gamma(i)\right)^2\ senh\ \pi}\right)$$

Así, la integral buscada es

$$\int_0^{\pi/2} \{\tan x\} dx = 1 + \frac{i}{2}\ln\left(\frac{-\pi}{\left(\Gamma(i)\right)^2 senh\ (\pi)}\right)$$

4.2.13 Solución de la integral $\int_0^1 \int_0^1 \left\{\frac{1}{x+y}\right\}^m dxdy$

Se hace la siguiente transformación de coordenadas

$$t = x + y$$

Los límites de integración se cambian

$$y = 0; t = x$$

$$y = 1; t = x + 1$$

Las diferenciales se hacen respecto a las variables t e y, de modo que, $dt = dy$. Se introduce los cambios en la integral original

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{\frac{1}{x+y}\right\}^m dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{x+1} \left\{\frac{1}{t}\right\}^m dt \right) dx$$

Se integra por parte para seguir realizando la integral

$$f(x) = \int_x^{x+1} \left\{\frac{1}{t}\right\}^m dt$$

$$[f(x)]' = \left\{\frac{1}{x+1}\right\}^m - \left\{\frac{1}{x}\right\}^m$$

$$[g(x)]' = 1$$

$$g(x) = x$$

Se implementa la integración por partes

$$\int_0^1 \left(\int_x^{x+1} \left\{\frac{1}{t}\right\}^m dt \right) dx = \left[x \int_x^{x+1} \left\{\frac{1}{t}\right\}^m dt \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x \left(\left\{\frac{1}{x+1}\right\}^m - \left\{\frac{1}{x}\right\}^m \right) dx$$

Se evalúa $f(x)g(x)$ en los límites $[0,1]$

$$\left[x \int_x^{x+1} \left\{\frac{1}{t}\right\}^m dt \right]_{x=0}^{x=1} = (1) \int_1^{1+1} \left\{\frac{1}{t}\right\}^m dt - (0) \int_0^{0+1} \left\{\frac{1}{t}\right\}^m dt = \int_1^2 \left\{\frac{1}{t}\right\}^m dt$$

La otra parte se simplifica y quedan dos integrales,

$$-\int_{0}^{1} x\left(\left\{\frac{1}{\mathrm{x}+1}\right\}^{m}-\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}^{m}\right)dx=-\int_{0}^{1} x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}+1}\right\}^{m}dx+\int_{0}^{1} x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}^{m}dx$$

Para hacer la integral con el binomio en el denominador se hace el siguiente cambio de variables

$$t=x+1$$

$$x=0;t=1$$

$$x=1;t=2$$

$$dt=dx$$

Se aplican todos los cambios

$$-\int_{0}^{1} x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}+1}\right\}^{m}dx=-\int_{1}^{2}(t-1)\left\{\frac{1}{t}\right\}^{m}dt=-\int_{1}^{2} t\left\{\frac{1}{t}\right\}^{m}dt+\int_{1}^{2}\left\{\frac{1}{t}\right\}^{m}dt$$

La integral será la suma de todas las que se han encontrado

$$I=\int_{1}^{2}\left\{\frac{1}{t}\right\}^{m}dt+\int_{1}^{2}\left\{\frac{1}{t}\right\}^{m}dt-\int_{1}^{2} t\left\{\frac{1}{t}\right\}^{m}dt+\int_{0}^{1} x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}^{m}dx$$

$$I=2\int_{1}^{2}\left\{\frac{1}{t}\right\}^{m}dt-\int_{1}^{2} t\left\{\frac{1}{t}\right\}^{m}dt+\int_{0}^{1} x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}^{m}dx$$

$$I=2\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{t}\right)^{m}dt-\int_{1}^{2} t\left(\frac{1}{t}\right)^{m}dt+\int_{0}^{1} x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}^{m}dx$$

Si $m=1$, la integral queda así

$$I=2\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{t}\right)dt-\int_{1}^{2} t\left(\frac{1}{t}\right)dt+\int_{0}^{1} x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}dx=2\ln 2-1+\int_{0}^{1} x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}dx$$

Para resolver la integral que falta por calcular se hace el siguiente cambio de variable

$$x = \frac{1}{t}$$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

Los límites de integración quedarán

$$x = 0; t = \infty$$

$$x = 1; t = 1$$

Se aplican los cambios a la integral

$$\int_0^1 x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}dx = -\int_\infty^1 \frac{1}{t}\{t\}\left(\frac{dt}{t^2}\right) = \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^3}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathrm{k}}^{k+1} \frac{(t-k)}{t^3}dt$$

$$\int_0^1 x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathrm{k}}^{k+1} \frac{(t-k)}{t^3}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{t}+\frac{k}{2t^2}\right]_k^{k+1}$$

Se evalua la integral en los límites

$$\int_0^1 x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2}\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k+1} - \frac{k}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\right)$$

Se reordenan los términos y se buscan la suma parcial de la sumatoria infinita

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2}\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{k}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{2}\frac{1}{(2)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2}\frac{1}{(3)^2} - \frac{2}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\frac{1}{(4)^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{n-1}{2}\frac{1}{(n)^2}$$
$$-\frac{n-1}{2}\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{n}{2}\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{n}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Como esta serie es telescópica, se simplifica la mayoría de los términos

$$s_n = \frac{n}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

Cuando hacemos tender n al infinito el resultado se simplifica

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{n}{n+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) = 1-\frac{1}{2}\zeta(2)$$

La integral queda

$$I = 2\ln 2 - 1 + \int_0^1 x\left\{\frac{1}{\mathrm{x}}\right\}dx = 2\ln 2 - 1 + 1 - \frac{1}{2}\zeta(2) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\zeta(2)$$

Dado que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ el resultado final es

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{1}{\mathrm{x}+y}\right\}dxdy = 2\ln 2 - \frac{\pi^2}{12}$$

Cuando $m = 2$ el resultado es

$$I_2 = 1 - \ln 2 + \int_0^1 x\left\{\frac{1}{x}\right\}^2 dx = \frac{5}{2} - \ln 2 - \gamma_0 - \frac{\pi^2}{12}$$

Para $m \geq 3$ la integral es

$$I_m = \frac{m-3}{(m-1)(m-2)} + \frac{2^{2-m}}{(m-1)(m-2)} + \frac{\Gamma(m+1)}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+1)!}{(m+j)!}(\zeta(j+2)-1)$$

En este resultado se puede ver claramente la vinculación entre esta integral y las funciones especiales Gamma y Zeta de Riemann.

4.2.14 Solución de la integral $\int_0^1 \int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\} dxdy$

Para hacer esta integral se hace la habitual transformación de coordenadas

$$y = \frac{x}{t}$$

Cuyos diferenciales se relacionan

$$dy = -\frac{x}{t^2}dt$$

Los límites de la integral quedarán

$$y = 0; t = \infty$$

$$y = 1; t = x$$

Se aplican los cambios a la integral original

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\} dxdy = \int_0^1 x\left(\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt\right)dx$$

Para continuar con el proceso de integración se procede mediante integrales por partes

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt$$

$$[f(x)]' = -\frac{\{x\}}{x^2}$$

$$[g(x)]' = x$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2}$$

Se hacen las sustituciones

$$\int_0^1 x\left(\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt\right)dx = [g(x)f(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 [f(x)]'g(x)dx$$

$$\int_0^1 x\left(\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt\right)dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt\right)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(-\frac{\{x\}}{x^2}\right)\frac{x^2}{2}dx$$

El primer término de la integral del segundo miembro es

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \left(\frac{1^2}{2}\right)\left(\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\left(\int_0^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt\right) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt$$

Como se ha visto antes esta integral es

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}dt = \frac{1}{2}(1-\gamma_0)$$

El otro término del segundo miembro será

$$\int_0^1 \left(-\frac{\{x\}}{x^2}\right)\frac{x^2}{2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \{x\}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

La integral buscada es

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\}dxdy = \frac{1}{2}(1-\gamma_0) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{\gamma_0}{2}$$

Esta integral doble de función de parte fraccional está relacionada con la constante de Euler-Mascheroni.

4.2.15 Solución de la integral $\int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{x}\right)^k - \left(\frac{1}{1-x}\right)^k\right\} x^m(1-x)^m dx$

Para realizar esta integral se necesita recurrir a otra propiedad de las funciones de parte fraccional

$$\{f(x)\} + \{-f(x)\} = 1$$

En este caso la función es esta

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^k - \left(\frac{1}{1-x}\right)^k$$

Y el negativo de la función esta

$$-f(x) = -\left(\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{1-x}\right)^k$$

Por tanto, se debe cumplir

$$\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^k - \left(\frac{1}{1-x}\right)^k\right\} + \left\{-\left(\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{1-x}\right)^k\right\} = 1$$

Ahora, en la integral si se hace la siguiente transformación de coordenadas

$$y = 1 - x; \;\; dy = -dx$$

Con se consiguiente cambio de los límites de integración

$$x = 0; y = 1$$

$$x = 1; y = 0$$

Se hacen los cambios en la integral original y se obtiene el siguiente resultado

$$\int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{x}\right)^k - \left(\frac{1}{1-x}\right)^k\right\} x^m(1-x)^m dx = \int_1^0 \left\{\left(\frac{1}{1-y}\right)^k - \left(\frac{1}{y}\right)^k\right\} (1-y)^m y^m(-dy)$$

Se simplifica y reordena los límites de integración

$$\int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{x}\right)^k - \left(\frac{1}{1-x}\right)^k\right\} x^m(1-x)^m dx = \int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{1-y}\right)^k - \left(\frac{1}{y}\right)^k\right\} y^m(1-y)^m dy$$

De la propiedad de las funciones de parte fraccional se puede deducir

$$\{-f(x)\} = 1 - \{f(x)\}$$

De ahí se tiene

$$\int_0^1 \left(1 - \left\{\left(\frac{1}{y}\right)^k - \left(\frac{1}{1-y}\right)^k\right\}\right) y^m (1-y)^m dy$$

Si se simplifica

$$\int_0^1 y^m (1-y)^m dy - \int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{y}\right)^k - \left(\frac{1}{1-y}\right)^k\right\} y^m (1-y)^m dy$$

En la expresión anterior se puede observar que el primer término es una función especial, la función Beta, y el segundo término es la integral original

$$\int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{y}\right)^k - \left(\frac{1}{1-y}\right)^k\right\} y^m (1-y)^m dy = \int_0^1 y^m (1-y)^m dy - \int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{y}\right)^k - \left(\frac{1}{1-y}\right)^k\right\} y^m (1-y)^m dy$$

Se despeja la integral buscada y se obtiene

$$2\int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{y}\right)^k - \left(\frac{1}{1-y}\right)^k\right\} y^m (1-y)^m dy = \int_0^1 y^m (1-y)^m dy$$

Si se recurre a la función Beta se tiene que la integral del segundo miembro es

$$\int_0^1 y^m (1-y)^m dy = \int_0^1 y^{m+1-1} (1-y)^{m+1-1} dy = B(m+1, m+1)$$

La integral será igual

$$2\int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{y}\right)^k - \left(\frac{1}{1-y}\right)^k\right\} y^m (1-y)^m dy = B(m+1, m+1)$$

Como se sabe de la relación entre la función Beta y la función Gamma

$$B(m+1,m+1)=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+m+1)}=\frac{\big(\Gamma(m+1)\big)^2}{\Gamma(2m+2)}$$

Ahora se tiene el resultado final de la integral

$$\int_0^1 \left\{\left(\frac{1}{y}\right)^k-\left(\frac{1}{1-y}\right)^k\right\} y^m(1-y)^m dy=\frac{1}{2}\frac{\big(\Gamma(m+1)\big)^2}{\Gamma(2m+2)}$$

En esta integral de función de parte fraccional queda de relieve la relación entre esta función particular y la funciones especiales Gamma y Beta.

4.2.16 Solución de la integral $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \ln x \, dx$

Se hace la transformación de variable

$$x = \frac{1}{t}; \;\; dx = -\frac{1}{t^2}dt$$

$$x = \infty; \;\; t = \infty$$

$$x = 1; \;\; t = 1$$

Se aplican los cambios en la integral

$$\int_{\infty}^{1} \{t\}(-\ln t)\left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_{\infty}^{1} \{t\}\frac{\ln t}{t^2}dt = -\int_{1}^{\infty} \{t\}\frac{\ln t}{t^2}dt$$

Ahora se aplica las propiedades de las funciones de parte fraccional

$$I = -\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1} \frac{(t-k)}{t^2}\ln(t)\,dt = -\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1} \left(\frac{\ln t}{t} - \frac{k\ln t}{t^2}\right)dt$$

$$I = -\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1} \left(\frac{\ln t}{t} - \frac{k\ln t}{t^2}\right)dt = -\int_{1}^{\infty} \ln t\, d(\ln t)dx + +\sum_{k=1}^{\infty} k\int_{k}^{k+1} \frac{\ln t}{t^2}dt$$

Resolviendo la integral por el método de integración por partes en la integral

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\int_{k}^{k+1} \frac{\ln t}{t^2}dt$$

$$du = \frac{dt}{t}; \; u = \ln t$$

$$v = \ln t\,; dv = \frac{dt}{t}$$

$$dv = \frac{1}{t^2}dt; \; v = -\frac{1}{t}$$

Se aplica el método

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \int_{k}^{k+1} \frac{\ln t}{t^2} dt = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(-\frac{\ln t}{t} \Big]_k^{k+1} + \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^2} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \int_{k}^{k+1} \frac{\ln t}{t^2} dt = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(-\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{\ln k}{k} - \left(\frac{1}{t}\right) \right) \Bigg]_k^{k+1}$$

Se evalúa la integral y luego se reorganizan los términos

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \int_{k}^{k+1} \frac{\ln t}{t^2} dt = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\ln k}{k} - \frac{\ln(k+1)}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \int_{k}^{k+1} \frac{\ln t}{t^2} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln k - \frac{\mathrm{k} \ln(k+1)}{k+1} - \frac{k}{k+1} + 1 \right)$$

Se dejan algunos términos sin simplificar para poder hacer las simplificaciones de manera más natural

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \int_{k}^{k+1} \frac{\ln t}{t^2} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k \ln k}{k} - \frac{k \ln(k+1)}{k+1} + \frac{-k+k+1}{k+1} \right)$$

Se plantea la suma parcial del resultado para determinar el término de suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(k \frac{\ln k}{k} - k \frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right)$$

Se plantea la suma parcial hasta el término n

$$S_n = 1\frac{\ln 1}{1} - 1\frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} + 2\frac{\ln(2)}{2} - 2\frac{\ln(3)}{3} + \frac{1}{3} + 3\frac{\ln(3)}{3} - 3\frac{\ln(4)}{4} + \frac{1}{4} + 4\frac{\ln(4)}{4} - 4\frac{\ln(5)}{5} + \frac{1}{5} + \cdots$$
$$+ (n-1)\frac{\ln n - 1}{n-1} - (n-1)\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + n\frac{\ln n}{n} - n\frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

La parte telescópica de la serie se simplifican y el resultado es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k + 1}{k+1} - n\frac{\ln(n+1)}{n+1} + H_n - 1$$

Como los valores de n son enormes, la aproximación que se muestra adelante es aplicable

$$n \gg 1; \;\; n \approx n + 1$$

Eso simplifica el resultado

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k + 1}{k + 1} - \ln n + H_n - 1$$

Volviendo a la integral que falta

$$-\int_{1}^{\infty} \ln t \, d(\ln t) dx = -\lim_{n \to \infty} \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^n = -\frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} (\ln n)^2$$

La integral original queda resuelta por la siguiente expresión.

$$\int_{0}^{1} \left\{\frac{1}{x}\right\} \ln x \, dx = \lim_{n \to \infty} [H_n - \ln n] + \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} (\ln^2 n)\right) - 1 = \gamma_0 + \gamma_1 - 1$$

Notese que en esta expresión aparece la constante de Euler-Mascheroni y la constante de Stieltjes para $n = 1$

4.2.17 Solución de la integral $\int_0^1 x^m \left\{\frac{1}{x}\right\}^k dx$

Se considera la siguiente integral

$$\int_0^1 x^m \left\{\frac{1}{x}\right\}^k dx$$

En donde k y m con números reales y mayores que 1.

Para resolver esta integral se debe hacer el siguiente cambio de variables

$$y = \frac{1}{x}$$

Los diferenciales serán

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx;\ -\frac{1}{y^2}dy = -dx$$

Los límites de la integral quedarán así

$$x = 0; y = \infty$$

$$x = 1; y = 1$$

Se sustituyen en la integral original todos los cambios calculados

$$\int_0^1 x^m \left\{\frac{1}{x}\right\}^k dx = -\int_\infty^1 \left(\frac{1}{y^m}\right)\{y\}^k \frac{1}{y^2}dy = \int_1^\infty \frac{\{y\}^k}{y^{m+2}}dy$$

Se recurre a las propiedades de las funciones de parte fraccional y se aplica a la integral

$$\int_0^1 x^m \left\{\frac{1}{x}\right\}^k dx = \sum_{l=1}^{\infty}\int_l^{l+1} \frac{(y-l)^k}{y^{m+2}}dy$$

Se hace otro cambio de variables para

$$u = y - l;\ \ u = l - l = 0;\ \ y = l$$

$$du = dy;\ \ u = 1;\ \ y = l + 1$$

Con esta transformación se puede obtener la solución de la integral

$$\sum_{l=1}^{\infty}\int_{l}^{l+1}\frac{(y-l)^k}{y^{m+2}}dy=\sum_{l=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{u^k}{(u+l)^{m+2}}du=\int_{0}^{1}u^k\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^{m+2}}du$$

Ahora se sustituye en la integral anterior

$$\int_{0}^{1}u^k\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^{m+2}}du=\int_{0}^{1}u^k\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^{m+2}}du$$

Se aplica la identidad de la función Gamma

$$\frac{1}{(u+l)^{m+2}}=\frac{1}{(m+1)!}\int_{0}^{\infty}e^{-(u+l)y}y^{m+1}dy$$

Se reintroduce la suma infinita

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^{m+2}}=\sum_{l=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-(u+l)y}y^{m+1}dy=\sum_{l=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-uy}y^{m+1}e^{-ly}dy$$

Se reorganiza los términos de la suma en l

$$\sum_{l=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-uy}y^{m+1}e^{-ly}dy=\int_{0}^{\infty}e^{-uy}y^{m+1}\left(\sum_{l=1}^{\infty}e^{-ly}\right)dy$$

Se usa la identidad

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty}e^{-ly}\right)=\frac{1}{e^{y}-1}$$

Se reemplaza en la integral anterior y se simplifica

$$\int_{0}^{\infty}e^{-uy}y^{m+1}\left(\sum_{l=1}^{\infty}e^{-ly}\right)dy=\int_{0}^{\infty}e^{-uy}y^{m+1}\left(\frac{1}{e^{y}-1}\right)dy=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y^{m+1}}{e^{y}-1}\right)dy$$

Ahora se puede observar cómo se ha transformado la suma infinita que se apartó de la integral

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^2}=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y}{e^{y}-1}\right)dy$$

Se reintroduce la transformación en la integral original

$$I = k\int_{0}^{1} u^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(u+l)^2}\,du = k\int_{0}^{1} u^k \left(\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y^{m+1}}{e^y - 1}\right)dy\right)du$$

Ahora se reorganizan los términos según los diferenciales de integración

$$k\int_{0}^{1} u^k \int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y^{m+1}}{e^y - 1}\right)dy\,du = k\int_{0}^{\infty}\frac{y^{m+1}}{e^y - 1}\int_{0}^{1}\left(u^k e^{-uy}\right)du\,dy$$

Se puede observar que la integral interior, la que depende de u, tiene la siguiente propiedad

$$I_k = \int_{0}^{1} u^k e^{-uy}du$$

El método más apropiado para resolverla es usando integral por partes

$$I_k = \int_{0}^{1} u^k e^{-uy}du = -\left[\frac{u^k e^{-yu}}{y}\right]_0^1 + \frac{k}{y}\int_{0}^{1} u^{k-1}e^{-uy}du = -\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_0^1 + \frac{k}{y}\int_{0}^{1} u^{k-1}e^{-uy}du$$

Al final queda otra integral, similar a la primera, pero tiene una propiedad interesante

$$I_{k-1} = \int_{0}^{1} u^{k-1}e^{-uy}du$$

Así en esta integral se puede observar una relación de recurrencia

$$I_k = -\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_0^1 + \frac{k}{y}\int_{0}^{1} u^{k-1}e^{-uy}du = -\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_0^1 + \frac{k}{y}I_{k-1}$$

Para aprovechar esta propiedad, se define un término que depende de m

$$\alpha_k = \frac{I_k y^k}{k!}$$

Por la relación de recurrencia que tiene I_k, se puede escribir

$$\alpha_k = \left(-\left[\frac{e^{-y}}{y}\right]_0^1 + \frac{k}{y}I_{k-1}\right)\frac{y^k}{k!}$$

Si se continúa hasta llegar al primer término, se tiene

$$\alpha_k = -\frac{e^{-y}}{y}\left(\frac{y^k}{k!} + \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + \frac{y}{1}\right) + \frac{1-e^{-y}}{y}$$

Si se ordenan los términos y se reescriben

$$\alpha_k = \frac{e^{-y}}{y}\left(e^{y} - \left(\frac{y^k}{k!} + \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + \frac{y}{1}\right)\right) = \frac{e^{-y}}{y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{k+p}}{(k+p)!}$$

Recordemos que se está determinando I_k

$$I_k = \frac{k!}{y^k}\frac{e^{-y}}{y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{k+p}}{(k+p)!} = k!\,e^{-y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(k+p)!}$$

Ahora introducimos este resultado en la integral I

$$I = \int_0^1 u^k \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(u+l)^{m+2}}\,du = \int_0^1 u^k\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-uy}y^{m+1}}{e^{y}-1}\right)dy\right)du = \int_0^{\infty}\frac{y^{m+1}}{e^{y}-1}\int_0^1 (u^m e^{-uy})\,du\,dy$$

$$I = \int_0^{\infty}\frac{y^{m+1}}{e^{y}-1}I_m\,dy = \int_0^{\infty}\frac{y^{m+1}}{e^{y}-1}\left(k!\,e^{-y}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(k+p)!}\right)dy$$

Ahora se hacen los arreglos necesarios para realizar la integral

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{k!}{(k+p)!}\int_0^{\infty}\frac{y^{m+p}e^{-y}}{e^{y}-1}\,dy$$

Se usa la identidad

$$\frac{1}{e^{y}-1} = \sum_{n=1}^{\infty}e^{-ny}$$

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{k!}{(k+p)!}\int_0^{\infty}\frac{y^{m+p}e^{-y}}{e^{y}-1}\,dy = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{k!}{(k+p)!}\int_0^{\infty} y^{m+p}e^{-y}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ny}\,dy$$

Se simplifica y la integral queda así

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+p)!} \int_0^{\infty} y^{m+p} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(2+n)y}\, dy$$

Sacamos la sumatoria de la integral y hacemos el cambio de variables $z = (2+n)y$

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+p)!} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} y^{m+p} e^{-(2+n)y} dy = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+p)!} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{z^{m+p}}{(2+n)^{m+p}} e^{-z} \frac{dz}{(2+n)}$$

Se simplifica la integral y se puede observar que es la función Gamma

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+p)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^{m+p+1}} \int_0^{\infty} z^p e^{-z} dz$$

La integral queda resuelta

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+p)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^{m+p+1}} \Gamma(m+p+1)$$

Se tiene la identidad con la función Zeta de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^{m+p+1}} = \zeta(m+p+1) - 1$$

Por esta razón la integral queda

$$I = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+p)!} \Gamma(m+p+1)(\zeta(m+p+1) - 1)$$

El resultado se puede expresar de este modo

$$I = k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+p+1)} \Gamma(m+p+1)(\zeta(m+p+1) - 1)$$

Ahora se puede escribir que la integral buscada es

$$\int_0^1 x^m \left\{\frac{1}{x}\right\}^k dx = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+p+1)} \Gamma(m+p+1)(\zeta(m+p+1) - 1)$$

Si el valor de $m = k$

$$\int_0^1 x^m \left\{\frac{1}{x}\right\}^m dx = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+p+1)} \Gamma(m+p+1)(\zeta(m+p+1)-1)$$

$$\int_0^1 x^m \left\{\frac{1}{x}\right\}^m dx = \sum_{p=1}^{\infty} \Gamma(m+1)\,(\zeta(m+p+1)-1)$$

En este resultado se puede ver claramente que esta integral está definida por las funciones Gamma y Zeta Riemann.

Capítulo V Discusión y Análisis de los Resultados

5.1 Análisis de las integrales con la constante de Euler-Mascheroni

Las constantes en matemática tienen un significado que transciende a la misma definición matemática. Por ejemplo, una de las constante más famosas de la matemática es pi, esta constante se define como el cociente del perímetro de un círculo y el diámetro de este. Así, cualquier resultado en donde aparezca el valor de pi, se relaciona a longitudes de circunferencias y diámetros, o al área del circulo, etc. Siendo más rigurosos, estos problemas se ligan al famoso problema de la cuadratura del círculo. Análogamente sucede con la constante de Euler-Mascheroni, en toda operación de análisis matemático donde aparece esta constante es de sospecha inmediata que este problema está ligado a algún tema importante de teoría de números.

La constante de Euler-Mascheroni, de aquí en adelante la constante EM, tiene una significancia interesante, se define a partir de una serie divergente (la serie armónica $\sum 1/k$) y un término divergente ($\ln n$) por si solos. Es bastante llamativo que existan tantas integrales de funciones de parte fraccionada que tienen entre sus resultados esta constante.

Por la naturaleza de las funciones de parte fraccionada, las integrales que poseen una función de este tipo siempre tendrán una serie infinita, que dependen de números enteros, cuando las funciones están definidas sobre los números reales.

Para puntualizar el argumento sobre una base sólida se extenderá el análisis sobre la integral

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = 1 - \gamma_0$$

Primero se mostrará el grafico de la integral original. En el grafico anterior cada trazo de la curva representa un valor de k diferente, de derecha a izquierda $k = 1,2,3$ ... En la integral se puede observar que el valor de k tiende al infinito. Mientras el valor de k tiende al infinito el área debajo de cada curva tiende a cero, o sea, el área debajo de la curva para k es siempre mayor que para $k + 1$, asi, cuando k tiende al infinito el área de ligada a esa curva tiende a cero, lo que implica la convergencia de la integral de la funcional de parte fraccional de $\frac{1}{x}$.

El resultado final de la integral se puede interpretar geométricamente. El área total del perímetro donde está definida la integral es 1, pero el área de la integral es: $1 - \gamma_0$. El área de la integral es, gráficamente hablando.

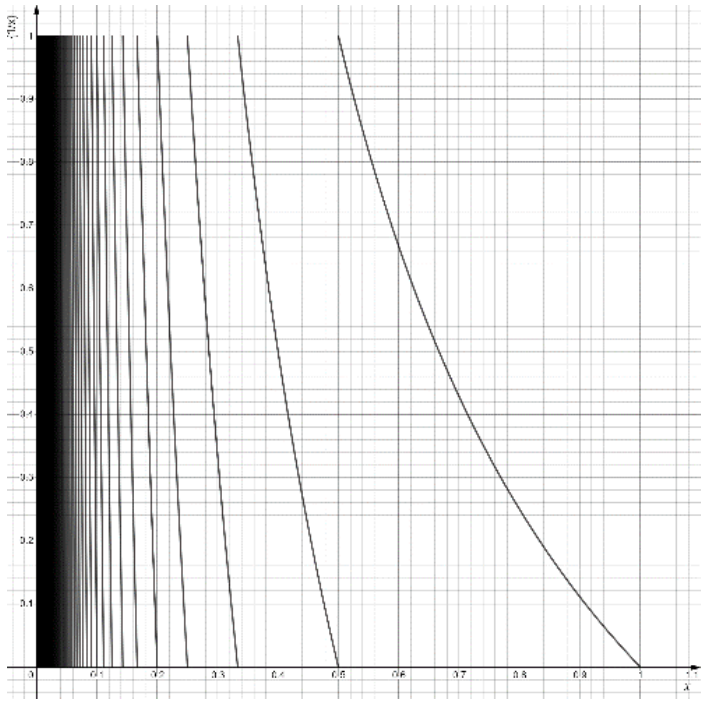

Figura 5. Gráfico de la función $f(x) = \{1/x\}$

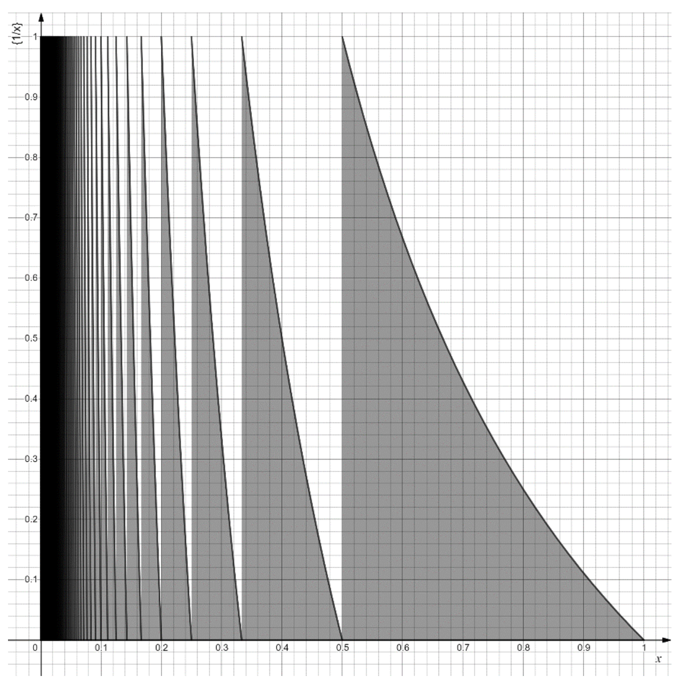

Figura 6. Gráfico de la integral $\int_0^1 \{1/x\}\,dx$

Como se ha dicho, el área del cuadrado de lado 1 es 1, la constante EM se puede representar geométricamente como se puede observar en el gráfico de la página siguiente. El área sombreada representa el valor de la constante EM. La constante EM no se ha demostrado aun si es o no irracional o si es transcendente, que parece insignificante, pero es un problema capital en la teoría de números. Se podría especular que posiblemente se pueda usar una de estas integrales de funciones de parte fraccional para demostrar una o ambas propiedades (irracionalidad algebraica e irracionalidad transcendente) de esta constante que aparece en todos temas dispares del análisis y la teoría de números.

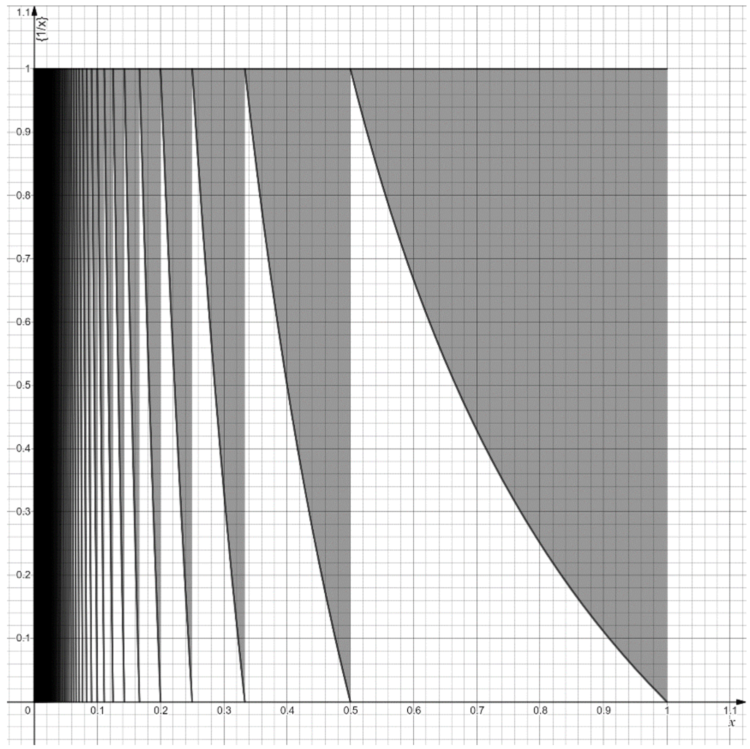

Figura 7. Representación gráfica de constante de Euler-Mascheroni.

Un hecho interesante de este resultado en esta integral es que se puede interpretar el resultado con el área finita de un cuerpo que tiene perímetro infinito, como un fractal. Este grafico tiene la propiedad de un fractal, tanto visual como analítico. Cuando se hace un zoom del grafico manteniendo el origen a la vista la forma del mismo no cambia, siempre luce igual. Es una propiedad inesperada en los resultados, es una especie de fractal direccional, uno que mantiene la forma mientras se hace zoom y se desplaza en una dirección fija, en este caso hacia cero.

Ahora se resaltará la integral siguiente, dada la relación que tiene con la anterior y para justificar los argumentos antes expuestos. Se considerarán los gráficos de las funciones de parte fraccional que componen el integrando.

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}\left\{\frac{1}{1-x}\right\} dx = 2\gamma_0 - 1$$

En la página siguiente se muestra el grafico del integrando. Se puede observar la simetría que exhibe en $x = 0.5$. Más adelante, se muestra una superposición de gráficos que se corresponden con las funciones de parte fraccional en el integrando

$$f(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$$

$$g(x) = \left\{\frac{1}{1-x}\right\}$$

La función $f(x)$ es la que se representa en color rojo y la $g(x)$ se representa en color verde. Se puede observar que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son una reflexión de la otra y que el patrón que dejan en la función $f(x)g(x)$ es el límite de la otra.

El área sombreada representa el valor de la integral. Se puede inferir que el valor de la integral excede el cero porque $2\gamma_0 > 1$, y esa simetría observada se debe a la multiplicidad de la constante de EM.

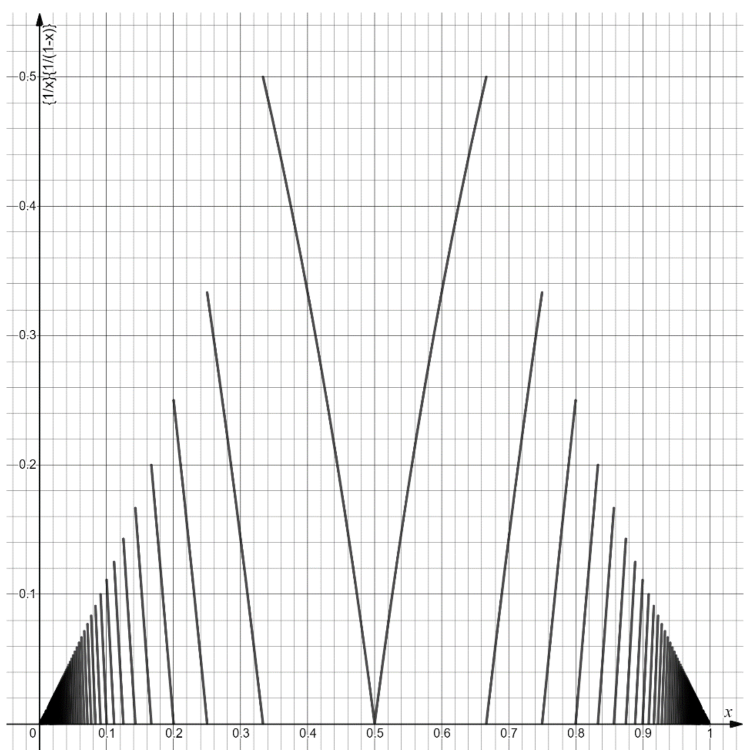

Figura 8. Gráfico de la función $f(x) = \{1/x\}\{1/(1-x)\}$

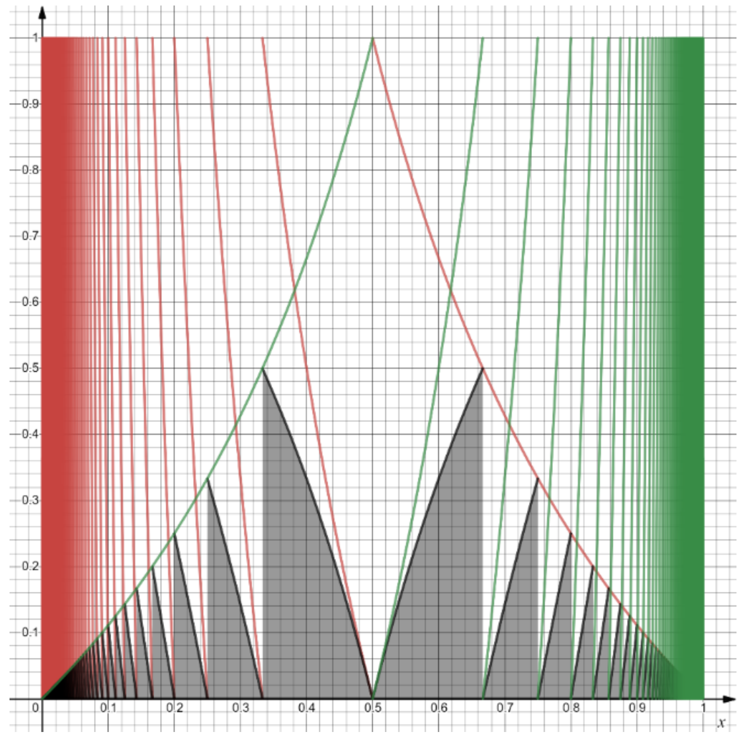

Figura 9. Gráfico compuesto, rojo) función $f(x) = \{1/x\}$, verde) Grafico de la función $g(x) = \{1/(1-x)\}$, negro) Grafico de la función $f(x)g(x)$ y gris) Grafica de la integral $\int_0^1 \{1/x\}\{1/(1-x)\}dx$

La integral siguiente tiene un papel fundamental en mostrar gráficamente el valor de la constante EM

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} \frac{x}{1-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} (\zeta(k+1) - 1) = \gamma_0$$

En la página siguiente esta la gráfica de la función

$$f(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\} \frac{x}{1-x}$$

Obsérvese que en el intervalo $[0,0.5]$ aparecen unos picos curvos muy similares a los que aparecen en el gráfico de la función anterior reseñada. El valor de la constante EM

$$\gamma_0 = 0.577\,215\,664\,901\,860\,606\,\ldots$$

La parte sombreada del grafico a partir del intervalo $[0.5,1]$ tiene un valor de 0.5 exacto. Eso implica que el área sobre la parte curva es

$$\gamma_0 - 0.5 = 0.577\,215\,664\,901\,860\,606\ldots - 0.5 = 0.077\,215\,664\,901\,860\,606\ldots$$

Esta integral se puede igualar a la función Zeta de Riemann, dado que tienen el mismo valor

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}\frac{x}{1-x}\,dx = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta(k)}{k}$$

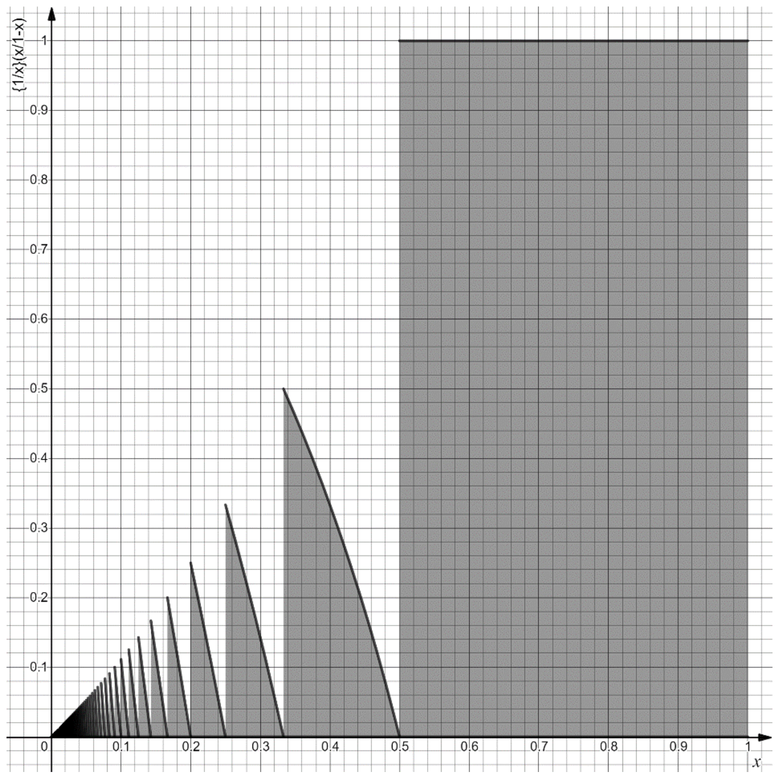

Figura 10. Gráfico de la integral $\int_0^1\{1/x\}(x/(1-x))dx$

5.2 Análisis de las integrales con las funciones especiales

La función Zeta de Riemann es la función especial más estudiada por los matemáticos. Hasta el momento se ha demostrado que esta función está relacionada con muchas otras y sorpresivamente aparece en todas las integrales de funciones de parte fraccional. Basta decir que la constante de EM es un valor que arroja esta expresión

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta(k)}{k}=\gamma_0$$

O estas otras dos identidades que es similar a otros resultados

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}=1-\gamma_0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta(k)-1}{k}=\ln 2+\gamma_0-1$$

Por esta razón, se puede sustentar que todo gira alrededor de función Zeta de Riemann y de las demás funciones especiales.

Se examinará este resultado:

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}^n\left\{\frac{1}{1-x}\right\}^n dx=2\sum_{j=2}^{n-1}(-1)^{n+j-1}\left(\zeta(j)-1\right)+(-1)^n-2n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\big(\zeta(2m+n)-\zeta(2m+n+1)\big)}{n+m}$$

En la solución se consideró a n un numero entero positivo mayor o igual a 2 ($n\geq 2$). Se observó que en todas las soluciones donde involucra coeficientes y exponentes aparecen las funciones especiales. En los casos donde los exponentes se especificaban de manera general, como el caso anterior, siempre aparece la función Zeta de Riemann.

En la definición de la función Zeta de Riemann el valor del argumento es complejo, con la extensión analítica, así que se podría considerar esta extensión acá. La función Zeta de Riemann tiene una importancia capital en la matemática, dada su conexión con los números primos y su distribución. En estos resultados subyace muchas consecuencias interesantes. Para mostrar que se quiere establecer se asumirá un valor positivo en $n=2k$

$$\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}^{2k}\left\{\frac{1}{1-x}\right\}^{2k} dx=2\sum_{j=2}^{2k-1}(-1)^{2k+j-1}\left(\zeta(j)-1\right)+1-4k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\big(\zeta(2m+2k)-\zeta(2m+2k+1)\big)}{2k+m}$$

Existe una identidad cuando el parámetro de la función Zeta es par o impar, si se observa en los términos anteriores de la solución de la integral, los valores par-impar se van invirtiendo en cada suma, lo que permite hacer una división para los términos pares y los impares

$$2\sum_{j=2}^{2k-1}(-1)^{2k+j-1}\left(\zeta(j)-1\right)+1-4k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\zeta(2m+2k)-\zeta(2m+2k+1)\right)}{2k+m}$$
$$=(-1)^{2k+1}(\zeta(2)-1)+1+(-1)^{2k+2}(\zeta(3)-1)+1+\cdots$$
$$+(-1)^{2k+2k-2}(\zeta(2k-1)-1)+1-4k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\zeta(2m+2k)}{2k+m}+4k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\zeta(2m+2k+1)}{2k+m}$$

Se reagrupan los términos pares e impares

$$2\sum_{j=2}^{2k-1}(-1)^{2k+j-1}\left(\zeta(j)-1\right)+1-4k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\zeta(2m+2k)-\zeta(2m+2k+1)\right)}{2k+m}$$
$$=-(\zeta(2)-1)-(\zeta(4)-1)-(\zeta(6)-1)-(\zeta(2k-2)-1)-4k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\zeta(2m+2k)}{2k+m}$$
$$+(\zeta(3)-1)+(\zeta(5)-1)+(\zeta(7)-1)+\cdots+(\zeta(2k-1)-1)+2k-1$$
$$+4k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\zeta(2m+2k+1)}{2k+m}$$

Aplicamos las identidades de la función Zeta conocidas

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(2m+2k)=(-1)^{m+k+1}\frac{2^{2m+2k-1}}{(2m+2k)!}\pi^{2m+2k}$$

Todos estos valores, la evaluación de la función Zeta para un valor par son transcendentes, dado que pi es transcendente. Para los demás valores impares ya se ha demostrado que algunos valores, tal como $\zeta(3)$ conocida como la constante de Apery, son irracionales. Lo que convierte este resultado en una cantidad transcendente.

Demostrar si un número es irracional o transcendente es sumamente difícil, pero dadas las características de estas integrales, puede que sean un camino en el devenir de una posible demostración de si la constante de EM y de otras cantidades que se han mencionado en esta investigación son irracionales o transcendente.

5.3 Sobre las soluciones de las integrales de funciones de parte fraccional

Para solucionar las integrales de funciones de parte fraccional se usaron varios métodos que se pueden considerar avanzados. En casi todas las soluciones encontradas, excepto en dos, se tuvieron cantidades reales y series de enteros.

En la mayoría de los casos se procedió con el siguiente algoritmo de solución:

- Se procede con un cambio de variables apropiado y sus correspondientes cambios en los límites de integración y los diferenciales.
- Si la integral aun no podía ejecutarse con el cambio de variables pasado, para poder aplicar las propiedades de las funciones de parte fraccional, se realizan los cambios de variables necesarios hasta lograr aplicar las propiedades las funciones de parte fraccional.
- Cuando se aplican las propiedades de las funciones de parte fraccional la integral queda una sumatoria en los valores enteros de la variable que se ha transformado.
- En la mayoría de los casos se deben hacer ajustes para que la serie que se obtiene en la solución pueda expresarse en términos de series conocidas o de funciones especiales.
- En todos los casos las series obtenidas son series telescópicas, lo que trae como consecuencia que sea relativamente sencillo buscar la suma de la serie mediante la suma parcial de los términos.

Sorpresivamente todas las series obtenidas como solución de las integrales de funciones de parte fraccional estaban relacionadas con las funciones especiales Zeta de Riemann, la función Gamma o una combinación de ambas.

Las soluciones de las integrales inéditas fueron sorpresivamente de variables compleja, a pesar de haber restringido las cantidades de partida como perteneciente a los números reales.

Conclusión

Las integrales de funciones de parte fraccional están muy ligadas a la función Zeta de Riemann, la función Gamma y la función Beta. El estudio de estas integrales se puede convertir en un medio para hacer inferencias y demostraciones de si los valores que poseen la función Zeta de Riemann sean irracionales o transcendentes, dada su evidente conexión, que se ha documentado en este trabajo.

Las integrales de funciones de parte fraccional se relacionan fundamentalmente con las funciones especiales, aunque se han obtenidos muchos resultados con la constante de Euler-Mascheroni, todas se pueden reducir a la función Zeta de Riemann o a una combinación de funciones especiales entre las funciones, Zeta y Gamma, los números armónicos, los números de Bernoulli y los números de Stieltjes.

Aunque estas integrales se han estudiado de manera extensivas no se han hecho con el objetivo de ligarla otras áreas de la matemática, se han visto como un mero juego o concurso. No se ha hecho un esfuerzo de “juntar” esta disciplina con las demás, como con otras integrales de la matemática que son estudiadas por grupos especializados, entre ellas se pueden citar las integrales elípticas y otras integrales que están formadas en el integrando de combinaciones de funciones especiales. Es obvio que una razón posible de esta carencia de interés viene dada por la falta de aplicaciones prácticas de estas integrales hasta el momento.

Ha quedado patente que estas integrales deben ser analizadas con más detenimiento y que la comunidad de los que hacen matemática le busquen las posibles conexiones que tienen con otras disciplinas que se encuentra bien asentadas en sus diversas áreas, o bien crear los fundamentos formales para una nueva y potencial disciplina que tenga alguna utilidad matemática o que su uso y aplicaciones en otras ramas del conocimiento sean esenciales.

El método de resolución de las integrales de funciones de parte fraccional es único. Se deben emplear métodos avanzados realizar las soluciones en casi todos los casos, pero tienen la ventaja de que el algoritmo que se debe usar es más o menos generalizado. En otras palabras, se puede aplicar en casi todos los casos.

Recomendaciones

En este breve y exploratorio estudio quedo claro para el autor que las integrales de funciones de parte fraccional deben tener un espacio en la bibliografía de los matemáticos. Resulta muy difícil encontrar material sobre el tema. Lo normal es que se encuentre perdido entre otros, sin mencionar las mismas palabras para hacer referencia al tema. Por este motivo se recomienda que este tema sea examinado por Mathematic Subject Classification para la inclusión de este tema con su correspondiente código en el MSC2030.

Esta investigación ha documentado evidencia encontrada por muchos matemáticos de una posible conexión de las integrales de funciones de parte fraccional con la función Zeta de Riemann y con otras funciones especiales. Muchos consideran la función Zeta de Riemann la función más importante de la matemática en este momento, desde hace más de 150 años. Por tanto, animamos a otros investigadores del área de la matemática en consolidar una investigación más formal y orientada en buscar una demostración de la evidencia documentada en este trabajo. Existen muchos indicios y muchas pesquisas que pueden darle impulso a una nueva investigación que trate de determinar los vínculos que pueda haber entre las integrales de funciones de parte fraccional y la función Zeta de Riemann.

Bibliografía

- Furdui, O. (2011). Exotic fractional part integrals and Euler´ s constant. *Analysis International mathematical journal of analysis and its applications*, *31*(3), 249-257.
- Furdui, O. (2013). A class of fractional part integrals and zeta function values. *Integral Transforms and Special Functions*, *24*(6), 485-490.
- Furdui, O. (2013). *Limits, Series, and Fractional Part Integrals*. Springer, New York.
- Furdui, O. (2015). The evaluation of a class of fractional part integrals. *Integral Transforms and Special Functions*, *26*(8), 635-641.
- Furdui, O. (2016). Multiple fractional part integrals and Eulers constant. *Miskolc Mathematical Notes*, *17*(1), 255-266.
- Sharma, S. (2020). A Mystical Generalization of Fractional Part Integral. (Sharma's Conjecture).
- Coffey, M. W. (2011). Fractional part integral representation for derivatives of a function related to ln Gamma (x+ 1). *arXiv preprint arXiv:1101.4257*.
- Iwaniec, H. (2014). *Lectures on the Riemann zeta function* (Vol. 62). American Mathematical Society.
- Chandrasekharan, K. (1953). *Lectures on the Riemann Zeta-function* (Vol. 1). Tata Institute of Fundamental Research.
- Patterson, S. J. (1995). *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function* (No. 14). Cambridge University Press.
- Matsumoto, K. (2000). Recent developments in the mean square theory of the Riemann zeta and other zeta-functions. In *Number theory* (pp. 241-286). Birkhäuser, Basel.
- Masjed-Jamei, M. (2020). *Special Functions and Generalized Sturm-Liouville Problems*. Springer Nature.
- Coffey, M. W. (2011). Evaluation of some second moment and other integrals for the Riemann, Hurwitz, and Lerch zeta functions. *arXiv preprint arXiv:1101.5722*.
- Ivic, A. (2003). Some identities for the Riemann zeta-function. *arXiv preprint math/0305219*.s
- Havil, J. (2003). Gamma: exploring Euler's constant. *The Australian Mathe-matical Society*, 250.
- Srivastava, H. M., & Choi, J. (2001). *Series associated with the zeta and related functions*. Springer Science & Business Media.

- Gelbart, S., & Miller, S. (2004). Riemann's zeta function and beyond. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *41*(1), 59-112.
- Spanier, J., & Oldham, K. B. (1987). *An atlas of functions* (p. 527). New York: Hemisphere publishing corporation.
- Dunne, E., & Hulek, K. (2020). Mathematics Subject Classification 2020. *EMS Newsletter*, *3*(115), 5-6.
- Olver, F. W., Lozier, D. W., Boisvert, R. F., & Clark, C. W. (Eds.). (2010). *NIST handbook of mathematical functions hardback and CD-ROM*. Cambridge university press.
- Amram, M., Dagan, M., Ioshpe, M., & Satianov, P. (2016). Staircase and fractional part functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(7), 1087-1102.
- Sitaramachandrarao, R., & Davis, B. (1986). Some identities involving the Riemann zeta function, II. *Indian J. Pure Appl. Math*, *17*(10), 1175-1186.