



VICERRECTORÍA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA SUPERIOR

**ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES
DIFERENCIALES ORDINARIAS CON LA APLICACIÓN DE SERIE DE POTENCIA**

Sustentante
Antonio Casilla
20130848

Asesor
MSc. Francesco Semerari
Santo Domingo, República Dominicana



Diciembre, 2014

VICERRECTORÍA DE POSGRADO
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA SUPERIOR

ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES
DIFERENCIALES ORDINARIAS CON LA APLICACIÓN DE SERIE DE POTENCIA

Sustentante
Antonio Casilla
20130848

Asesor
MSc. Francesco Semerari
Santo Domingo, República Dominicana

Diciembre, 2014

*“Ninguna investigación humana
Puede ser denominada Ciencia
Si no pasa a través de Pruebas Matemáticas”*

Leonardo Da Vinci

Agradecimientos

Al Señor Todopoderoso por darme salud, fuerza y decisión para lograr la magna tarea de realizar esta maestría.

A la Universidad APEC por recibirme en su institución y permitirme formar parte de su familia en esta etapa.

A la coordinadora del Post- grado de Maestría Dalma Cruz por sus orientaciones pertinentes y atinadas en su visión por la iniciativa de esta primera Maestría en Matemática Superior.

A nuestro asesor Francesco Semerari por su dedicación, entrega y sabiduría con sus orientaciones pertinentes en cada momento requerido sin importar el día.

A todos los maestros y maestras que compartimos este largo trayecto lleno de un sinnúmero de emociones: alegrías, tristezas y esperanza que nos ayudaran a ser cada día mejores profesionales y seres humanos.

Antonio Casilla

Dedicatorias

En conmemoración de mis fallecidos padres Donato Casilla y Clara de León quienes su preocupación siempre fue la realización profesional de sus hijos.

A mi esposa Cándida Victorino por su amor, dedicación, entrega, compromiso y soporte para que mis esfuerzos sean máximos.

A mi hija Cándida K. Casilla que fue mi soporte durante y toda la carrera y fundamentalmente en este tramo final.

Al amigo y compañero de estudios Valerio de la Cruz por su esfuerzo, dedicación y entrega en todo este trabajo final.

Para Marino Brito Guillen por sus atinadas orientaciones en cada momento.

Para mis colegas maestros de San Cristóbal por su colaboración y solidaridad para mi persona y mi familia en difíciles momentos de salud.

RESUMEN

La presente investigación proporciona un conjunto de pautas o normas para la resolución de ecuaciones diferenciales aproximadas por serie de potencias con la menor dificultad posible. Los estudios fueron realizados a los estudiantes del sexto cuatrimestre y docentes del Instituto Especializado de Estudios Superiores Loyola, en San Cristóbal, República Dominicana. Este estudio puede ser aplicado a cualquier usuario de matemáticas para tener una herramienta e importante para resolver ecuaciones aproximadas por serie de potencias, dando solución a un problema que a los estudiantes limitaba con métodos muy diversos. Con el método propuesto resolverán cualquier ecuación diferencial ordinaria con coeficiente constante o variable, donde principalmente estas últimas ecuaciones diferenciales son las fundamentales de la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias en las ciencias, industrias y en sentido general, en la sociedad actual generando un mejor profesional apto para competir frente a las exigencias planteadas. Los resultados obtenidos en esta investigación están fundamentados en un conjunto de aportes o estrategias que regulan las normas prácticas, sencillas, pero pertinentes en la solución de ecuaciones diferenciales por serie de potencias. Estas estrategias sellan el común entre el objeto de estudio de la ecuación diferencial como tal y el de esta investigación. Con dicho estudio se está proporcionando a todo usuario de las matemáticas un método como herramienta poderosa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mediante serie de potencias aplicable a cualquier tipo de ecuación ordinaria.

Índice

Pags.

Introducción.....	I
Capítulo I: Marco General	9
1.1 Reseña histórica	9
1.2 Marco teórico	11
1.3 Marco contextual	12
Capítulo II: Marco Conceptual y Metodológico.....	13
2.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias	13
2.2 Ecuaciones diferenciales parciales	14
2.3 Serie	14
2.4 Serie geométrica	15
2.5 Transformar funciones racionales a serie geométrica	15
2.6 Serie de potencia y su desarrollo	16
2.7 Serie de Maclaurin y Taylor	16
2.8 Transformar funciones trascendentes en serie de potencias.....	17
2.9 Clasificar en ecuaciones diferenciales ordinarias los puntos singulares y puntos ordinarios	20
2.10 Determinar puntos singulares y ordinarios de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias	21
2.11 Aplicar serie a ecuaciones diferenciales ordinarias	22
2.12 Expresar ecuaciones diferenciales ordinarias en fase	23
2.13 Determinar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con punto ordinario	34
2.14 Teorema de Roche Frobenius	36
2.15 Aplicación sobre ecuaciones diferenciales con Puntos Singulares Regulares	36
2.16. Marco metodológico	38
2.16.1 Tipo de investigación.....	39
2.16.2. Método a aplicar	40
2.16.3. Población y muestra	40
2.16.4. Técnicas e instrumentos.....	41
2.16.5. Procedimiento metodológico.....	41

Capitulo III: Presentación y Análisis de Resultados	42
Conclusiones	65
Recomendaciones	67
Bibliografía	68
Anexos_	77
Anexo 1. Cuestionario realizado a docentes.....	78
Anexo 2. Cuestionario realizado a estudiantes.....	81

Introducción

La enseñanza de las matemáticas a través del tiempo ha sido un proceso arduo y difícil pero fascinante para todos los usuarios de esta ciencia porque requiere de personas persistentes, acuciosas, tenaces y de firmes habilidades de análisis, interpretación y creatividad para la modelación de situaciones problemáticas del mundo científico. “La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles”. (Descartes, 1641).

No solo la enseñanza de las matemáticas es una preocupación para los educadores, también las ecuaciones diferenciales han resultado complicadas, por así plantarlo, por los estudiantes, debido a la cantidad de métodos que se aplican según la clase de ecuaciones diferenciales. “Las dificultades se conectan y refuerzan en las redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores” (Socas, 1997). Estas dificultades se han debido a que los diferentes métodos se emplean de acuerdo a la clase de ecuaciones diferenciales y sabiendo que existen muchos tipos de ecuaciones diferenciales, entonces los métodos a emplear son también diversos. Esto genera en los usuarios matemáticos limitaciones para determinar el método a emplear y aún más si las ecuaciones diferenciales son con coeficientes variables porque los métodos de resolución de este tipo de ecuaciones son tediosos, largos y complicados.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias están consideradas como uno de los tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en diversos currículos del nivel universitario, por ejemplo las licenciaturas o los grados en Matemáticas, Física, Química, Económicas. La razón de su importancia es clara: las ecuaciones diferenciales permiten describir fenómenos de variación y por tanto resultan de utilidad para modelar, analizar y resolver numerosos problemas que surgen en diferentes contextos.

La mayoría de las investigaciones centradas en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales están relacionadas con el concepto de solución, en particular, las soluciones

de equilibrio. Distintos trabajos señalan este concepto como elemento que provoca la aparición de dificultades en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales, considerando dos posibles causas:

1. El hecho de que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos (Rasmussen, 2001)
2. El uso de métodos de resolución o de cálculo en el que se consideran las variables como símbolos que se deben manipular, sin tomar en cuenta su significado (Zandieh y McDonald, 1999).

En este sentido, para comprender mejor el aprendizaje de las resoluciones de ecuaciones diferenciales hay que diseñar un conjunto de pautas o estrategias que propicien un método unificado para resolver las ecuaciones diferenciales. Generando con esto un aprendizaje con mayor facilidad, seguridad e independencia en el proceso matemático y potenciando un futuro con habilidades para la interpretación, análisis y la generalización de situaciones problemáticas en las distintas ramas de saber humano.

Observando el proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales se han evidenciado las limitaciones de gran parte de los estudiantes en la resolución de ecuaciones diferenciales aproximada por serie de potencias al tener debilidades en el manejo de series, transformaciones de funciones en serie, determinación de puntos singulares regulares, expresar en fase ecuaciones diferenciales, plasmar las soluciones aproximadas, entre otras. Por tanto, serán aplicadas estrategias que disminuyan estas limitaciones al mínimo con el objetivo de dar solución al problema de esta investigación científica. “El aprendizaje es cualquier cambio que haga un sistema para adaptarse a su medio ambiente”. (Simon, 1998).

La implementación de un nuevo paradigma o modelo en la enseñanza de ecuaciones diferenciales en esta institución será realizado mediante un método único: Resolución aproximada de ecuaciones diferenciales mediante serie de potencias, el cual hace válida la formulación hipótesis planteada en el marco de la presente investigación, aplicando

una metodología que provee seguridad, firmeza y confianza a los estudiantes al plantear las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias aproximadas por serie de potencias. Este tipo de estrategia será enfocada a activar los conocimientos previos de los alumnos o incluso a generarlos cuando no existan. Díaz-Barriga (2002) señala que la activación sirve en un doble sentido: para conocer lo que saben los alumnos y para utilizar tal conocimiento como base para promover nuevos aprendizajes. Así mismo, este tipo de estrategias contribuyen a esclarecer las expectativas apropiadas en los alumnos sobre los aprendizajes próximos de información nueva.

Tema

Propuesta de estrategias para la resolución aproximada de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con la aplicación de Serie de Potencias.

Objeto de la investigación

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Campo de la investigación

Ecuaciones diferenciales ordinarias con serie de potencias

Planteamiento del problema de investigación

Profesores, estudiantes y otros usuarios de las matemáticas presentan dificultades al momento de intentar resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes variables convirtiéndose esta situación en una limitación a la hora de resolver problemas científicos.

La diversidad y complejidad de métodos que requieren la solución de estas diferentes ecuaciones diferenciales podrían ocasionar en el usuario matemático la búsqueda infructuosa de alternativas cuyos resultados no llenarían las expectativas.

Este problema parece limitar el avance científico en ramas tan importantes del saber humano tales como: biología, física, química, ingeniería, antropología, medicina, entre otras.

La aplicación de un método unificado para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias podría ser viable para facilitar a los matemáticos y usuarios de la matemática el dominio pertinente en su área de desempeño.

Hipótesis

Si aplicamos estrategias pertinentes para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias entonces se reducen a la mínima expresión las dificultades que se presentan al momento de solucionar este problema.

Objetivo general de la investigación

Determinar las estrategias para la solución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias con la aplicación de serie de potencias.

Objetivos específicos

- Determinar el grado de deficiencia de los estudiantes en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias.
- Verificar el desempeño de los docentes que imparten ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias.
- Identificar las normas o reglas que aplican los docentes para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias,
- Proponer las estrategias más pertinentes para el proceso de enseñanza/ aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias.

Justificación de la investigación

Los estudiantes de ingeniería, matemática, y aun profesores de matemáticas a veces se preguntan: ¿para qué sirven las ecuaciones diferenciales?, ¿Dónde se aplican?, ¿Por qué estudiar tanta ecuaciones diferenciales?, ¿Cómo se usan en las industrias y en la ciencia?, en sentido general, ¿Para qué les sirven al desarrollo científico en la sociedad actual?

Las ecuaciones diferenciales dan soluciones a leyes que rigen el comportamiento humano, tales como: Leyes del movimiento de Newton, Ecuaciones de Circuitos Eléctricos, Ecuaciones para Flujo de Calor en estado estacionario, problemas sobre mezclas, problemas de crecimiento o decrecimiento de partículas, problemas de crecimiento radiactivo, problemas sobre ecuaciones para cables de puentes colgantes,

problemas sobre deflexión de vigas, en sentido general, permean casi todas las áreas del saber humano. Por estar razones podemos inferir que el matemático, físico e ingeniero que no domine ecuaciones diferenciales no estaría apto para realizar aportes significativos a la sociedad utilizando las soluciones de ecuaciones diferenciales.

Para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias hay muchos métodos, tales como son: separación de variables, método de ecuaciones diferenciales homogéneas, método de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, método de ecuaciones diferenciales exactas, método de Bernoulli, método de Reccatti. Además, existen otros métodos para la resolución de ecuaciones de grado superior con coeficientes variables, tales como: métodos de Charles Hermite, Pafnuty Chebyshev, Ecuaciones de Legendre, Ecuaciones de Edmond Laguerre, Método de las ecuaciones diferenciales de Bessel, entre otras. Donde cada uno de estos métodos también pueden ser resueltos por serie de potencias, métodos que son a veces sumamente tediosos y que resuelve solo una clase de ecuación diferencial, sin embargo, el método de ecuaciones diferenciales aproximado por serie de potencias es más abarcador para determinación de la solución de ecuaciones diferenciales, principalmente con coeficiente variable.

Lo anteriormente expuesto, razón de esta investigación, nos lleva a proponer un conjunto de pautas o estrategias para dar solución a ecuaciones diferenciales ordinarias aproximada por serie de potencia. Haciendo de dicho método algo más fácil, practico de unificador para los estudiantes y usuarios de la matemática o para cualquier persona con nivel y gusto matemático.

En esta investigación se empleará el método deductivo, el cual tiene la particularidad de basarse en datos generales aceptados como verdaderos para deducir por medio de razonamiento lógico varias suposiciones, es decir, parte de verdades previamente establecidas como principios generales para luego aplicarlos a casos individuales y comprobar su validez.

Capítulo I: Marco General

En este primer capítulo se abordarán los aspectos generales que marcan el inicio de las matemáticas y el desarrollo de las ecuaciones diferenciales. De igual manera, los aportes que se han podido apreciar con el desarrollo de la misma. Se apreciara su historia, de modo que se pueda conocer y saber más sobre sus antecedentes. Además, se tratarán los diversos aportes que diversos personajes de distintas partes del mundo han realizado en pro de la humanidad de la mano con las matemáticas y las ecuaciones diferenciales. Sentado en las bases teóricas que abordarán dicha investigación para con este estudio realizar un trabajo interesante y fascinante donde se amplíen los conocimientos de los docentes y estudiantes sobre esta rama del saber matemático.

1.1. Reseña histórica

El surgimiento de las ecuaciones diferenciales se sitúa en el siglo XVII donde la matemática se aplicó a darle soluciones a los problemas de la física. Sin embargo, es en el siglo XVIII donde las ecuaciones diferenciales adquieren su verdadera identidad transformándose en una rama de la matemática estructurada de forma científica para dar soluciones a diversos problemas del mundo actual.

Las ecuaciones diferenciales aparecen en casi todas las áreas desde resistencia de materiales hasta la hidráulica según Molero. Dando estas soluciones a problemas de braquistocana, leyes de Kepler, oscilador armónico, problemas de crecimiento y decrecimiento poblacional, problemas de temperaturas de los cuerpo, entre otros.

Entre los principales matemáticos que hicieron aportes a las ecuaciones diferenciales tenemos Niels Abel, los hermanos Bernoulli (Daniel, Jacques, Jean), Augustin Cauchy, Frederick Bessel, Pafnuti Chebyshev, Jean D Alembert, Alexis Clairaut, Peter Dirichlet, Leonhard Euler, Ferdinand Frobenius, Joseph Fourier, Karl Gauss, Oliver Heaviside, Charles Hermite, David Hilbert, Joseph Lagrange, Pierre de Laplace, Adrien Legendre, Isaac Newton, Henri Poincaré, Jacopo Riccati, Brook Taylor, Leonhard Euler.

Entre los personajes citados en el párrafo anterior existen personalidades de diferentes nacionalidades pero con el mismo propósito, investigar y aportar con sus conocimientos sobre las matemáticas, en sus diversas ramas, aportando de manera significativa a la sociedad. Dentro de ellos existen noruego, suizo, alemanes, franceses, ruso, ingleses, holandeses, pero en su mayoría los alemanes, ingleses, italianos y franceses trascendieron con sus aportes significativos al desarrollo de las ecuaciones diferenciales. Podemos citar al inglés Taylor, que trabajo y apporto al método de serie de potencias y la determinación de soluciones singulares en ecuaciones diferenciales.

El polaco Wronski, que hizo varios aportes a las independencias de una solución de una ecuación diferencial mediante el método Wroskiano. Así mismo, el italiano, Riccate con aportes en el análisis matemático, determinó una ecuación que lleva su mismo nombre, la cual fue resuelta por Daniel Bernoulli. El francés Poincaré, trabajó con ecuaciones diferenciales no lineales. De igual modo, el inglés Newton, realizó aportes significativos sobre las ecuaciones diferenciales en la resolución por serie. El alemán Leibny, aportó al desarrollo del cálculo integral simultáneamente con Newton y dio solución a ecuaciones de primer orden por el método separable. También hizo grandes aportes a las ecuaciones diferenciales homogéneas y lineales.

Sin quedarse atrás, el francés Lagrange, es considerado como uno de los más destacados del siglo XVIII ya que determinó el método de variación de parámetros, realizó trabajos sobre ecuaciones diferenciales parciales. El alemán, Frobenius, realizó estudios sobre puntos singulares regulares e irregulares y sobre la solución de ecuaciones diferenciales por serie de potencias.

El suizo Euler es considerado el matemático más versátil ya que transitó por innumerables ramas del saber humano, tales como son: mecánica, análisis matemático, teorías de números, geometría, dinámica de fluidos, astronomía, óptica. De igual manera, desarrollo las teorías de las ecuaciones diferenciales lineales, determino la función Gamma y demostró la identidad que lleva su nombre.

El alemán D'Alembert realizó estudios sobre la reducción de orden de una ecuación diferencial (Nagle, 1760) y sobre ecuaciones diferenciales parciales. El francés Cauchy fue quien creó la teoría de variable compleja aplicada a ecuaciones diferenciales. Los suizos Bernoulli fueron quienes aportaron sobre ecuaciones ortogonales y el factor integrante. Además, contribuyeron a la matemática con el desarrollo de una ecuación diferencial que lleva su mismo nombre.

Dichos aportes han sido la base para que la actualidad las ecuaciones diferenciales sean el soporte de las diversas ramas o tipos de ingenierías: industrial, civil, sistema, química, ambiental, eléctrica, electrónica. No solo han aportado significativamente a las ingenierías también a diversos aspectos de la sociedad como son: sociológico, económico, biológico, antropológico, y hasta en la medicina, modelos de crecimiento de seres vivos, modelos de problemas epidemiológicos, modelos de absorción de droga en órganos o en células.

En sentido general, el dominio de las ecuaciones diferenciales es un punto fundamental para el desarrollo de un país, en el ámbito social, estructural, económico y hasta político.

1.2. Marco teórico

El marco teórico de una investigación es la base teórica que apoya dicha investigación fundamentadas en los antecedentes.

Las ecuaciones diferenciales han sido tratadas por varios autores tales como: Dennis Zill, Frank Ayress, Betz Burcham, Richard Bronson, Earl Rainville, entre otros. Dichos autores con sus aportes sirven de soporte al estudio de las ecuaciones diferenciales. Estos han clasificado las ecuaciones diferenciales según: tipo, orden, grado y linealidad.

Estas investigaciones han sido fuentes de gran importancia para estudios posteriores dando solución a problemas puntuales en diversas ramas de la ciencia. Todos estos autores, mencionados anteriormente, basan sus teorías en que las ecuaciones diferenciales ayudan significativamente a la búsqueda de soluciones de los siguientes fenómenos:

crecimiento poblacional, decrecimiento de sustancias radioactivas, incremento de una cuenta bancaria, cambio de la temperatura de un cuerpo, cantidad máxima o mínima de sustancia en una mezcla, entre otros.

Dentro de las fuentes consultadas para la realización de esta investigación se encuentran internet, revistas de matemáticas (Bohemia, Relme), tesis, monográficos y artículos científicos. En los mismos ha sido difícil encontrar información precisa sobre el tema en cuestión, soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales por serie de potencias, por tanto, la investigación se centrará en los aportes significativos y de gran impacto presentados en los libros de los autores antes mencionados.

1.3. Marco contextual

Este estudio se realizara con los estudiantes de sexto cuatrimestre de ingeniería del Instituto Especializado de Estudios Loyola (IEESL), San Cristóbal, Republica Dominicana, quienes proceden de diferentes pueblos y provincias del país.

Parte de estos estudiantes cuyo origen generalmente se caracteriza por limitaciones económicas, pero al ingresar en carreras técnicas de dicha institución han superado las etapas cruciales al insertarse en el mercado laboral y siguiendo el nivel superior de su carrera.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias representan un ente de modelación de trascendental importancia para la adecuación pertinente en los diversos procesos científicos.

Dicha asignatura como herramienta matemática tiene la particularidad de potenciar las habilidades en los profesionales de la ingeniería y cualquier área que se trate, generándole habilidades creativas para un desempeño eficiente en el mundo empresarial en que se desenvuelva.

Capítulo II: Marco Conceptual y Metodológico

En este capítulo se enuncian los conceptos básicos de la sustentación de esta investigación con ejemplos y situaciones problemáticas que coadyuvan al aprendizaje pertinente de cada uno de dichos conceptos. Además, se presenta el fundamento metodológico sobre el cual descansa la investigación haciendo de este el capítulo el soporte principal metodológico y estratégico para abordar los análisis concluyentes de la investigación.

Los expertos en investigación científica establecen que los procesos resultan de diseños previos y permiten cierta flexibilidad sin obviar que la rigurosidad reside en los procesos.

Los elementos que integran el marco metodológico serán abordados en este capítulo haciendo énfasis en el tipo de investigación que será seleccionada, así como el método con que será tratado, describiendo en esta sección la investigación, las diferentes técnicas e instrumentos de recolección de datos y los procedimientos metodológicos con que serán procesados los mismos.

2.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Es toda ecuación que contiene derivada. (Zill, 2006) en su libro Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera precisa con mayor agudeza esta definición resaltando lo siguiente: "Una ecuación diferencial ordinaria es toda ecuación que contiene derivada de una o más variables dependiente respecto a una o más variable independiente".

Un ejemplo de esto se plasma en las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

a) $\frac{dy}{dx} = 6x + 5$

b) $y''(x) + 3y'(x) - y(x) = x^2$

c) $(D_x^3 + \text{sen}x D_x^2 + 1)y = e^x$

d) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} = 3x$

e) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x}$

f) $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = xe^{-x}$

$$g) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

2.2 Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según el tipo en ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales.

- Ecuaciones diferenciales ordinarias: son aquellas que contienen derivadas ordinarias de una o más variables dependiente respecto a una sola variable independiente. Ejemplo: a, b, c, d.
- Ecuaciones en derivadas parciales: son aquellas que contienen o involucran derivadas parciales de una o más variables dependiente con relación a dos o más variables independientes. Ejemplo: e, f, g.

2.3 Serie

Una serie infinita es toda expresión de la forma $\sum_{N=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, es decir es la suma de los términos de una sucesión.

Donde $\{a_n\}$ es la sucesión infinita de números reales.

Una serie es convergente si el límite de su sucesión de sumas parciales existe. En caso contrario, la serie es divergente.

Existen muchos criterios para determinar la convergencia o divergencia de series, entre ellos se encuentran:

- a. Criterio de la serie geométrica
- b. Criterio de la comparación directa
- c. Criterio de la comparación en el límite
- d. Criterio de la serie P
- e. Criterio de la integral
- f. Criterio del cociente
- g. Criterio de la raíz

h. Criterio de la serie telescópica

Estos criterios y algunos más pueden ser tratados por los lectores en cualquier libro de cálculo diferencial e integral, complementado así su fundamento sobre la convergencia de serie.

2.4 Serie Geométrica

Es toda serie de la forma $\sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N$ donde la razón entre dos términos consecutivos siempre será constante igual a "x".

Si $|x| < 1$ la serie converge

Pero si $|x| \geq 1$ la serie diverge

2.5 Transformar funciones racionales en series geométricas

La suma de los términos de una progresión geométrica $S_N = \frac{a(1-x^{N+1})}{1-x}$ si $x \neq 1$ aplicando

limite se tiene $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a}{1-x} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a x^{N+1}}{1-x}$

$$S_N = \frac{a}{1-x} = \sum_{N=0}^{\infty} a x^N$$

Esta fórmula permite transformar funciones racionales en series geométricas.

Ejemplos:

1. $\frac{1}{1-x}; a=1$

$$\therefore \frac{1}{1-x} = \sum_{N=0}^{\infty} x^N$$

2. $\frac{2}{1+x}; a=2$, se reescribe:

$$\frac{2}{1-(-x)} = \sum_{N=0}^{\infty} 2(-x)^N = 2 \sum_{N=0}^{\infty} (-x)^N$$

3. $\frac{6}{1+x^2} = \frac{6}{1-(-x^2)} = 6 \sum_{N=0}^{\infty} (-x^2)^N$

$$\frac{6}{1+x^2} = 6 \sum_{N=0}^{\infty} -x^{2N}$$

4. $\frac{8}{4+2x} = \frac{8}{4(1+\frac{x}{2})} = \frac{2}{1+\frac{x}{2}} = \frac{2}{1-(-\frac{x}{2})}$

$$\frac{8}{4+2x} = \frac{2}{1-(-\frac{x}{2})} = 2 \sum_{N=0}^{\infty} (-\frac{x}{2})^N$$

$$5. \frac{4}{x^2+4x+5} = \frac{4}{(x+2)^2+1} = \frac{4}{1-[-(x+2)^2]}$$

$$\frac{4}{x^2+4x+5} = 4\sum_{N=0}^{\infty} [-(x+2)^2]^N$$

Estos ejemplos de funciones en serie geométrica le sirven al estudiante o al lector para familiarizarse con las transformaciones en series que es el fundamento para cuando se tengan que resolver ecuaciones diferenciales por serie de potencias.

2.6 Serie de potencia

Es toda serie de la forma $\sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$ ó $\sum_{N=c}^{\infty} a_N (x-c)^N$

Si $c=0$ la serie está centrada en el origen, es decir, en $x=0$ y se llama serie de Maclaurin, la cual se expresa de la siguiente manera: $\sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$ pero si $c \neq 0$ se llama serie de Taylor y se expresa como sigue: $\sum_{N=c}^{\infty} a_N (x-c)^N$

2.7 Transformación de una función trascendente en serie de potencia

Para realizar dicha transformación en $F(x) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N$ lo primero es determinar la ley de recurrencia para a_i de dicha serie.

En segundo lugar, se procede a derivar a $F(x)$ sucesivamente hasta obtener una ley que rijan todos a_i , se tiene lo siguiente:

$$F(x) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

$$F'(x) = \sum_{N=1}^{\infty} a_N x^{N-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

$$F''(x) = \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1)a_N x^{N-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

$$F'''(x) = 6a_3 + 24a_4 x + 60a_5 x^2 + \dots$$

$$F^{(IV)}(x) = 24a_4 + 120a_5 x + \dots$$

$$F^{(V)} = 120a_5 + \dots$$

·
·
·

$$F^{(N)} = N! a_N \rightarrow a_N = \frac{F^{(N)}(x)}{N!}$$

Evaluando en $x=0$

$$a_N = \frac{F^{(N)}(0)}{N!}$$

Luego;

$$F(x) = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{F^{(N)}(0)}{N!} x^N$$

2.8 Transformar funciones trascendentes como serie de potencias

Como la finalidad de esta investigación es resolver ecuaciones diferenciales aproximadas $a_N x^N$ por serie de potencias se tratara de convertir en serie de potencias aquellas funciones que estén más relacionadas con las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias como son: e^x , $\text{sen}x$, $\text{cos}x$, $\text{sen}hx$, $\text{cosh}x$, $\ln x$, entre otras. Es importante que el lector también se familiarice con las familias de estas funciones, es decir, aquellas que se obtienen al sustituir x por: $2x$, x^2 , -1 , 1 , $5x$, $-x$, $-x^2$, entre otras, cuyo fundamento es vital al resolver una ecuación diferencial ordinaria por serie de potencias.

1) Transformar en serie las siguientes funciones:

a) $F(x) = e^x = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

Este problema consiste en determinar los a_i , los cuales se calculan mediante

$$a_N = \frac{F^{(N)}(0)}{N!}$$

1ero se determinan las derivadas:

$$F(x) = e^x$$

$$F'(x) = e^x$$

$$F''(x) = e^x$$

.

.

.

$$F^{(N)}(x) = e^x$$

2do se determina a_i

$$a_0 = \frac{F(0)}{0!} = \frac{e^0}{0!} = 1$$

$$a_1 = \frac{F'(0)}{1!} = \frac{e^0}{1!} = 1$$

$$a_2 = \frac{F''(0)}{2!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{F'''(0)}{3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{F^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

$$a_N = \frac{F^{(N)}(0)}{N!} = \frac{1}{N!}$$

3ero sustituir en la ecuación a)

$$F(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\therefore e^x = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{x^N}{N!}$$

2) b) $F(x) = \text{sen } x = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ evaluando en $x=0$

$$F'(x) = \text{cos } x$$

$$F''(x) = -\text{sen } x$$

$$F'''(x) = -\text{cos } x$$

$$F^{(IV)}(x) = \text{sen } x$$

$$F^{(V)}(x) = \text{cos } x$$

$$a_N = \frac{F^{(N)}(x)}{N!}$$

$$a_0 = \frac{\text{sen } 0}{0!} = 0$$

$$a_1 = \frac{\text{cos } 0}{1!} = 1$$

$$a_2 = -\frac{\text{sen } 0}{2!} = 0$$

$$a_3 = -\frac{\text{cos } 0}{3!} = -\frac{1}{3!}$$

$$a_4 = \frac{\text{sen } 0}{4!} = 0$$

$$a_5 = \frac{\text{cos } 0}{5!} = \frac{1}{5!}$$

Sustituyendo los a_i en b)

$$\text{Sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\therefore \text{Sen } x = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N x^{2N+1}}{(2N+1)!}$$

3) c) $F(x) = \text{cos } x = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$$F'(x) = -\text{sen } x$$

$$F''(x) = -\cos x$$

$$F'''(x) = \sin x$$

$$F^{(IV)}(x) = \cos x$$

$$F^{(V)}(x) = -\sin x$$

$$a_N = \frac{F^N(x)}{N!}$$

$$a_0 = \frac{\cos 0}{0!} = 1$$

$$a_1 = -\frac{\sin 0}{1!} = 0$$

$$a_2 = -\frac{\cos 0}{2!} = -\frac{1}{2!}$$

$$a_3 = \frac{\sin 0}{3!} = 0$$

$$a_4 = \frac{\cos 0}{4!} = \frac{1}{4!}$$

$$a_5 = -\frac{\sin 0}{5!} = 0; \text{ así sucesivamente}$$

Sustituyendo en c)

$$F(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\therefore \cos x = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N x^{2N}}{(2N)!}$$

4) d) $F(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pero ya se sabe expresar en serie de e^x y para e^{-x} se sustituye $x = -x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^N}{N!}$$

Para e^{-x} se sustituye x por $-x$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^N \frac{x^N}{N!}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2} \left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^N}{N!} \right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^N \frac{x^N}{N!} \right) \right]$$

$$\cosh x = \frac{1}{2} \left[2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^6}{6!} + \dots \right]$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{2N}}{(2N)!}$$

$$\therefore \cosh x = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{x^{2N}}{(2N)!}$$

En forma similar se determina lo siguiente:

$$\therefore \operatorname{Senhx} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

5) $F(x) = \ln x$; como $\ln(0)$ no existe, se centra c en 1

$$F(x) = \ln x = \sum_{c=1}^{\infty} a_N (x - c)^N = a_1 (x - 1) + a_2 (x - 1)^2 + a_3 (x - 1)^3 + \dots + a_N (x - 1)^N$$

$$F(x) = \ln x$$

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$F'''(x) = \frac{2!}{x^3}$$

$$F^{(4)}(x) = \frac{-3!}{x^4}$$

$$a_0 = F(1) = \ln(1) = 0$$

$$a_1 = F'(1) = 1$$

$$a_2 = F''(1) = -\frac{1}{2!}$$

$$a_3 = F'''(1) = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = F^{(IV)}(1) = \frac{-3!}{4!} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Sustituyendo } F(x) = \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + (-1)^{N+1} \frac{(x-1)^N}{N}$$

$$\therefore \operatorname{Lnx} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+1} (x-1)^N}{N}$$

2.9 Clasificar en ecuaciones diferenciales ordinarias los puntos singulares y ordinarios

Para comprender mejor como determinar el punto ordinario y singular en una solución de ecuaciones diferenciales existen una serie de conceptos que son necesarios conocer:

- **Función analítica:** una función es analítica en un x_0 se puede expresar como una serie de potencia en $x-x_0$ con radio positivo o infinito de convergencia. Ejemplos: $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cosh} x$, e^x , $\ln(-x+1)$

Según Earl Rainville en una ecuación diferencial de la forma $b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0$ con coeficiente polinormales el punto $x=x_0$ será el punto ordinario de la ecuación si $b_0(x_0) \neq 0$.

- Punto singular de una ecuación diferencial lineal: es cualquier punto $x = x_1$ para el cual $b_0(x_1) = 0$.

En una ecuación diferencial cualquier punto que no es singular es un punto ordinario.

Al principio solo se trabajara con soluciones de serie de potencias validas en un entorno del punto ordinario de la ecuación diferencial ordinaria.

2.10 Determinar puntos singulares y ordinarios de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

Si los coeficientes de las ecuaciones diferenciales ordinarias no son polinómicos entonces Dennis Zill plantea que en toda ecuación diferencial de la forma $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ en forma canónica o estándar será: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

Para facilitar definir punto ordinario y singular, se define que un punto x_0 es punto ordinario de una ecuación diferencial si $P(x)$ y $Q(x)$ son analítica, es decir, pueden ser expresados como serie de potencias en un intervalo dado.

En caso contrario el punto será singular. Ejemplos:

- 1) $y'' + e^x y' + (\sin x)y = 0$; tanto e^x como $\sin x$ son analíticos. Por lo tanto no tiene puntos singulares.
- 2) $y'' + 3e^x y' + (\ln x)y = 0$; $P(x)$ es analítica $\forall x$, sin embargo, $Q(x)$ no es analítico en $x = 0$. Por lo tanto es un punto singular y los demás puntos son ordinarios.

Para resolver una ecuación diferencial ordinaria es necesario presentar el Teorema Existencia de Soluciones en Serie de Potencias. Este teorema establece que si $x = x_0$ es un punto ordinario de una ecuación diferencial ordinaria de la forma $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ existirá dos soluciones independientes centradas x_0 que se expresan así:

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N (x - x_0)^N$$

2.11 Aplicar serie a ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para resolver ecuaciones diferenciales aplicando serie de potencias se seguirá el siguiente proceso:

- 1) Se aplica serie a las ecuaciones diferenciales y luego se pone en fase centrada $x_0 = 0$ por ser punto ordinario

a) $y' - 2y = 0$

Se sabe por el teorema de existencia que $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N (x - x_0)^N = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$

$$y' = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1}$$

Sustituyendo en a) se obtiene lo siguiente:

$$b_1) \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1} - 2 \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

- 2) Se procede a poner en fase dicha ecuación diferencial, es decir, homogenizar la variable x y también los índices de las sumatorias.

Se empieza por la variable x , $N-1 = k \rightarrow N = k+1$; en primera sumatoria, en segunda se hace $N = k$

Sustituyendo en b₁)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{(k+1)}x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Pero ya las sumatorias están homogenizadas. Por lo tanto, la ecuación diferencial está en fase.

2.12 Expresar ecuaciones diferenciales en fase

a) Para otra ecuación diferencial por ser $x=0$ punto ordinario

$$y'' + xy = 0; \text{ Se sabe que } y = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1}, y'' = \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1)a_N x^{N-2}$$

Sustituyendo en 2)

$$b) \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1)a_N x^{N-2} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

Se introduce x en la sumatoria

$$c) \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1)a_N x^{N-2} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^{N+1} = 0$$

Se procede a poner en fase la ecuación diferencial. Se inicia por la variable x , se

$$\text{hace: } N-2 = K \rightarrow N = K+2$$

$$N+1 = K$$

$$N = K-1$$

$$d) \sum_{K=0}^{\infty} (K+2)(K+1)a_{K+2}x^K + \sum_{K=1}^{\infty} a_{K-1}x^K = 0$$

Se procede a homogenizar los índices.

e) Se determina $k=0$ en la ecuación

$$2a_2 + \sum_{K=1}^{\infty} (K+2)(K+1)a_{K+2}x^K + \sum_{K=1}^{\infty} a_{K-1}x^K = 0$$

∴ La ecuación diferencial está en fase

$$3) (x^2 + 1)y'' - xy' + y = 0$$

a) se aplica serie: $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$, $y' = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1}$, $y'' = \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2}$

Sustituyendo en 3)

$$(x^2 + 1) \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2} - x \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

$$\sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^N - \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2} - \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^N + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

Se procede a poner en fase

$$N=K$$

$$N-2 = K \rightarrow N = K+2$$

$$N=K$$

$$N=K$$

$$\sum_{K=2}^{\infty} K(K-1) a_K x^K - \sum_{K=0}^{\infty} (K+2)(K+1) a_{K+2} x^K - \sum_{K=1}^{\infty} K a_K x^K + \sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K = 0$$

Para homogenizar los índices se determina $k=0, 1$ en los términos adecuados.

$$\sum_{K=2}^{\infty} K(K-1) a_K x^K - 2a_2 - 6a_3x - \sum_{K=2}^{\infty} (K+2)(K+1) a_{K+2} x^K - a_1x - \sum_{K=2}^{\infty} K a_K x^K + a_0 + a_1x + \sum_{K=2}^{\infty} a_K x^K = 0$$

Ordenando los términos se obtiene lo siguiente:

$$-2a_2 - 6a_3x - \cancel{a_1x} + a_0 + \cancel{a_1x} + \sum_{K=2}^{\infty} K(K-1) a_K x^K - \sum_{K=2}^{\infty} (K+2)(K+1) a_{K+2} x^K - \sum_{K=2}^{\infty} K a_K x^K + \sum_{K=2}^{\infty} a_K x^K = 0$$

∴ La ecuación está en fase:

$$-2a_2 - 6a_3x + a_0 + \sum_{K=2}^{\infty} K(K-1)a_Kx^K - \sum_{K=2}^{\infty} (K+2)(K+1)a_{K+2}x^K - \sum_{K=2}^{\infty} Ka_Kx^K + \sum_{K=2}^{\infty} a_Kx^K = 0$$

Resolver cada una de las ecuaciones diferenciales ordinarias dadas usando serie de potencias respecto al punto ordinario $x=0$:

1) $y' - 2y = 0$, con $y(0) = 6$

Se inicia resolviendo la ecuación diferencial, de manera que los usuarios de la matemática se enamoren de esta técnica para dar solución a ecuaciones diferenciales.

Según el teorema de la existencia la solución será de la forma:

* $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$; cuya dificultad es determinar los a_i

1) Primero se deriva la solución dada:

$$y' = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1}$$

2) Se aplica serie a la ecuación diferencial dada:

$$\sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1} - 2 \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

3) Se pone en fase la ecuación diferencial: $N-1=K \rightarrow N=K+1$
Sustituyendo en 2)

$$4) \sum_{K=0}^{\infty} (K+1)a_{K+1}x^K - 2 \sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K = 0$$

\therefore La ecuación está en fase

Determinar la ley de recurrencia:

$$5) \sum_{K=0}^{\infty} [(K+1)a_{K+1} - 2a_K]x^K = 0$$

$$a_{K+1} = \frac{2a_K}{K+1}, K \geq 0$$

6) Se calculan los a_i

$$\text{Si } K=0, a_1 = \frac{2a_0}{0+1} = 2a_0$$

$$\text{Si } K=1, a_2 = \frac{2a_1}{1} = a_1 = 2a_0$$

$$\text{Si } K=2, a_3 = \frac{2a_2}{3} = \frac{2}{3}(2a_0) = \frac{4}{3}a_0$$

$$\text{Si } K=3, a_4 = \frac{2a_3}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a_0\right) = \frac{2}{3}a_0$$

$$\text{Si } K=4, a_5 = \frac{2a_4}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}a_0\right) = \frac{4}{15}a_0$$

$$\text{Si } K=5, a_6 = \frac{2a_5}{3} = \left(\frac{1}{3}a_5\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{15}a_0\right) = \frac{4}{45}a_0$$

Sustituyendo en *

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y = a_0 + 2a_0 x + 2a_0 x^2 + \frac{4}{3}a_0 x^3 + \frac{2}{3}a_0 x^3 + \frac{4}{15}a_0 x^5 + \frac{4}{45}a_0 x^6 + \dots$$

Sacando a_0 factor común

$$y = a_0 \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \dots\right); \text{ pero:}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \dots$$

$$\boxed{y_g = a_0 e^{2x}} \text{ pero } y(0) = 6 \text{ (Solución General)}$$

$$6 = a_0 e^0 \rightarrow a_0 = 6$$

$$\boxed{\therefore y_p = 6e^{2x}} \text{ (Solución Particular)}$$

2) Resolver esta ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0 \rightarrow y''(x) + y = 0, \text{ con } y(0) = 2, y'(0) = 4$$

1. Se deriva 2 veces la solución

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$$

$$y' = \sum_{N=0}^{\infty} N a_N x^{N-1}$$

$$y'' = \sum_{N=0}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2}$$

2. Se sustituye en la ecuación dada:

$$\sum_{N=0}^{\infty} N(N-1)a_N x^{N-2} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

3. Se procede a poner en fase la ecuación diferencial:

Se hace $N-2 = K \rightarrow N = K+2$; $N=K$

$$4. \sum_{K=0}^{\infty} (K+2)(K+1)a_{K+2}x^K + \sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K = 0$$

Como la ecuación diferencial está en fase. Se determina el término recurrente:

$$5. \sum_{K=0}^{\infty} [(K+2)(K+1)a_{K+2} + a_K] x^K = 0$$

$$a_{K+2} = \frac{a_K}{(K+2)(K+1)}, K \geq 0$$

6. Se determinan los a_i

$$K=0, a_2 = \frac{-a_0}{2}$$

$$K=1, a_3 = \frac{-a_1}{3 \cdot 2} = \frac{-a_1}{3!}$$

$$K=2, a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{-a_0}{4!}$$

$$K=3, a_5 = \frac{-a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{-a_1}{5!}$$

$$K=4, a_6 = \frac{-a_4}{6 \cdot 5} = \frac{-a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{-a_0}{6!}$$

$$K=5, a_7 = \frac{-a_5}{7 \cdot 6} = \frac{-a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{-a_1}{7!}$$

$$K=6, a_8 = \frac{-a_6}{8 \cdot 7} = \frac{a_0}{8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{a_0}{8!}$$

Pero la solución general será:

$$7. y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

8. Se sustituye en 1

$$y_g = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{a_0}{6!} x^6 - \frac{a_1}{7!} x^7 + \frac{a_0}{8!} x^8 + \dots$$

9. Sacando a_0, a_1 factor común:

$$y_g = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)$$

Según Maclauren, se puede decir que:

$$10. y_g = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

Pero $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$

$$2 = a_0 \cos 0 + a_1 \sin 0 \rightarrow a_0 = 2$$

11. $y'(y) = -a_0 \sin x + a_1 \cos x$, evaluando en $y'(0) = 4$

$$4 = -a_0 \sin 0 + a_1 \cos 0 \rightarrow a_1 = 4$$

12. Si se sustituye en 10 se obtiene lo siguiente:

$$y_p = 2 \cos x + 4 \sin x$$

3) Si la ecuación diferencial no es homogénea se desarrolla la serie. Ejemplo:

$$y' - y = x ; y(0) = 1$$

$$\text{Se sabe que } y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N, y' = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$4) \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1} - \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = x$$

Si se desarrolla se obtiene lo siguiente:

$$5) a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) = x$$

Agrupando términos semejantes:

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + (4a_4 - a_3)x^3 + \dots (Na_N - a_{N-1})x^{N-1} + [(N+1)a_{N+1} - a_N]x^N = x$$

7) Se iguala a 0 el último término para buscar el término recurrente:

$$a_{N+1} = \frac{a_N}{(N+1)}, N \geq 0$$

Para $N = 0$

$$a_1 = \frac{a_0}{1} = 1$$

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1x + \dots, y(0) = a_0 = 1$$

Para 2do términos se tiene:

$$2a_2 - a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1+a_1}{2} = \frac{2}{2!}$$

$$-3a_3 - a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3!}$$

$$-4a_4 - a_3 = 0 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4!}$$

$$-N = 4 \rightarrow a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{2}{5 \cdot 4} = \frac{2}{5!}$$

La solución será:

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + \dots$$

$$y = 1 + x + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{2}{4!} x^4 + \dots$$

9) Se saca 2 factor común:

$$y = 1 + x + 2 \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \quad P$$

$$10) \text{ Pero } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad P$$

Pero se observa que y, e^x tienen una cantidad comunes \therefore llama P en e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad P$$

Se despeja P y se sustituye en y

$$P = e^x - 1 - x$$

$$y = 1 + x + 2P$$

$$y = 1 + x + 2(e^x - 1 - x)$$

$$y = 1 + x + 2e^x - 2 - 2x$$

$$y_p = 2e^x - x - 1$$

$$4) \frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0 \rightarrow y'' + xy = 0$$

La solución tendrá la forma:

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + \dots$$

$$y' = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1}$$

$$y'' = \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$5) \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

6) Se introduce x en la sumatoria:

$$\sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

7) Se pone en fase la ecuación diferencial

$$\text{Se hace } N-2=K \rightarrow N=K+2 \qquad N+1=K \rightarrow N=K-1$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} (K+2)(K+1) a_{(K+2)} x^K + \sum_{K=1}^{\infty} a_{(K-1)} x^K = 0$$

8) Para que los índices estén homogéneos se determina k= 0

$$2a_2 + \sum_{K=1}^{\infty} (K+2)(K+1) a_{(K+2)} x^K + \sum_{K=1}^{\infty} a_{(K-1)} x^K = 0$$

$$2a_2 + \sum_{K=1}^{\infty} [(K+2)(K+1) a_{(K+2)} + a_{(K-1)}] x^K = 0$$

9) Se determina a ley de recurrencia:

$$a_{K+2} = \frac{a_{(K-1)}}{(K+2)(K+1)}, K \geq 1$$

10) Se determinan los a_i:

$$k= 1, a_3 = \frac{-a_0}{3 \cdot 2} = \frac{-a_0}{6}$$

$$k= 2, a_4 = \frac{-a_1}{4 \cdot 3} = \frac{-a_1}{12}$$

$$k= 3, a_5 = \frac{-a_2}{5 \cdot 4} = \frac{0}{20} = 0$$

$$k= 4, a_6 = \frac{-a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{30 \cdot 6} = \frac{a_0}{180}$$

$$k= 5, a_7 = \frac{-a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{12 \cdot 42} = \frac{a_1}{504}$$

10) Se sustituye en la solución $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + \dots$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{6} x^3 - \frac{a_1}{12} x^4 + \frac{a_0}{180} x^6 + \frac{a_1}{504} x^7 + \dots$$

$$y_1$$

$$y_2$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} - \dots \right)$$

$$y_g = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

$$5) (1 + x^2)y'' - y' + y = 0$$

La solución será $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$

Se determina: $y' = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1}$, $y'' = \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2}$

1) Se sustituye en la ecuación diferencial:

$$(1 + x^2) \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2} - \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

2) Se efectúan las operaciones indicadas:

$$\sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^{N-2} + \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1) a_N x^N - \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

3) Se pone en fase la ecuación diferencial:

$$N-2=K$$

$$N=K$$

$$N-1=K$$

$$N=K$$

$$\sum_{K=0}^{\infty} (K+2)(K+1) a_{K+2} x^K + \sum_{K=2}^{\infty} K(K-1) a_K x^K - \sum_{K=0}^{\infty} (K+1) a_{K+1} x^K + \sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K = 0$$

4) Se calcula en $k=0, 1$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{K=2}^{\infty} (K+2)(K+1) a_{K+2} x^K + \sum_{K=2}^{\infty} K(K-1) a_K x^K - a_1 - 2a_2x - \sum_{K=2}^{\infty} (K+1) a_{K+1} x^K + a_0 + a_1x + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

5) Se ordenan los términos y se obtiene lo siguiente:

$$(2a_2 - a_1 + a_0) + (6a_3 - 2a_2 + a_1)x + \sum_{K=2}^{\infty} [(K+2)(K+1) a_{K+2} + K(K-1) a_K - (K+1) a_{K+1} + a_K] x^K = 0$$

6) Se determina la ley de recurrencia:

$$a_2 = \frac{a_1 - a_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{2a_2 - a_1}{6} = \frac{\cancel{2} \left(\frac{a_1 - a_0}{\cancel{2}} \right) - a_1}{6} = \frac{-a_0}{6}$$

$$a_{K+2} = \frac{(K+1)a_{(K+1)} - K(K-1)a_K - a_K}{(K+2)(K+1)}, K \geq 2$$

$$a_{K+2} = \frac{(K+1)a_{(K+1)} - a_K[-K(K-1)-1]}{(K+2)(K+1)}, K \geq 2$$

$$a_{K+2} = \frac{(K+1)a_{(K+1)} - a_K[K(K-1)+1]}{(K+2)(K+1)}, K \geq 2$$

Para $k = 2$:

$$a_4 = \frac{3a_3 - 3a_2}{4 \cdot 3} = \frac{3a_3 - 3a_2}{12}$$

$$a_4 = \frac{3 \frac{-a_0}{6} - 3 \left(\frac{a_1 - a_0}{2} \right)}{12} = \frac{6a_0 - 9a_1}{72} = \frac{2a_0}{24}$$

$$a_4 = \frac{2a_0 - 3a_1}{24} = \frac{a_0}{12} - \frac{a_1}{8}$$

Para $k = 3$

$$a_5 = \frac{4a_4 - 7a_3}{20} = \frac{4 \left(\frac{a_0}{12} - \frac{a_1}{8} \right) - 7 \left(\frac{-a_0}{6} \right)}{20} = \frac{9a_0 - 3a_1}{120} = \frac{3a_0}{40} - \frac{a_1}{40}$$

7) La solución será: $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + \dots$

8) Se sustituye:

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_1}{2} x^2 - \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{a_0}{6} x^3 + \frac{a_0}{12} x^4 - \frac{a_1}{8} x^4 + \frac{3a_0}{40} x^5 + \dots$$

$$\therefore y_g = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{40} - \frac{17x^6}{720} + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^6}{20} \right)$$

6) Resolver esta ecuación diferencial por serie de potencias respecto a $x = 1$

$$y'' + (x-1)y = 0$$

Por esta ecuación diferencial con puntos ordinarios, se puede desarrollar la solución entorno a cualquier punto, ejemplo $x = 1$. Se hace $x - 1 = v$ que es función de y . Así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}$$

\therefore La solución según el teorema de existencia:

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N v^N$$

$$y' = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N v^{N-1}$$

$$y'' = \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1)a_N v^{N-2}$$

Se sustituye en la ecuación diferencial que tendrá la forma:

$$y'' + vy = 0$$

Pero esta ecuación en tramo v tendrá la solución idéntica que la ecuación Airy.

$$y = a_0 \left(1 - \frac{v^3}{6} + \frac{v^6}{180} - \dots \right) + a_1 \left(v - \frac{v^4}{12} + \frac{v^7}{504} + \dots \right)$$

Luego se sustituye: $v = x - 1$ y se obtiene:

$$y = a_0 \left(1 - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^6}{180} - \dots \right) + a_1 \left((x-1) - \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^7}{504} + \dots \right)$$

$$6) y'''(x) + 2xy'' + y(x) = 0$$

La solución será: $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + \dots$

Se determina: $y' = \sum_{N=1}^{\infty} N a_N x^{N-1}$, $y'' = \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1)a_N x^{N-2}$,

$$y''' = \sum_{N=3}^{\infty} N(N-1)(N-2)a_N x^{N-3}$$

Se sustituye en la ecuación diferencial y se obtiene:

$$1) \sum_{N=3}^{\infty} N(N-1)(N-2)a_N x^{N-3} + 2 \sum_{N=2}^{\infty} N(N-1)a_N x^{N-2} + \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = 0$$

Se pone en fase la ecuación diferencial dada:

$$N-3 = K$$

$$N-1 = K$$

$$N=K$$

$$2) \sum_{K=0}^{\infty} (K+3)(K+2)(K+1)a_{(K+3)}x^K + 2 \sum_{K=1}^{\infty} (K+1)Ka_{(K+1)}x^K + \sum_{K=0}^{\infty} a_K x^K = 0$$

Homogenizando lo índices, calculando $k=0$

$$3) 3(2)(1)a_3 + a_0 + \sum_{K=0}^{\infty} [(K+3)(K+2)(K+1)a_{(K+3)} + 2(K+1)Ka_{(K+1)} + a_k] x^k = 0$$

$$(K+3)(K+2)(K+1)a_{(K+3)} + 2K(K+1)Ka_{(K+1)}$$

$$a_{(K+3)} = \frac{-2K(K+1)Ka_{(K+1)} - a_K}{(K+3)(K+2)(K+1)} \geq 1$$

$$6a_3 + a_0 = 0$$

$$a_3 = \frac{-a_0}{6}$$

4) Determine los a_i

Para $k=1$

$$a_4 = \frac{-2(2)a_2 - a_1}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{-4a_2}{24} - \frac{a_1}{24} = \frac{-a_2}{6} - \frac{a_1}{24}$$

Para $k=2$

$$a_6 = \frac{-2(4)(3)a_4 - a_3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{-24a_4}{120} - \frac{a_3}{120} = \frac{-a_4}{5} - \frac{a_3}{120}$$

Para $k=3$

$$a_5 = \frac{-2(3)(2)a_3 - a_2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{-4a_3}{5} - \frac{a_2}{60} = \frac{a_0}{30} - \frac{a_2}{60} = \frac{a_2}{30} + \frac{a_1}{120} + \frac{a_0}{720}$$

5) La solución será: $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = a_0 + a_1 x + \dots$

Se sustituye en 5)

$$6) y = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 - \frac{a_0 x^3}{6} - \frac{a_2 x^4}{6} - \frac{a_1 x^4}{24} + \frac{a_0 x^5}{30} - \frac{a_2 x^5}{60} + \frac{a_2 x^6}{30} + \frac{a_1 x^6}{120} + \frac{a_0 x^6}{720} + \dots$$

$$\therefore y_g = a_0 \left(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{720} + \frac{2x^7}{315} + \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{120} + \frac{x^7}{5040} + \dots \right)$$

2.13 Determinar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con punto ordinario

Si $x = x_0$ es un punto singular de una ecuación diferencial de la forma

$b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0$ con coeficiente polinomial en una ecuación en forma canónica

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Como $x = x_0$ es un punto singular, pero $p(x)$, $q(x)$ son funciones racionales de x . Si $x = x_0$ es un punto singular de la ecuación si el denominador de $p(x)$ no contiene el factor $x = x_0$ a una potencia mayor de uno y el denominador de $q(x)$ no contiene el factor $x = x_0$ a una potencia mayor que dos. Entonces, $x = x_0$ se llama punto regular singular.

Pero si $x = x_0$ es un punto singular, pero no es regular singular entonces se llama punto irregular singular según Rainville.

Clasificar los puntos singulares de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$1) x(x+1)^2(x+2)y'' - x^2y' + (x^3 + 2x + 1)y = 0$$

$$p(x) = \frac{-x}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$q(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x+1)^2(x+2)}$$

$$b_0(x) = 0, x(x+1)^2(x+2) = 0; x=0, -1, -2$$

\therefore ; $x=0, -1, -2$ son puntos singulares.

Se analiza cada factor $p(x)$ y $q(x)$:

1) $x=0$ es ausente en $p(x)$ \therefore satisface, pero en $q(x)$ su exponente es menor que

$\therefore x=0$ es un punto singular regular

2) $x=-1$ en $p(x)$ su exponente en denominador es mayor que 1

\therefore no es un punto singular regular, es irregular

3) $x=-2$ en $p(x)$ tiene un exponente en el denominador 1, y en $q(x)$ no excede a 2. Entonces quiere decir que: $x=-2$ es un punto singular regular

\therefore Conclusion:

Puntos singulares regulares: $x=0, x=-2$

Puntos singulares irregulares: $x=-1$

2) Clasificar los puntos singulares:

$$x^5(x^2+1)(x-2)^2y'' + 6x^4(x-2)y' + (x+1)y = 0$$

$$x^5(x^2+1)(x-2)^2 = 0 \rightarrow x=0, \pm i, 2 \text{ P.S.}$$

$$p(x) = \frac{6}{x(x+i)(x-i)(x-2)}$$

$$q(x) = \frac{x+1}{x^5(x^2+1)(x-2)^2}$$

$$\text{P.R.S.} = i, -i, 2$$

$$\text{P.I.S. } x=0$$

$$3) y'' + xy = 0$$

no hay P.S. $\rightarrow b_0(x_0) = 0$

$$4) x^2 y'' - y = 0$$

$x=0$, P.S.R, no hay P.S.I.

$$5) x^2 (x-1)^2 y'' + 6xy' - (x-1)y = 0$$

P.S. = 0, 1

P.S.R en $x=0$

P.S.I en $x=1$

2.14 Teorema Roche Frobenius

Si $x = x_0$ es un P.S.R. de una ecuación $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = 0$ entonces existe por lo menos una solución de la siguiente forma:

$$y = (x - x_0)^R \sum_{N=0}^{\infty} C_N (x - x_0)^N = \sum_{N=0}^{\infty} C_N (x - x_0)^{N+R}$$

Donde R es una constante a determinar

2.15 Aplicación sobre ecuaciones diferenciales con Puntos Singulares Regulares

Como $x_0 = 0$ es un P.S.R. de esta ecuación diferencial se determina la solución usando Frobenius respecto a $x=0$

$$a) 3xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

$$3xy'' + 2y' - xy' - y = 0$$

La solución es de la forma:

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N (x - x_0)^{N+r}$$

$$y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N(x)^{N+r} \text{ por } x=0$$

$$y' = \sum_{N=0}^{\infty} (N+r) a_N(x)^{N+r-1}$$

$$y'' = \sum_{N=0}^{\infty} (N+r)(N+r-1) a_N(x)^{N+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$1) 3 \sum_{N=0}^{\infty} (N+r)(N+r-1) a_N(x)^{N+r-2} + 2 \sum_{N=0}^{\infty} (N+r) a_N(x)^{N+r-1} -$$

$$x \sum_{N=0}^{\infty} (N+r) a_N (x)^{N+r-1} - \sum_{N=0}^{\infty} a_N (x-x_0)^{N+r} = 0$$

Agrupando los factores semejantes:

$$2) \sum_{N=0}^{\infty} (N+R)(3N+3r-3+2) a_N x^{N+r-1} - \sum_{N=0}^{\infty} (N+r+1) a_N x^{N+r} = 0$$

Se pone en fase la ecuación diferencial:

$$N=K$$

$$N=K-1$$

$$3) \sum_{K=0}^{\infty} (K+r)(3K+3r-3+2) a_K x^{K+r-1} - \sum_{N=0}^{\infty} (K+r) a_{K-1} x^{K+r-1}$$

Se homogenizan los índices, calculando $K=0$

$$r(3r-1) a_0 x^{r-1} + \sum_{K=1}^{\infty} [(K+r)(3K+3r-1) a_K - (K+r)^{K+r-1} a_{K-1}] x = 0$$

$$r(3r-1) = 0$$

$$r = 0, 1/3$$

$$\text{si } r = 0$$

$$a_K = \frac{a_{K-1}}{K(3K-1)}, k \geq 1$$

$$k=1 \rightarrow a_1 = \frac{a_0}{2}$$

$$k=2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{5} = \frac{\frac{a_0}{2}}{5} = \frac{a_0}{2.5}$$

$$k=3 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{8} = \frac{a_0}{2.5 \cdot 8}$$

$$k=4 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{11} = \frac{a_0}{2.5 \cdot 8 \cdot 11}$$

$$k=5 \rightarrow a_5 = \frac{a_4}{14} = \frac{a_0}{2.5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14}$$

$$k=N \rightarrow a_N = \frac{a_0}{(3N-1)}$$

$$a_K = \frac{a_{K-1}}{(K+r)(3K+3r-1)}, k \geq 0$$

$$\text{si } r = 1/3$$

$$a_K = \frac{a_{K-1}}{(3K+3(\frac{1}{3})-1)} = \frac{a_{K-1}}{3K}, k \geq 1$$

$$k = 1 \rightarrow a_1 = \frac{a_0}{3}$$

$$k = 2 \rightarrow a_2 = \frac{a_1}{3} = \frac{a_0}{3.6}$$

$$k = 3 \rightarrow a_3 = \frac{a_2}{9} = \frac{a_0}{3.6.9}$$

$$k = 4 \rightarrow a_4 = \frac{a_3}{12} = \frac{a_0}{3.6.9.12}$$

$$k = 5 \rightarrow a_5 = \frac{a_4}{15} = \frac{a_0}{3.6.9.12.15}$$

$$k = N \rightarrow a_N = \frac{a_0}{3.6.9.12 \dots 3N}$$

$$y_1(x) = x^0 \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = x^0 \left(a_0 + \frac{a_0 x}{2} + \frac{a_0 x^2}{2.5} + \frac{a_0 x^3}{2.5.8} + \frac{a_0 x^4}{2.5.8.11} + \dots + \frac{a_0 x^N}{2.5.8.11 \dots (3N-1)} \right)$$

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.5} + \frac{x^3}{2.5.8} + \frac{x^N}{2.5.8 \dots (3N-1)} \right]$$

$$y_2(x) = x^{1/3} \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N = x^{1/3} \left[a_0 + \frac{a_0 x}{3} + \frac{a_0 x^2}{3.6} + \frac{a_0 x^3}{3.6.9} + \frac{a_0 x^4}{3.6.9.12} \dots + \frac{a_0 x^N}{3.6.9 \dots (3N)} \right]$$

Se sintetiza dicha solución

$$y_1(x) = a_0 x^0 \left[1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{x^N}{2.5.8 \dots (3N-1)} \right]$$

$$y_2(x) = a_0 x^{1/3} \left[1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{x^N}{3.6.9 \dots (3N)} \right]$$

$$\therefore y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

2.16. Marco metodológico

En esta investigación se usó el método deductivo, es decir, que se partió de situaciones o problemas generales la resolución de ecuaciones diferenciales aproximadas por serie de potencias hasta llegar por un razonamiento lógico a la solución de la ecuación diferencial que es lo particular.

Para determinar las pautas o normas que siguen los docentes al resolver ecuaciones diferenciales en dicho centro se realizaron observaciones de campo con los instrumentos

pertinentes para obtener las informaciones de dicho proceso educativo. Realizando cuestionarios dirigidos a los docentes y a los estudiantes.

Se dice que en este método se desciende de lo general a lo particular, de forma que partiendo de enunciados de carácter universal y utilizando instrumentos científicos, se infieren enunciados particulares, pudiendo ser axiomático-deductivo cuando las premisas de partida la constituyen axiomas (proposiciones no demostrables), o hipotético-deductivo si las premisas de partida son hipótesis contrastables.

Cuando el científico comienza su trabajo en una teoría y a partir de ella, aplicando razonamientos lógico-deductivos, acaba ampliando precisando o corrigiendo dicha teoría, está utilizando lo que se llama el método deductivo (Pereda, 1987)

2.16.1 Tipo de investigación

Esta investigación en este tipo de estudio es del tipo cualitativa ya que se estudia la calidad de las actividades, relaciones, asuntos, medios, materiales o instrumentos en una determinada situación o problema.

Según Lincoln y Denzin (1994), la investigación cualitativa es un campo interdisciplinar, transdisciplinar y en muchas ocasiones contra disciplinar. Atraviesa las humanidades, las ciencias sociales y la física. La investigación cualitativa es muchas cosas al mismo tiempo.

Taylor y Bogdan (1986) consideran, en un sentido amplio la investigación cualitativa como aquella que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas, escritas, y la conducta observable. Estos autores llegan a señalar las siguientes características propias de la investigación cualitativa:

- Es inductiva.

- Para el investigador cualitativo, todos los escenarios y personas son dignos de estudio.
- Los investigadores cualitativos dan énfasis a la validez en su investigación.
- Los métodos cualitativos son humanistas,
- Para los investigadores cualitativos todas las perspectivas son valiosas.

2.16.2. Método a aplicar

El método empleado en esta investigación es deductivo cuyo particular consiste en partir de los datos generales aceptado como verdadero para deducir por medio de razonamientos lógicos varias suposiciones, es decir, que se parte de verdades preestablecidas como principios generales para aplicarlo a casos particulares y comprobar su validez.

El método deductivo es un método científico que considera que la conclusión está implícita en las premisas. Por lo tanto, supone que las conclusiones siguen necesariamente a las premisas: si el razonamiento deductivo es válido y las premisas son verdaderas, la conclusión sólo puede ser verdadera.

2.16.3. Población y muestra

Los alumnos de sexto cuatrimestre de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del Instituto Especializado de Estudios Superiores Loyola (I.E.E.S.L.) de San Cristóbal. En total son 15 alumnos y 6 docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales.

Para extraer la muestra de estudiantes que fue analizada en esta investigación se aplicó la siguiente fórmula y criterios básicos (Hernández, 2002, pág.- 154)

$$n = \frac{z^2 N p q}{e^2 (N-1) + z^2 p q}$$

En donde:

Z= Nivel de confianza (1.96)

N= Poblacion (15 estudiantes)

p= Probabilidad a favor (0.50)

q= Probabilidad en contra (0.50)

e= Error de estimación (7%)

n= Tamaño de la muestra



De los 15 estudiantes del sexto cuatrimestre de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del Instituto Especializado de Estudios Superiores Loyola (I.E.E.S.L.) de San Cristóbal se extrajo la siguiente muestra:

$$n = \frac{1.96^2 (15)(0.5)(0.5)}{(0.07)(14) + (1.96)^2(0.25)} \cong 13.9996 = 14$$

Debido a que la muestra resulta significativa se procedió a seleccionar al azar a los 14 estudiantes por sección en cantidades proporcionales a la población de estudiantes de cada una de ellas.

2.16.4. Técnicas e instrumentos

Esta investigación se realizó con una población de 15 estudiantes y 6 docentes que imparten la asignatura de ecuaciones diferenciales. Se utilizó como técnica de investigación observaciones en clases y entrevistas a los docentes como instrumento, también cuestionarios a los mismos docentes, como a los estudiantes para la recolección de datos.

2.16.5. Procedimiento metodológico

Para desarrollar esta investigación se hicieron exploraciones diagnósticas, acompañamientos y observaciones de las diversas estrategias con las que los docentes desarrollan sus actividades en el aula.

Capítulo III: Presentación y Análisis de Resultados

En este capítulo se analizan e interpretan los resultados obtenidos por medio de los cuestionarios e instrumentos aplicados a los profesores y estudiantes del sexto cuatrimestre de la asignatura de ecuaciones diferenciales del Instituto Especializado de Estudios Superiores Loyola de la provincia de San Cristóbal, Republica Dominicana.

Datos y Análisis del cuestionario realizado a los docentes:

Tabla 1. Tiempo de los docentes impartiendo Ecuaciones Diferenciales en I.E.E.S.L.

Tiempo impartiendo la asignatura	Cantidad de docentes	%
Menos de 2 años	1	16.67%
Entre 2 y 5 años	0	00.00%
Entre 5 y 8 años	3	50.00%
Más de 8 años	2	33.33%
Total	6	100.00%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 1. Tiempo de los docentes impartiendo la asignatura de Ecuaciones Diferenciales



En la Tabla 1 y Gráfico 1 que se encuentran más abajo se analizan los resultados obtenidos del cuestionario realizado a los docentes en relación al tiempo que tienen impartiendo la asignatura Ecuaciones Diferenciales. Es importante destacar que el 50% de los docentes tiene entre 5 y 8 años. El 33.33% tiene un tiempo de más de 8 años impartiendo dicha asignatura. El 16.67% tiene menos de 2 años dan clases de esta materia.

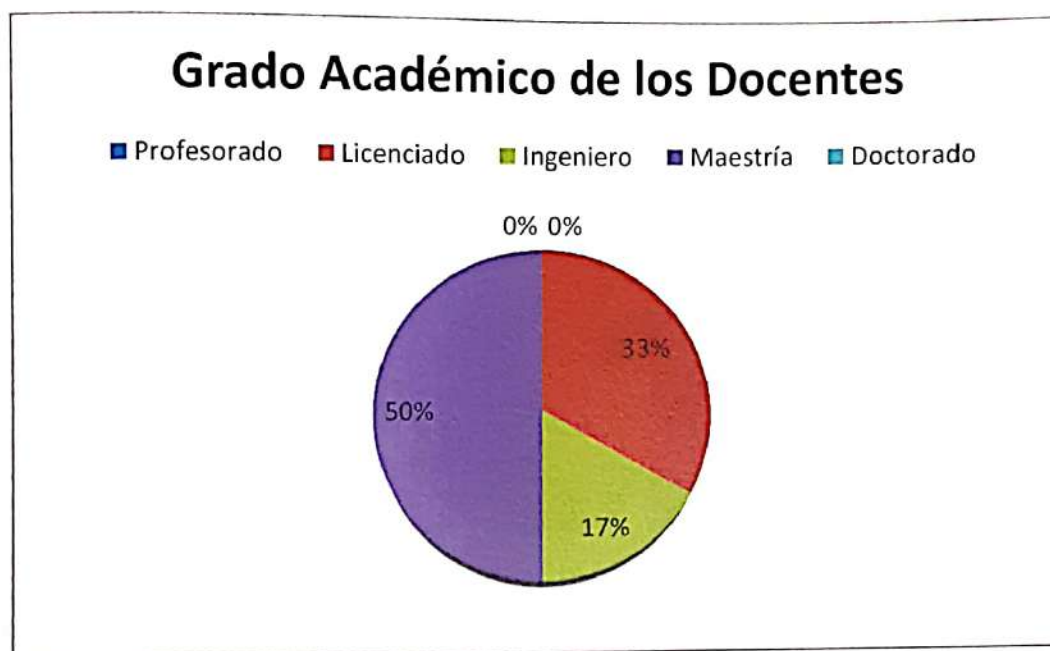
Con esto se evidencia que los docentes entre 5 y 8 años impartiendo dicha asignatura son los de más experiencia y la mayoría de ellos posee esta característica, por tanto es más fácil dirigir el proceso educativo de dicha institución.

Tabla 2. Grado académico más alto alcanzado por los docentes en el 2014

Grado Académico	Cantidad de docentes	%
Profesorado	0	00.00%
Licenciado	2	33.33%
Ingeniero	1	16.67%
Maestría	3	50.00%
Doctorado	0	00.00%
Total	6	100.00%

Fuente: *Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014*

Gráfico 2. Grado académico más alto alcanzado por los docentes de Ecuaciones Diferenciales en el 2014



La Tabla 2 y Gráfico 2 evidencian que el 50% de los docentes que imparten la asignatura de ecuaciones diferenciales en I.E.E.S.L. tienen un grado de maestría, el 33% tienen un grado académico de licenciatura y el 16.67% son ingenieros. Esto significa que el mínimo grado académico es de ingeniería. Lo más trascendente es que la mayoría de docentes posee un grado académico de maestría.

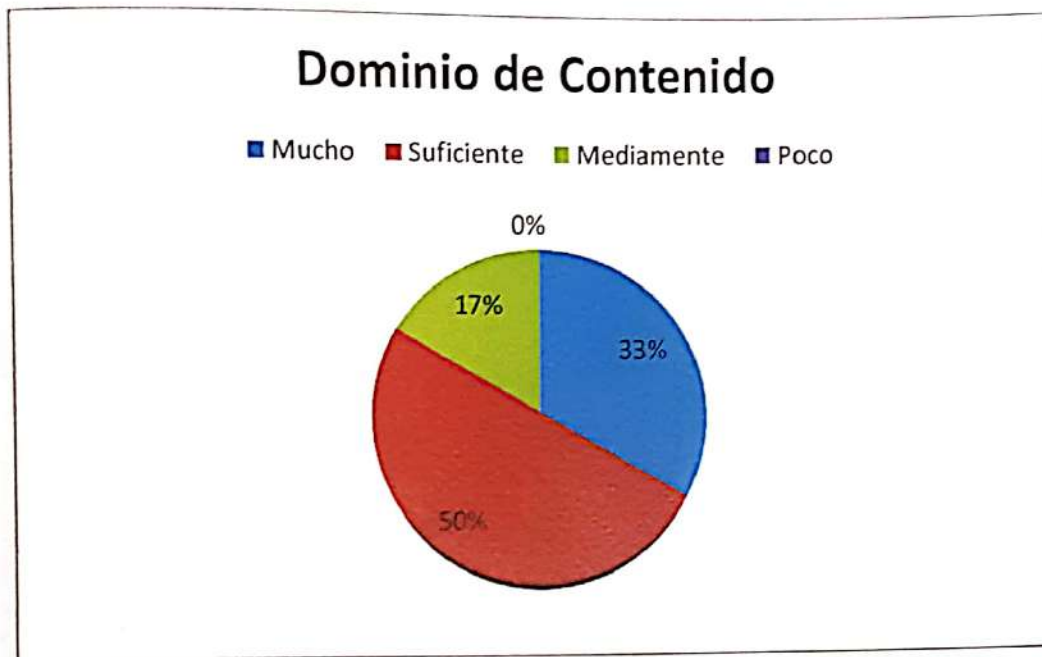
En muchos casos más de una en el área de las ciencias matemáticas pero aun las academias no cuentan con doctores en dicha área.

Tabla 3. Dominio del contenido de ecuaciones diferenciales

Dominio de contenido	Cantidad	%
Mucho	2	33.33%
Suficiente	3	50.00%
Mediamente	1	16.67%
Poco	0	00.00%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 3. Dominio del contenido de ecuaciones diferenciales



Los resultados antes citados expresan que el 50% de los docentes expresan tener un dominio suficiente del contenido sobre la asignatura de ecuaciones diferenciales. Mientras tanto, el 33% destaca que tiene mucho dominio y un 16.67 destaca tener un dominio mediamente aceptable del contenido de la asignatura.

Lo más importante que se verifica en la data analizada es que el 83.33% planteo que el dominio que posee sobre el contenido de la asignatura ecuaciones diferenciales es suficiente. Esto sin duda alguna, deja a la institución situada en un lugar privilegiado en cuanto al conocimiento de sus docentes.

Tabla 4. Tipo de evaluación usada por los docentes para la enseñanza

Tipo de Evaluación	Cantidad	%
Diagnostica	1	16.67%
Formativa	3	50.00%
Sumatoria	2	33.33%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 4. Tipo de evaluación usada por los docentes para la enseñanza



Analizando la data de la Tabla 4 y Gráfico 4 se evidencia que el 50% de los docentes utilizan en su metodología de enseñanza las evaluaciones formativas. Solo el 16.67% indicó que realiza una evaluación diagnóstica. Mientras un 33.37% destacó el uso de la evaluación sumatoria.

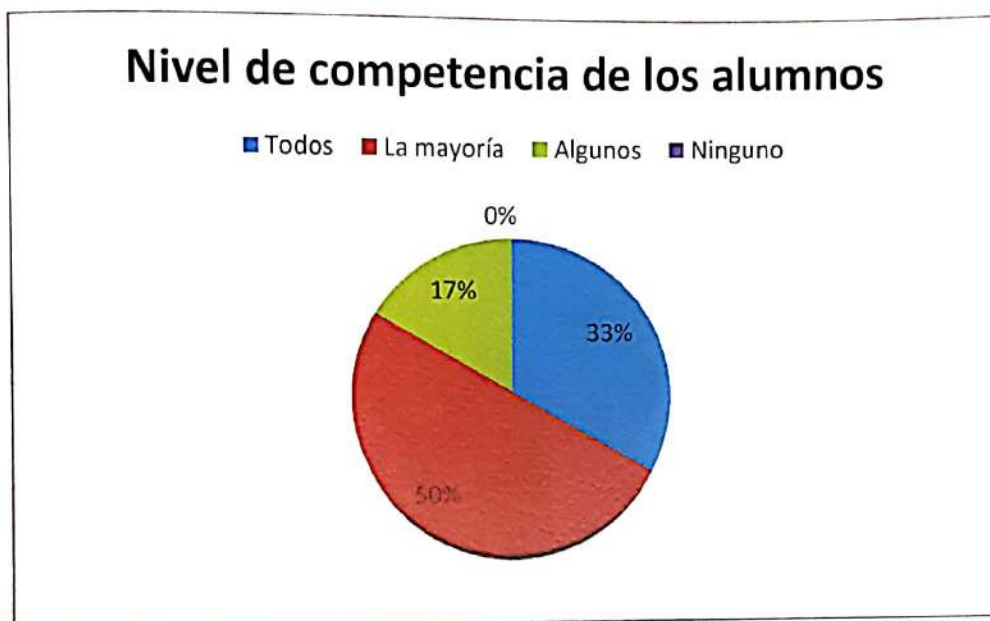
Es de suma importancia destacar que independientemente de la prioridad que cada uno de los docentes le otorga a la evaluación, el sentido común nos indica que una evaluación real integra las diferentes fases de la misma (diagnóstica, sumatoria y formativa).

Tabla 5. Nivel de competencia de los alumnos después de recibir los conocimientos sobre la asignatura Ecuaciones Diferenciales.

Nivel de competencia	Cantidad	%
Todos	2	33.33%
La mayoría	3	50.00%
Algunos	1	16.67%
Ninguno	0	00.00%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 5. Nivel de competencia de los alumnos después de recibir los conocimientos sobre la asignatura Ecuaciones Diferenciales.



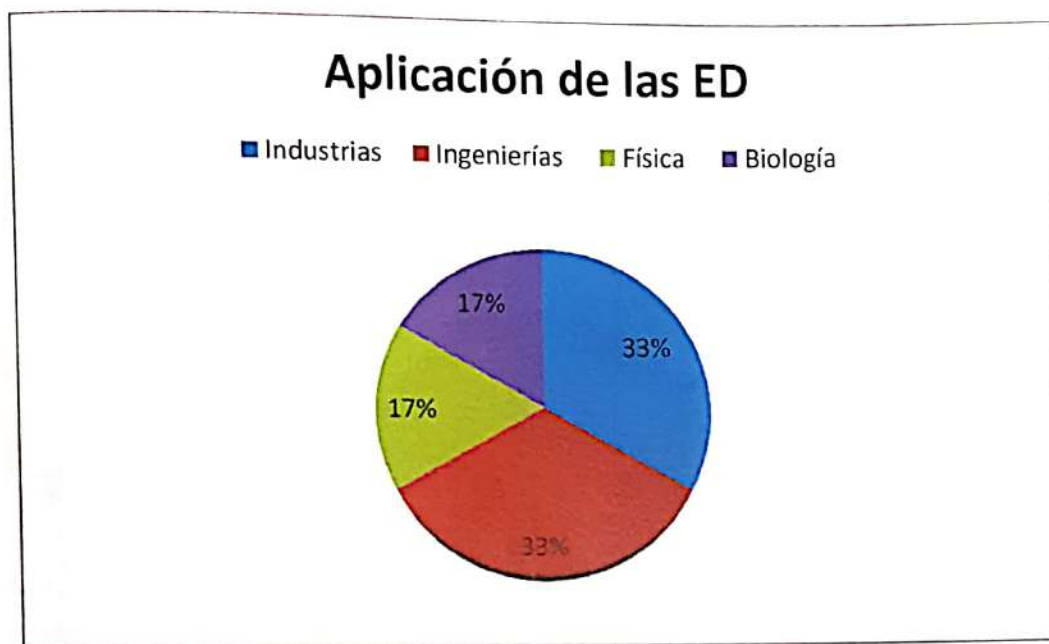
Los datos analizados de la Tabla 5 y Gráfico 5 demuestran que el 50% de los docentes expuso que la mayoría de los alumnos luego de ser impartidos los conocimientos de ecuaciones diferenciales poseen un nivel sobre el tema. El 33% adquirió todos los conocimientos para trabajar con las ecuaciones diferenciales y sólo el 16.67 % destaca que algunos de los alumnos obtuvo conocimientos sobre la asignatura.

Tabla 6. Aplicación de las ecuaciones diferenciales en las industrias y diversas ciencias

Aplicación de las EC	Cantidad	%
Industrias	2	33.33%
Ingenierías	2	33.33%
Física	1	16.67%
Biología	1	16.67%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 6. Aplicación de las ecuaciones diferenciales en las industrias y diversas ciencias



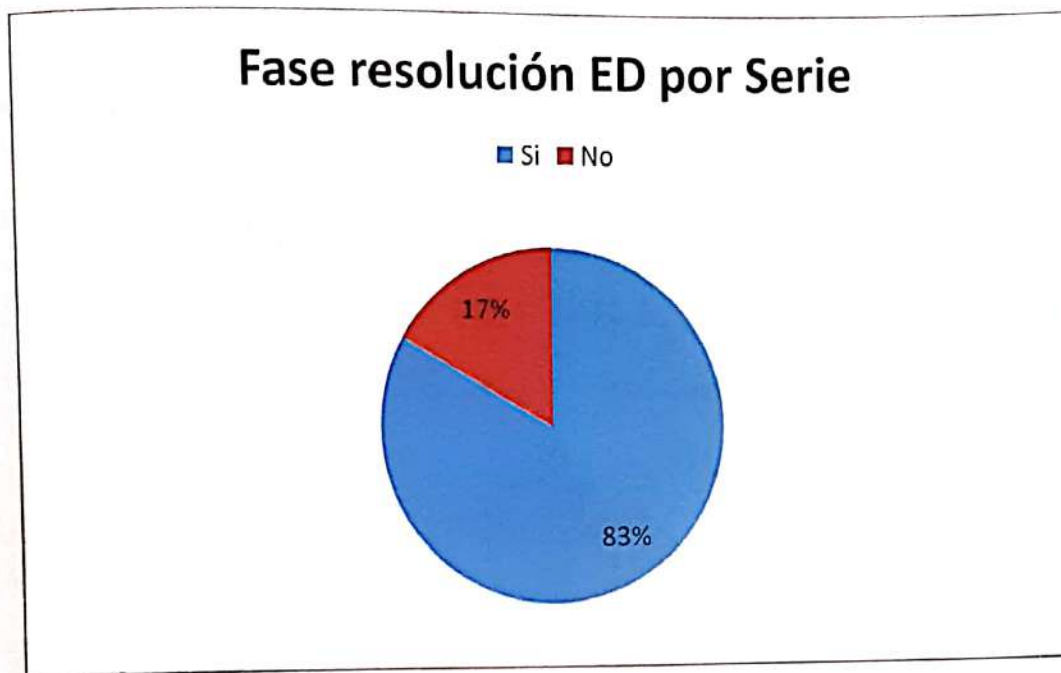
Analizando la Tabla 6 y el Gráfico 6 el 33% de los docentes enseña ecuaciones diferenciales aplicables a las industrias de modo que el conocimiento que adquieran los estudiantes lo puedan poner en práctica en sus trabajos. Sin embargo, el 16.67% enseña la asignatura aplicada a la biología. Lo expresado por los docentes implica que sus aplicaciones fueran tantas diversas en el mundo científico e industrial

Tabla 7. Criterio de fase al momento de resolver ecuaciones diferenciales por serie de potencias

Fase al resolver ED por serie de potencias	Cantidad	%
Si	5	83.33%
No	1	16.67%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 7. Criterio de fase al momento de resolver ecuaciones diferenciales por serie de potencias



Analizando la data de la Tabla 7 y Gráfico 7 se evidencia que el 16.67% expresó que no es necesario para resolver ecuaciones diferenciales por serie de potencias expresar sus términos en fase. Sin embargo, el 83.33% afirma que sí es necesario que cada término se encuentre en fase para determinar la solución de las ecuaciones diferenciales por el método de serie de potencias.

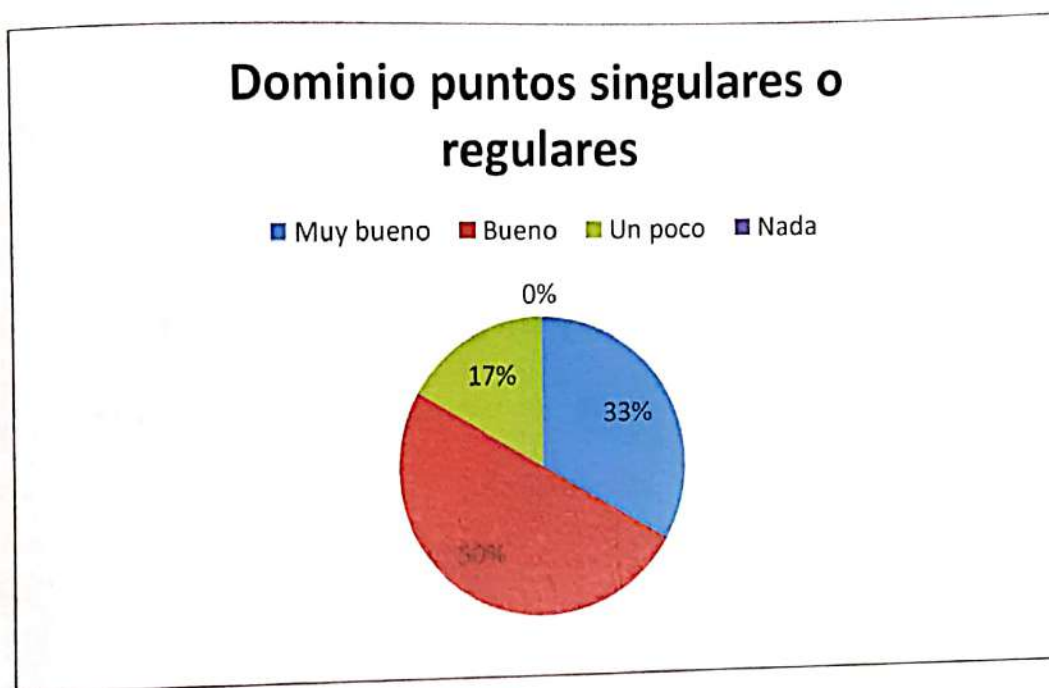
Lo expresado por el 83% de los docentes fundamenta la correcta interpretación científica para la determinación de soluciones de ecuaciones diferenciales aproximadas por serie de potencias entorno a un punto ordinario o singular, propiciando así la solución con un método abarcado, unificado y de fácil interpretación científica.

Tabla 8. Nivel de dominio de puntos ordinarios o singulares para resolución de ED por serie de potencias

Dominio puntos singulares o regulares	Cantidad	%
Muy bueno	2	33.33%
Bueno	3	50.00%
Un poco	1	16.67%
Nada	0	00.00%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 8. Nivel de dominio de puntos ordinarios o singulares para resolución de ED por serie de potencias



Al analizar la data de la Tabla 8 y Gráfico 8 es evidente que el 33.33% del personal cuestionado expreso que se debe tener un buen dominio sobre el tema de puntos ordinarios o singulares para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método aproximado de serie de potencias. Sin embargo, el 50% expresa que se debe tener un buen dominio sobre el tema en cuestión. Y el 16.67% planteo que es suficiente con tener un poco de dominio acerca del tema.

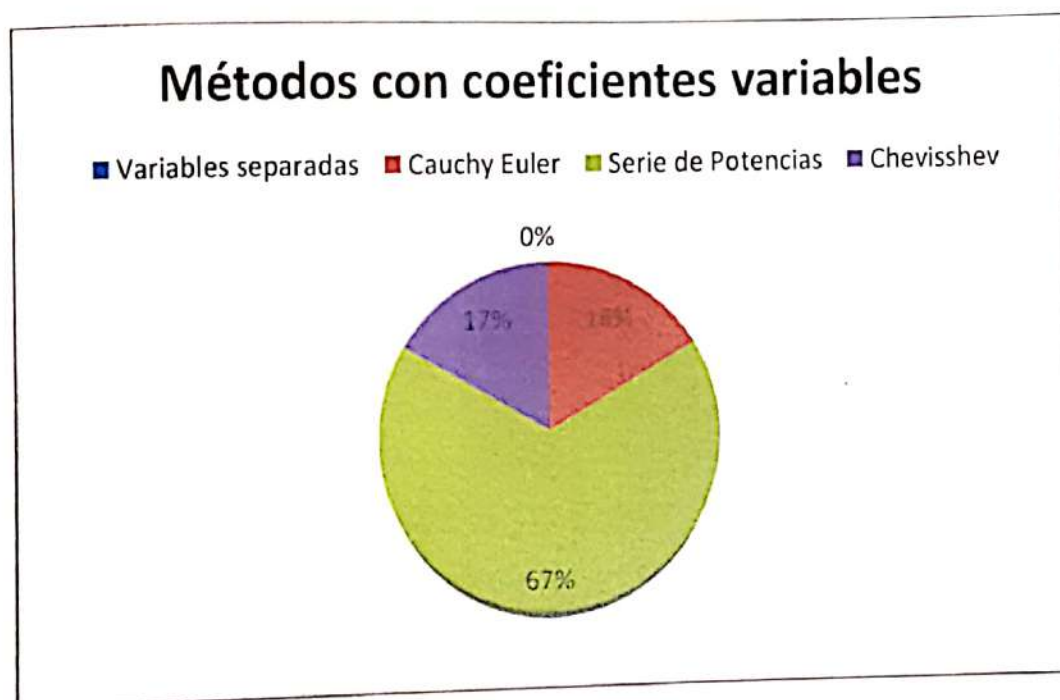
Es importante destacar que el 50% de los docentes tienen claro la utilidad de los puntos ordinarios o singulares, pues la solución de las ecuaciones diferenciales depende de que los puntos sean ordinarios o singulares. Es decir, singulares regulares, porque si son singulares irregulares la teoría sería diferente.

Tabla 9. Método más abarcador para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes variables

Métodos	Cantidad	%
Variables separadas	0	00.00%
Cauchy Euler	1	16.67%
Serie de Potencias	4	66.67%
Chevishev	1	16.67%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 9. Método más abarcador para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes variables



Analizando la data de la Tabla 9 y Gráfico 9 se evidencia que según el 16.67% de los docentes encuestados consideran que el método más abarcador para la resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables es el método de Cauchy Euler o el método Chevishev en igual proporción. Sin embargo, el 66.66% considera que el método más abarcador es el de serie de potencias.

Sin duda alguna, ese 66.66% de los docentes posee una formación clara y precisa para abordar la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias aproximadas por serie de potencias, partiendo del marco teórico, conceptual y científico plasmada en esta investigación.

Tabla 10. Solución de problemas en ecuaciones diferenciales por serie de potencias.

Solución de problemas	Cantidad	%
Siempre	2	33.33%
A menudo	2	33.33%
Rara vez	1	16.67%
Nunca	1	16.67%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 10. Solución de problemas en ecuaciones diferenciales por serie de potencias.



Al analizar los datos de la Tabla y Gráfico 10 evidenciamos que el 33.33% de los docentes resuelve los problemas de la asignatura ecuaciones diferenciales por serie de potencias. El 16.67% destaca que rara vez lo hace y el restante 33.33% evidencia que lo utiliza a menudo. No obstante, el 16.67% nunca realiza situaciones problemáticas en sus clases por el método de serie de potencias.

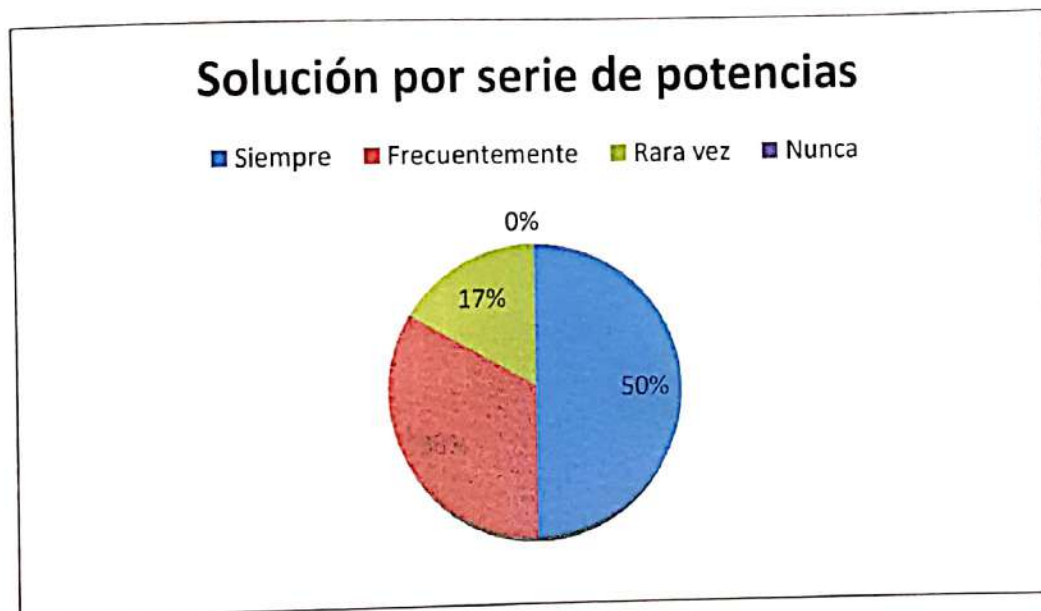
De lo anteriormente planteado por los docentes de la asignatura se determina que la mayoría centra su proceso de enseñanza en la realización de situaciones de problemas que orienten o transformen el profesional en un ente revolucionario en el mundo actual.

Tabla 11. Grado en dar solución a ecuaciones diferenciales por serie de potencias.

Solución por serie de potencias	Cantidad	%
Siempre	3	50.00%
Frecuentemente	2	33.33%
Rara vez	1	16.67%
Nunca	0	00.00%

Fuente: Cuestionario realizado a los docentes que imparten la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 11. Grado en dar solución a ecuaciones diferenciales por serie de potencias.



Al analizar la data de la Tabla y Gráfico 11 se evidencia que el 50% de los docentes da solución a las ecuaciones diferenciales por el método de serie de potencias. El 16.67% de ellos rara vez lo hace por ese método. Sin embargo, el 33.33% frecuentemente da solución a ecuaciones diferenciales por dicho método.

Esto plantea que la gran mayoría centra su desarrollo docente en la resolución de ecuaciones diferenciales por el método de serie de potencias lo cual habla sobre un futuro muy vasto para este profesional ya que las ecuaciones diferenciales transitan casi toda el área del saber humano y este método es el más abarcador y sintético para dar solución a los problemas.

Datos y Análisis del cuestionario realizado a los estudiantes:

Tabla 12. Sexo de los estudiantes en el 6to cuatrimestre de ingeniería del IEESL del 2014

Sexo de estudiantes	Cantidad	%
Masculino	5	35.71%
Femenino	9	64.29%
Total	14	100.00%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 12. Sexo de los estudiantes en el 6to cuatrimestre de ingeniería del IEESL del 2014



Analizando la Tabla 12 y Gráfico 12 se evidencia que aproximadamente el 64% de los alumnos en la asignatura ecuaciones diferenciales del 6to cuatrimestre del IEESL son del sexo femenino, y el 36% restante es masculino. Esto destaca el hecho de que una institución en la que tradicionalmente prevalecía el sexo masculino, la mayoría de estudiantes es actualmente el sexo femenino a pesar de que dicha institución se ha ido incorporando al quehacer científico al igual que la mayoría de las instituciones de educación superior en República Dominicana.

Tabla 13. Dominio del docente sobre la asignatura ecuaciones diferenciales.

Dominio de docentes	Cantidad	%
Mucho	4	28.57%
Suficiente	7	50.00%
Medianamente	2	14.29%
Poco	1	07.14%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 13. Dominio del docente sobre la asignatura ecuaciones diferenciales.



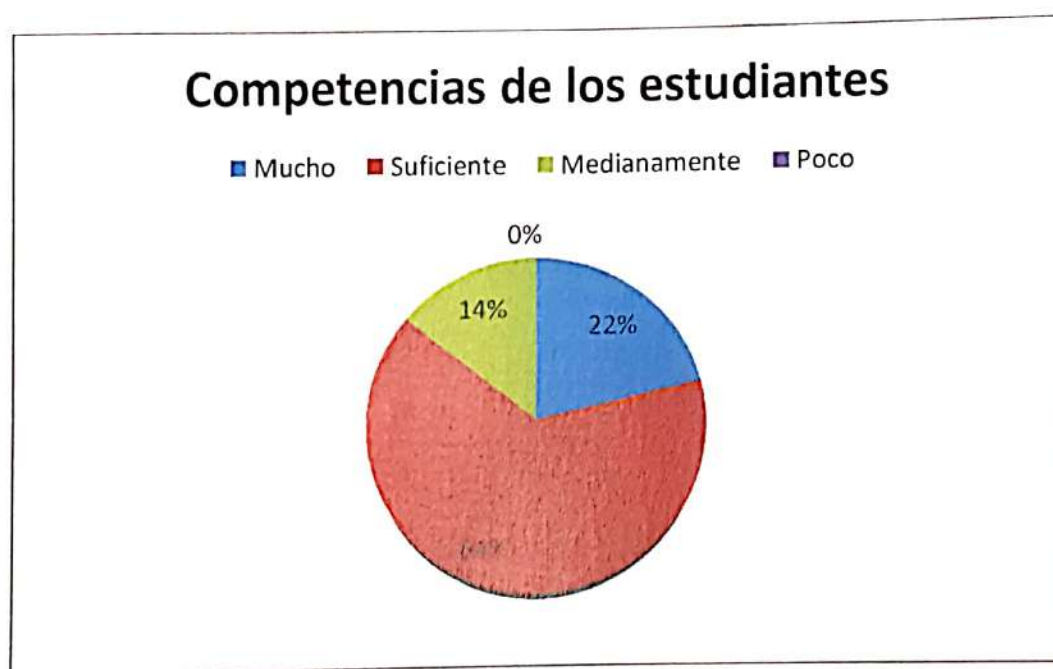
Como se evidencia en la Tabla 13 y Gráfico 13 el 50% de los estudiantes encuestados expreso que el dominio de los docentes impartiendo la asignatura ecuaciones diferenciales es suficiente. El 28% dice que es mucho, mientras tanto, el 14.29% de los estudiantes expresaron que el dominio es medianamente y solo el 7.14% destaca que el dominio de los docentes en la asignatura es poco. La mayoría de los estudiantes encuestados expresa satisfacción con el dominio de contenido de parte de los docentes sobre ecuaciones diferenciales.

Tabla 14. Competencias de los estudiantes al finalizar la asignatura.

Dominio de docentes	Cantidad	%
Mucho	3	21.43%
Suficiente	9	64.29%
Medianamente	2	14.28%
Poco	0	00.00%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 14. Competencias de los estudiantes al finalizar la asignatura.



Los resultados de la Tabla 14 y Gráfico 14 evidencian que el 64.29% de los estudiantes demostró competencia suficiente en ecuaciones diferenciales al finalizar la asignatura, el 21.43% demostró que tiene amplio dominio y solo el 14.28% demostró que su dominio es mediano.

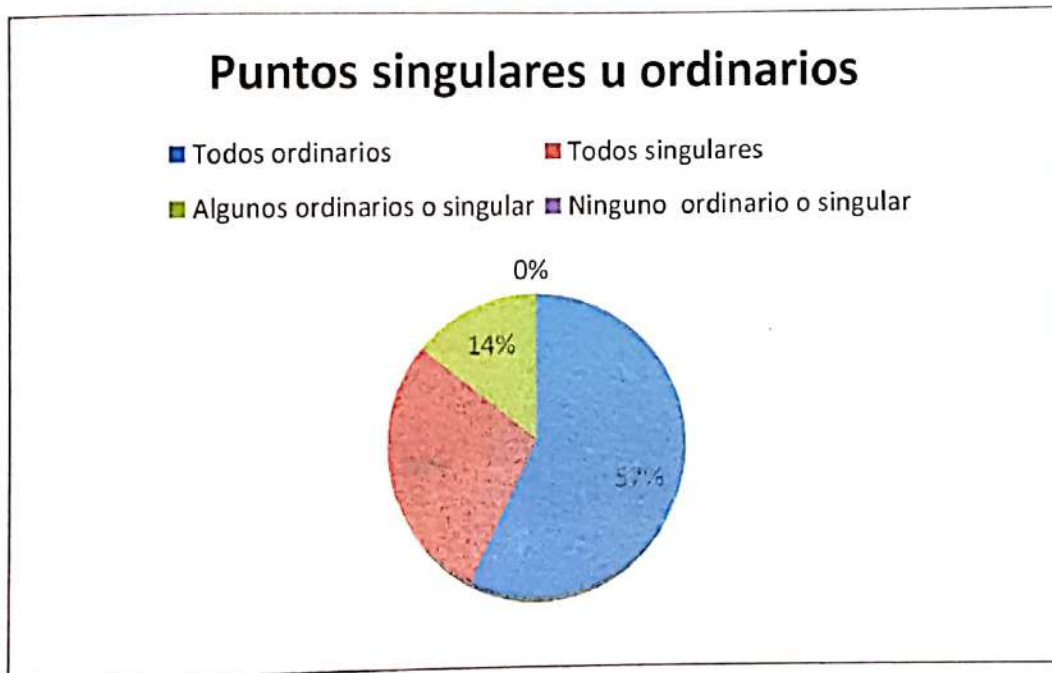
Los resultados obtenidos establecen que el nivel de competencia de los alumnos al finalizar el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias resulta satisfactorio en 85%, indicador de que la aplicación del método propuesto en la investigación resulta eficaz.

Tabla 15. Puntos ordinarios y singulares en la ecuación diferencial de Airy ($y'' + xy = 0$)

Puntos de la ecuación dada	Cantidad	%
Todos ordinarios	8	57.14%
Todos singulares	4	28.57%
Algunos ordinarios o singular	2	07.29%
Ninguno ordinario o singular	0	00.00%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 15. Puntos ordinarios y singulares en la ecuación diferencial de Airy ($y'' + xy = 0$)



Analizando los datos de la Tabla 15 y Gráfico 15 en la ecuación diferencial presentada a los estudiantes, se evidencia que el 57.14% de ellos tiene dominio de los puntos de dicha ecuación diferencial. Sin embargo, el 42.86% no posee dominio sobre los puntos ordinarios o singulares en la ecuación de Airy.

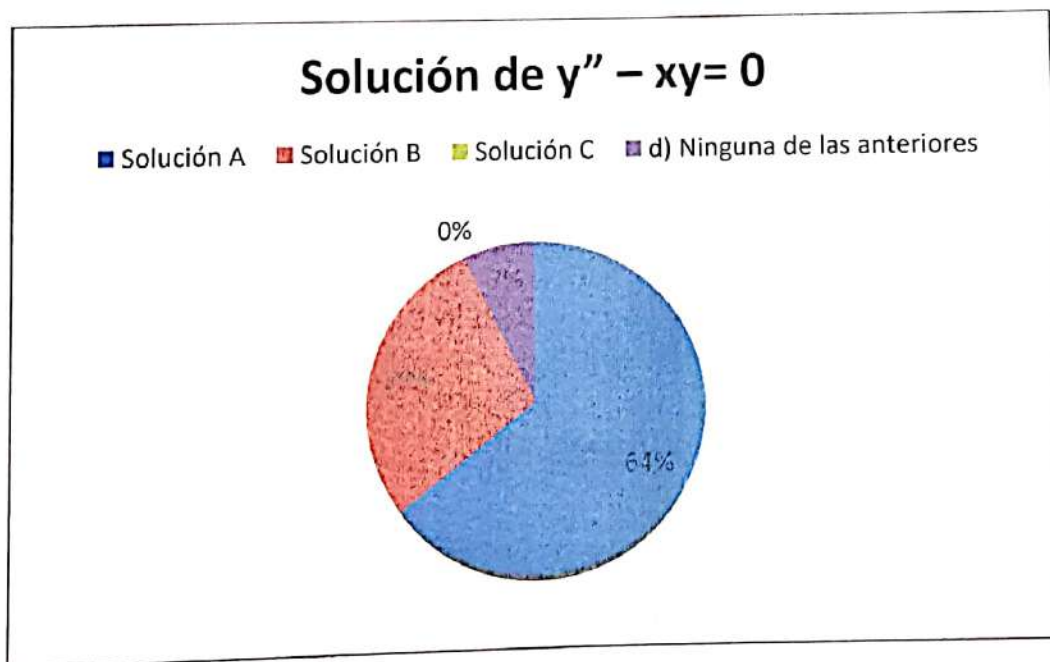
Los datos obtenidos destacan que la mayoría conoce sobre puntos ordinarios o singulares en dicha educación diferencial, la cual, es de vital importancia por su aplicabilidad en las diferentes áreas de la ciencia.

Tabla 16. Solución de la ecuación diferencial: $y'' - xy = 0$

Solución de $y'' - xy = 0$	Cantidad	%
a) $y_{1(x)} = c_0 (1 + \frac{x^3}{6} + \frac{4x^6}{6!} + \dots)$ $y_{2(x)} = c_1 (1 + \frac{x^4}{12} + \frac{10x^7}{7!} + \dots)$	9	64.29%
b) $y_{1(x)} = c_0 (1 - \frac{x^3}{6} + \frac{4x^6}{6!} + \dots)$ $y_{2(x)} = c_1 (1 - \frac{x^4}{12} + \frac{10x^7}{7!} + \dots)$	4	28.57%
c) $y_{1(x)} = cy_{2(x)}$ $y_{2(x)} = -cy_{1(x)}$	0	00.00%
d) Ninguna de las anteriores	1	07.14%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 16. Solución de la ecuación diferencial: $y'' - xy = 0$



En la data planteada de la Tabla 16 y Gráfico 16 con la resolución de la ecuación diferencial es evidente que el 64.29% de los estudiantes resolvió la ecuación diferencial de forma correcta, el 35.71% dio una solución incorrecta a la solución de la ecuación diferencial dada.

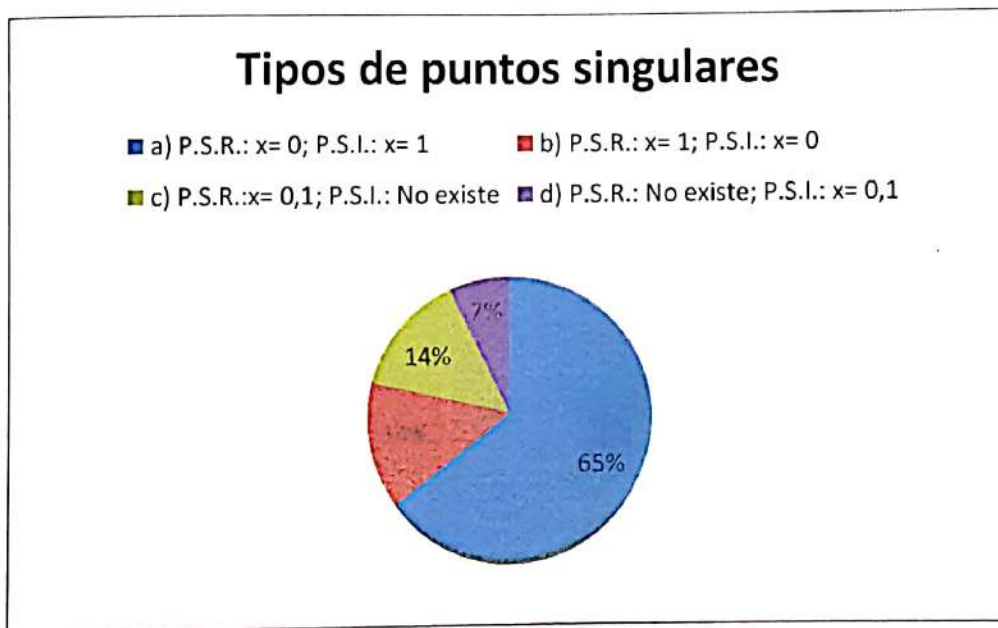
Estos datos demuestran que la mayoría de los estudiantes adquirió el conocimiento necesario para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias.

Tabla 17. Tipos de puntos singulares en: $x(x-1)^2y'' + xy' + y = 0$

Tipos de puntos singulares	Cantidad	%
a) P.S.R.: $x=0$; P.S.I.: $x=1$	9	64.28%
b) P.S.R.: $x=1$; P.S.I.: $x=0$	2	14.29%
c) P.S.R.: $x=0,1$; P.S.I.: No existe	2	14.29%
d) P.S.R.: No existe; P.S.I.: $x=0,1$	1	07.14%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 17. Tipos de puntos singulares en: $x(x-1)^2y'' + xy' + y = 0$



Desde el punto de vista conceptual según lo presentado en la Tabla 17 y Gráfico 17 el 64.28% de los estudiantes identifico correctamente los puntos de la ecuación diferencial dada. Sin embargo, el 35.72% no lo realizo de forma correcta.

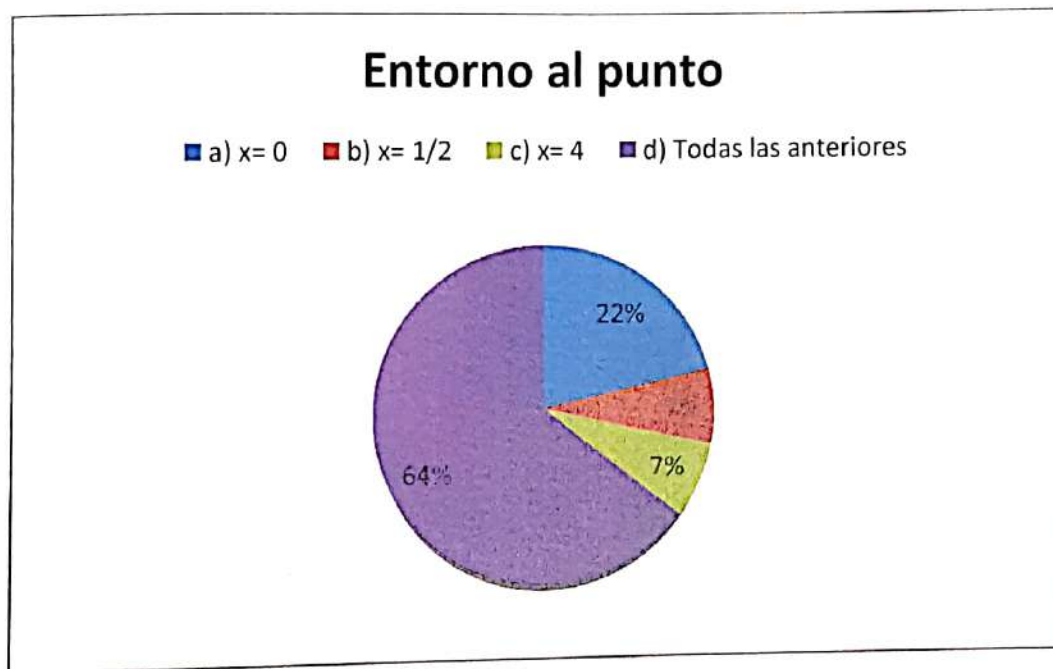
Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes dominan en su mayoría la determinación de puntos singulares en dicha ecuación diferencial, lo cual, es fundamental para determinar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias aproximadas por serie de potencias.

Tabla 18. Solución de ecuación diferencial que solo posee punto ordinario se obtiene entorno al punto

Entorno al punto	Cantidad	%
a) $x=0$	3	21.43%
b) $x=1/2$	1	07.14%
c) $x=4$	1	07.14%
d) Todas las anteriores	9	64.29%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 18. Solución de ecuación diferencial que solo posee punto ordinario se obtiene entorno al punto



Se ha evidenciado en los datos de la Tabla 18 y Gráfico 18 que de los estudiantes encuestados el 64.29% posee dominio de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con puntos ordinarios. Sin embargo, el 35.71% no tiene el dominio sobre el tema.

De lo anteriormente expuesto, se dice que los estudiantes en su mayoría domina que las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias entorno a punto ordinario puede realizarse con respecto a cualquier punto.

Tabla 19. Tipo de solución de una ecuación diferencial con puntos ordinarios

Tipos de soluciones	Cantidad	%
a) $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^{N+r}$	3	21.43%
b) $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$	10	71.43%
c) Ninguna de las anteriores	1	07.14%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 19. Tipo de solución de una ecuación diferencial con puntos ordinarios



En la Tabla 19 y Gráfico 19 mostrados anteriormente se evidencia que el 71.43% de los estudiantes encuestados domina el tipo de solución de una ecuación diferencial con puntos ordinarios. Sin embargo, el 28.57% de ellos no está claro de cuál debe ser la forma de dicha solución.

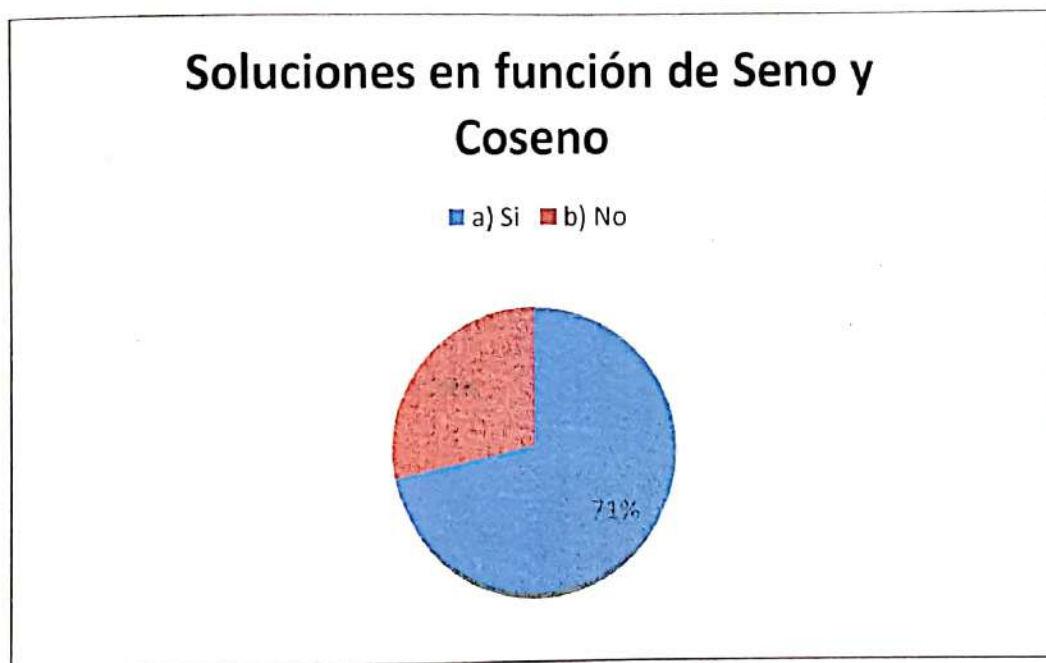
Los resultados de la tabla y el gráfico anterior certifican que la mayoría de los estudiantes dominan el tema de tipos de soluciones a elegir para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con puntos ordinarios.

Tabla 20. La solución de una ecuación diferencial ordinaria de puntos ordinarios en función de seno y coseno.

Soluciones en termino de Seno y Coseno	Cantidad	%
a) Si	5	35.71%
b) No	9	64.29%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 20. La solución de una ecuación diferencial ordinaria de puntos ordinarios en función de seno y coseno.



En la Tabla 20 y Gráfico 20 anteriormente mostrados se destaca que el 62.29% de los alumnos encuestados dominan el tema de que las soluciones no solo se expresan en función de seno y coseno, lo cual es un indicador que de la mayoría de ellos domino como se puede expresar una ecuación diferencial. Esto evidencia que el trabajo conceptual realizado en la asignatura sobre ecuaciones diferenciales ordinarias fue satisfactorio.

Tabla 21. Tipos de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria con puntos ordinarios o singulares.

Tipos de soluciones	Cantidad	%
a) Independiente	9	64.29%
b) Dependiente	4	28.57%
c) Ninguna de las anteriores	1	07.14%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 21. Tipos de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria con puntos ordinarios o singulares.



En los datos de la Tabla 21 y Gráfico 21 se muestra que el 64.29% de los estudiantes encuestados demostró tener dominio sobre el tema tipo de soluciones en una ecuación diferencial ordinaria, el 35.71% demostró no tener dominio sobre el tipo de solución.

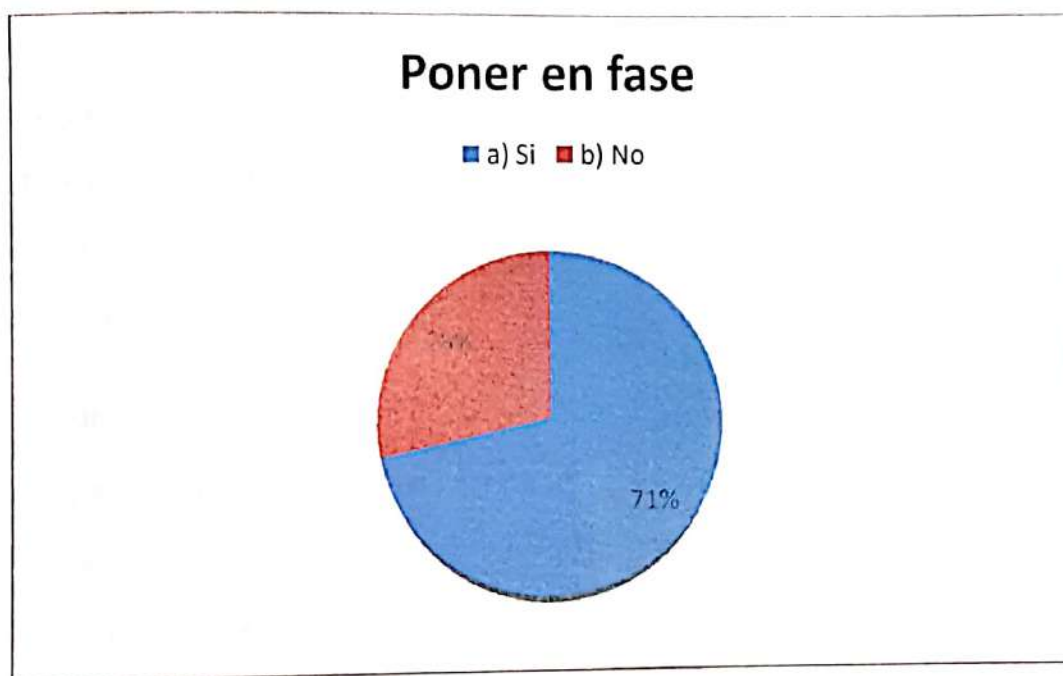
Esto evidencia que la mayoría de los estudiantes domina o conoce que las soluciones en una ecuación diferencial ordinaria deben ser independientes para poder ser soluciones distintas y que pueden satisfacer una ecuación diferencial en toda efectividad.

Tabla 22. Ecuaciones diferenciales ordinarias para poder operarlas deben estar en fase sus términos.

Poner en fase	Cantidad	%
a) Si	10	71.43%
b) No	4	28.57%

Fuente: Cuestionario realizado a los estudiantes de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales del IEESL, Nov. 2014

Gráfico 22. Ecuaciones diferenciales ordinarias para poder operarlas deben estar en fase sus términos.



En los datos de la Tabla 22 y Gráfico 22 se muestra que el 71.43% de los estudiantes encuestados saben que las ecuaciones diferenciales deben estar en fase para poder realizar operaciones pero un 28.57% lo desconoce.

Los resultados obtenidos evidencian que es satisfactorio el aprendizaje sobre la homogenización y fase de las ecuaciones diferenciales para realizar operaciones y obtener la solución pertinente.

Conclusiones

En los resultados obtenidos en el proceso de esta investigación, así como en las tablas y graficas realizadas a docentes y alumnos se verifican un conjunto de elementos comunes para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias que puede ser expresada de la siguiente manera que sirven para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias aproximadas por serie de potencias con un mínimo de dificultad:

- Dominio temático, saber transformar funciones en serie de potencia, uso correcto de la solución adecuada para cada ecuación diferencial ordinaria, expresar cada término de una ecuación diferencial en fase homogenizando todos sus elementos, determinación de la ley que rige o gobierna la ecuación diferencial. Calculo de los a_i en cada ecuación diferencial para cada solución o soluciones linealmente independiente de la ecuación diferencial. Dominio de puntos ordinarios y singulares

Esta tesis se fundamenta en dotar a los estudiantes y usuarios de las matemáticas de un conjunto de pautas o normas que rigen el método de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias. Dichas normas o estrategias presentadas en esta investigación apoyándose conjunto de situaciones problemáticas, puestas en prácticas por los alumnos y docentes del Instituto Especializado de Estudios Superiores Loyola, lo sintetizamos de la siguiente manera:

- Determinación de los puntos singulares u ordinarios de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Clasificación de los puntos singulares en regulares e irregulares.
- Identificación de la solución a elegir en cada una de las ecuaciones diferenciales ordinarias entorno a puntos singulares u ordinarios.
- Aplicación de serie de potencias a cada uno de los términos en la ecuación diferencial ordinaria dada.

- Poner en fase los términos de dicha ecuación diferencial ordinaria.
- Calculo de la ley de recurrencia en la ecuación diferencial ordinaria, para hallar los a_i .
- Seleccionar la solución adecuada según la ecuación diferencial ordinaria que tenga puntos ordinarios o puntos singulares regulares.
- Familiarizarse con la transformación de funciones trascendentes a serie de potencias.
- Si la ecuación diferencial ordinaria posee puntos singulares regulares la solución es de la forma $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^{r+N}$ determinando a r para tener las leyes de recurrencia, obteniendo soluciones independientes y conociendo los a_i .
- Conociendo los a_i y sustituyendo estos en la solución expandida o desarrollada se obtiene la solución prevista.

Estas reglas sencillas, prácticas y accesibles a cada uno de los estudiantes aplicándolas a ecuaciones diferenciales ordinarias de lo simple a lo complejo como fue presentada en el marco conceptual de esta investigación. De manera tal el usuario matemático se compenetre con dichas reglas o normas, de forma que haga del método serie de potencias algo practico, fácil y eficaz para la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales con coeficientes variables donde otros métodos resultan limitados, complicados y muy diversos según la clase de ecuaciones diferenciales.

Recomendaciones

Las estrategias que se plantearon en esta tesis fueron aplicadas con los alumnos de la asignatura de ecuaciones diferenciales del tercer cuatrimestre de ingeniería del 2014 en el Instituto Especializado de Estudios Superiores Loyola en San Cristóbal, República Dominicana por el sustentante de esta investigación. Después de realizar este estudio es preciso recomendar lo siguiente:

- Implementar en las ingenierías y licenciaturas de matemáticas la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias en el pensum de todas las universidades del país.
- Extender la investigación a la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales por serie de potencias.
- Ampliar la investigación sobre la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias entorno a puntos singulares irregulares.
- Fomentar la investigación de resolución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales entorno a puntos singulares irregulares.

Bibliografía

- Aguilera, J. & Lizana, M. (1990). Estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Imprenta Universitaria, UCV. España.
- Aguirregabiria, J. (2000). Ecuaciones diferenciales ordinarias para estudiantes de física. Primera edición. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco. España.
- Amigó, J. (2000). Variable compleja y ecuaciones diferenciales ordinarias. Universidad Miguel Hernández. México.
- Apostol, T. (1977). Cálculos. Volumen 1. Editorial Reverté. España.
- Apostol, T. (1994). Análisis matemático. Segunda edición, Reverté. España.
- Aranda, J. (2007). Apuntes de ecuaciones diferenciales I. Universidad Complutense de Madrid. España.
- Aranda, J. (2008). Apuntes de ecuaciones diferenciales II (EDPs). Universidad Complutense de Madrid. España.
- Arnold, V. (1979). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Moscú: Nauka.
- Arnold, V. (1974). Ecuaciones diferenciales ordinarias. Mir. Moscú
- Ayres, F. (1982). Ecuaciones Diferenciales. Editorial Mc Graw-Hill. México.
- Ayres, F. (1993). Ecuaciones diferenciales. Primera edición. Editorial McGraw Hill. México.
- Ayres, F. (1998). Ecuaciones diferenciales. Col. Schaum, McGraw-Hill, México.

Becerril, J. & Elizarraraz, D. (2004). Ecuaciones diferenciales, técnicas de soluciones y aplicaciones. Primera edición. Editorial Nopase. México.

Blanchard, P., Devaney, R. & Hall, G. (1998). Ecuaciones Diferenciales. Thomson editores, México.

Blanchard, P., Devaney, R. & Hall, G. (1999). Ecuaciones Diferenciales. 1ª. Edición en español. Editorial Thomson. México.

Blanchard, P., Devaney, R. & Hall, G. (1999). Ecuaciones Diferenciales. International Thomson. México.

Boyce (1991). "Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera" ISBN 968-18-0107-5, pp.17. Costa Rica.

Branson, R. & Costo, G. (2008). Ecuaciones Diferenciales Schaum. (Tercera edición). Editora MC Graw Hill. Bogotá.

Braun, M. (1988). Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera. Thomson Learning. México.

Braun, M. (1990). Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Braun, M. (1990). Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Primera edición. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Braund, M. (1990). Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones. 1ª. Edición en Español. Editorial Iberoamérica, México.

Bronson, R. (1990). Ecuaciones diferenciales modernas. Mc Graw-Hill, impreso en Editorial Nomos. Bogotá.

Bronson, R. (1990). Ecuaciones diferenciales modernas. Mc Graw-Hill, impreso en Editorial Nomos. Bogotá.

Bucheli, C. (2009). Módulo de ecuaciones diferenciales. Primera edición. Editorial de la Universidad Nacional y Abierta y a Distancia. Colombia.

Burcham, B. & Wing, E. (1977). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Bogotá.

Campbell, S & Haberman, R. (1998). Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valores de frontera. Primera edición. McGraw Hill: México.

Campbell, S. & Haberman, R. (1996). Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Elementales con problemas de valor en la frontera. McGraw-Hill. México.

Campbell, S. & Haberman, R. (1997). Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera. McGraw-Hill. México.

Cardona, A., Nigro, N., & Sonzogni, V. (2000). Mecánica Computacional. Vol XXV, pp. 1805-1820. Santa Fe, Argentina.

Chapra, S. & Canale, R. (2003). Métodos Numéricos para Ingenieros. McGraw-Hill. Argentina.

Charles, R. (1980). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Un enfoque al cálculo numérico. Ed. Prentice-Hall Int. Inglaterra.

Coddington, E. (1968). "Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias". Compañía Editorial Continental, SA. 1ra. ed. en español. Inglaterra.

- Da Rocha, A. & J. Viola-Prioli. (1997). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Universidad Simón Bolívar. Argentina
- Demidovich, B. (1985). Problemas y ejercicios de análisis matemático. Paraninfo. Inglaterra.
- Derrick, G. (1984). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Fondo Editorial Iberoamericano. Estados Unidos.
- Edwards, P. (1986). Ecuaciones Diferenciales elementales con aplicaciones. Calypso S.A. México.
- Edwards, C. & Penney, D. (1993). Ecuaciones Diferenciales y problemas con condiciones en la frontera. Prentice Hall. México.
- Edwards, C. & Penney, D. (1994). Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera. Prentice Hall Hispanoamericana. México.
- Edwards, C. & Penney, D. (1993). Ecuaciones Diferenciales Elementales con condiciones en la frontera. 3ª edición. Prentice-Hall. Hispanoamericana, México.
- Elsgol'tz, H. (1995). Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Mir, 3ª ed. Moscú.
- Elsgol'tz, L. (1977). Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Ed. Mir. Moscú.
- Etchechoury, M. & Muravchik, C. (2001). "Sistema Diferencial-Algebraico con Control: Subvariedad Invariante por Realimentación," aceptado para ser presentado en la IX Reunión de Procesamiento de la Información y Control, a realizarse en la UNL, Santa Fe, Septiembre 2001. México.

F. Marcellan, L. Casassus & A. Zarzo, (1990). Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones. McGraw-Hill. Madrid, España.

Fernández, C. & Vegas, J. (1996). Ecuaciones Diferenciales II, Ecuaciones no Lineales. 1ª. Edición. Editorial Pirámide. Madrid, España.

Francisco, C. & Valenzuela, J. (2003). Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos. Thomson Editores. España.

Gabriel-Argüelles, J., Avendaño-Garrido M., Barahona-Gómez, R. (2003). Notas para un Curso de Ecuaciones Diferenciales. Xalapa. Ver.: Facultad de Matemáticas, U.V.; 5, 10-25. España.

García, O., Villegas, G., Castaño, B. & Sánchez, J. (2010). Ecuaciones Diferenciales. Fondo Editorial Universidad EAFIT. España.

García, P., Torres, V. & Jacquez, P. 2001 Problemas de ecuaciones diferenciales. Ariel, Barcelona

Grosman, S. (1992). Algebra Lineal con Aplicaciones. Mc Graw-Hill. 3a. Edición. Inglaterra.

Guzmán, M. (1975). Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control, Alhambra, Madrid.

Hernandez, F. (2002). Metodología de la investigación de las ciencias sociales. Ediciones UAPA. Santo Domingo.

<http://es.scribd.com/doc/95560620/Definicion-de-metodo-deductivo> recuperado el 02-11-14. Colombia.

http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial recuperado el 17-10-2014.
México.

<http://www.iiicab.org.bo/Docs/doctorado/dip3version/M2-3raV-DrErichar/investigacion-cualitativa.pdf> recuperado el 01-11-14. España.

<http://www.ponce.inter.edu/cai/Comite-investigacion/investigacion-cualitativa.html>
recuperado el 19-10-14. España.

https://www.google.com.do/?gws_rd=cr,ssl&ei=9MhBVKqIK4_isATA4IHgAg#q=que%20es%20una%20ecuacion recuperado el 17-10-2014. Nicaragua.

Hurewicz, W. (1966). "Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias". Ediciones RIALP.
Madrid.

Hurewicz, W. (1996). "Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias". Ediciones RIALP.
Madrid.

INCE, E. (1939). "Integración de ecuaciones diferenciales ordinarias". Editorial Dossat,
S.A. Madrid.

Kiseliov, A., Krasnov M. & Makarenko, G. (1970). Problemas de ecuaciones
diferenciales ordinarias. 3era ed., Mir. Moscú

Kiseliov, M. (1987). "Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias". Editorial
Latinoamericana: pág.11 y 12. Nicaragua.

Kiseliov; K. (1987). "Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias". Editorial
Latinoamericana: pág.10. Nicaragua.

- Kiseliou, K. (1987). "Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias" (Makarenko; Editorial Latinoamericana: pág.11 y 12. Nicaragua.
- Kreider, O. (1973). Ecuaciones Diferenciales. Fondo Editorial Iberoamericano. Perú.
- Lomen, D. & Lovelock, D. (1998). Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos. CECSA. México.
- Marcellan, F., Casasus L. & Zarzo, A. (1990). Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones. McGraw-Hill. Madrid.
- Marcus, D. (1991). Ecuaciones Diferenciales. CECSA. México.
- Meléndez, J. (2007). Apuntes de ecuaciones diferenciales I. Capítulo 1 (ecuaciones de primer orden). Madrid.
- Meléndez, J. (2007). Apuntes de ecuaciones diferenciales I. Universidad Complutense de Madrid.
- Meléndez, J. (2007). Apuntes de ecuaciones diferenciales I. Universidad Complutense de Madrid.
- Meléndez, J. (2008). Apuntes de ecuaciones diferenciales II (EDPs). Universidad Complutense de Madrid.
- Molero, M. et al (2007). Análisis Matemático para Ingeniería. Editora PRENTICE-HALL. México.
- Moreno, M. & Azcárate, C.(1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos en Enseñanza de las Ciencias. 15(1), 21-24. México.

- Murray, S. (1983). Ecuaciones diferenciales aplicadas. Tercera edición. Editorial Prentice Hill Hispanoamérica. México.
- Nagle R. & Saff, E. (1992). Fundamentos de ecuaciones diferenciales. 2.a ed., Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington (Delaware, USA).
- Nagle, R., Saff, E. & Snider, A. (2000). Ecuaciones Diferenciales Elementales y problemas con valores en la frontera. Pearson Educación. México.
- Nápoles J. & Negrón C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales contadas por sus libros de texto. Revista Electrónica de la Didáctica de las Matemáticas. 3 (2): 33-57. México.
- Nápoles, E. (1995). "Una nota sobre el Teorema de Sarkovski", Revista Lecturas Matemáticas. (UNC-SMC) 16, no. 2, 11-214. México.
- Nápoles-Valdés JE, Negrón-Segura C. La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por su libro de texto, Octubre 2002; 3(2) (Available on line URL). <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1002.pdf>. México.
- Pereda, S. (1987). Psicología Experimental. I. Metodología Editorial Pirámide. Madrid.
- Puig, P. (1980). Ecuaciones diferenciales. Nuevas Gráficas. Madrid.
- Rainville, E. & Bedient, P. (1977). "Ecuaciones Diferenciales", 5aed., Edit. Interamericana. México.
- Rainville, E. (1976). Ecuaciones Diferenciales Elementales. (Quinta edición). Editorial Trillas. México
- Shepley, R. (1979). Ecuaciones Diferenciales. Reverté S.A. Barcelona:

- Simmons, G. & Robertson, J. (1993). Problemas de ecuaciones diferenciales. Barcelona.
- Simmons, G. & Krantz, S. (2007). Ecuaciones Diferenciales. Teoría y Práctica. McGraw-Hill. Barcelona.
- Simmons, G. (1988). “Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas”. McGraw-Hill. Madrid.
- Simmons, G. (1991). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. 2ª edición, Mc Graw-Hill / Interamericana de España. Madrid.
- Simmons, G. (1993). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. 2. da ed., McGraw-Hill. Madrid.
- Simmons, G. (1993). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, McGrawHill. México.
- Simmons, G. (1993). Ecuaciones Diferenciales, Con aplicaciones y notas históricas. McGraw Hill. México.
- Trench, W. (2001). Ecuaciones Diferenciales Elementales con condiciones en la frontera. Thomson Learning. México.
- Vellando, P. (2005). Problemas de ecuaciones diferenciales. Aplicaciones a la ingeniería. Copy Belén. Santiago de Cuba.
- Vera-Echavarría, S. (1998). Análisis del Comportamiento de las Soluciones de una Ecuación Diferencial de Segundo Orden. Tesis de Maestría, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba

- Zeldovich F. & Yaglom U. (1987). "Matemáticas superiores" (, sin ISBN, pp. 210 y 211. Alemania.
- Zeldóvich, Y. & Yaglom, I. (1987). Matemáticas superiores". sin ISBN, pp. 210 y 211. Alemania.
- Zill, C. (2002). Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera. Thomson Learning, 5a. Edición. Estados Unidos.
- Zill, D. & Cullen, M. (2006). Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera. (Sexta edición). Editorial Thomson. Estados Unidos.
- Zill, D. (1997). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. México: Thomson Editores. Estados Unidos.
- Zill, D. (2002). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. International Thomson Editores. México.
- Zill, D. (2006). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. Octava Edición. Brooks/Cole Publishing Co. ITP. QA 372.Z54 1997. México.
- Zill, D. (2006). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Anexos

Anexo 1. Cuestionario realizado a docentes.

Estimados Docentes:

Somos maestrantes del Programa de Maestría de Matemática Superior de la Universidad APEC, razón por el cual se está llevando a cabo la presente investigación. Es de vital importancia contar con ustedes respondiendo este cuestionario con toda la franqueza y sinceridad posible. La información provista por ustedes solo será utilizada para este estudio por lo que serán administradas de manera confidencial.

Marque con una X la opción de su preferencia.

- 1) Sexo
 - a) Masculino _____
 - b) Femenino _____
- 2) Años impartiendo la asignatura Ecuaciones Diferenciales
 - a) Menos de 2 años _____
 - b) Entre 2 y 5 años _____
 - c) Entre 5 y 8 años _____
 - d) Más de 8 años _____
- 3) Nivel académico más alto alcanzado
 - a) Profesorado _____
 - b) Licenciado _____
 - c) Ingeniero _____
 - d) Maestría _____
 - e) Doctorado _____
- 4) Grado de dominio de los contenidos sobre Ecuaciones Diferenciales
 - a) Mucho _____
 - b) Suficiente _____
 - c) Medianamente _____
 - d) Poco _____
- 5) Cuales tipos de evaluaciones utiliza usted en su práctica docente?
 - a) Diagnostica _____
 - b) Formativa _____
 - c) Sumativa _____
 - d) Todas las anteriores _____

- 6) Considera que los alumnos después de recibir dicha asignatura poseen las competencias necesarias?
- a) Todos _____
 - b) La mayoría _____
 - c) Algunos _____
 - d) Ninguno _____
- 7) Estima usted que los alumnos aplican y ponderan la importancia de las ecuaciones diferenciales en su desarrollo futuro
- a) Todos _____
 - b) La mayoría _____
 - c) Algunos _____
 - d) Ninguno _____
- 8) Considera usted que para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias aproximadas por serie de potencias el alumno debe poner en fase los términos de las ecuaciones diferenciales?
- a) Si _____
 - b) No _____
- 9) Cree usted que para determinar la solución de una ecuación diferencial ordinaria por serie debe tener pleno dominio de puntos ordinarios o singulares de la ecuación diferencial
- a) Muy bien _____
 - b) Bien _____
 - c) Un poco _____
 - d) Nada _____
- 10) Cuando impartió Ecuaciones Diferenciales Ordinarias aproximadas por serie de potencias el método más abordado fue?
- a) Método de variables separadas _____
 - b) Método de Cauchy Euler _____
 - c) Método de serie de potencias _____
 - d) Método de Chevishev _____
- 11) Cuando impartió ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias trabajó situaciones problemáticas?
- a) Siempre _____
 - b) Frecuentemente _____
 - c) Rara vez _____
 - d) Nunca _____

12) Cuando los estudiantes recibieron las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes variables determinaron la solución por serie de potencias?

- a) Siempre _____
- b) Frecuentemente _____
- c) Rara vez _____
- d) Nunca _____

Anexo 2. Cuestionario realizado a estudiantes.

Estimados Estudiantes:

Somos maestrantes del Programa de Maestría de Matemática Superior de la Universidad APEC, razón por el cual se está llevando a cabo la presente investigación. Es de vital importancia contar con usted respondiendo este cuestionario con toda la franqueza y sinceridad posible. La información provista por ustedes solo será utilizada para este estudio por lo que serán administradas de manera confidencial.

Marque con una X la opción de su preferencia.

1) Sexo

a) Masculino _____

b) Femenino _____

2) El profesor domina la asignatura ecuaciones diferenciales?

a) Mucho _____

b) Suficiente _____

c) Mediamente _____

d) Poco _____

3) Los conocimientos que ha adquirido sobre ecuaciones diferenciales ordinarias por serie de potencias son:

a) Mucho _____

b) Suficiente _____

c) Mediamente _____

d) Poco _____

4) En la ecuación diferencia: $y'' + xy = 0$ existen:

a) Puntos ordinarios _____

b) Puntos singulares

c) Ambos

5) En esta ecuación diferencial ordinaria de 2do orden: $y'' - xy = 0$ las soluciones son:

a) $y_1(x) = C_0 \left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{4x^6}{6!} \dots \right)$, $y_2(x) = C_1 \left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{10x^7}{7!} \dots \right)$ _____

b) $y_1(x) = C_0 \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{4x^6}{6!} \dots \right)$, $y_2(x) = C_1 \left(x - \frac{x^4}{12} + \frac{10x^7}{7!} \dots \right)$ _____

c) $y_1(x) = C_1 y_2(x)$, $y_2(x) = -C_2 y_1(x)$ _____

d) Ninguna de las anteriores

6) En la siguiente ecuación diferencial ordinaria los puntos singulares regulares e irregulares son $x(x-1)^2 y'' + xy' + y = 0$

a) P.S.R: $X=0$, P.S.I: $X=1$ _____

b) P.S.R: $X=1$, P.S.I: $X=0$ _____

c) P.S.R: $X=0, 1$, P.S.I no existe _____

d) P.S.R: no existe, P.S.I: $X=0, 1$ _____

7) En la ecuación diferencial ordinaria que solo posee puntos ordinarios la solución puede obtenerse en torno a:

a) $x=0$ _____

b) $x=\frac{1}{2}$ _____

c) $x=-4$ _____

d) Todas las anteriores _____

8) En la ecuación diferencial ordinaria que solo tiene puntos ordinarios la solución es de la forma:

a) $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$

b) $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^{N+r}$

c) Ninguna de las anteriores _____

9) En la ecuación diferencial ordinaria que tiene puntos singulares regulares la solución es de la forma:

a) $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^N$

b) $y = \sum_{N=0}^{\infty} a_N x^{N+r}$

c) Ninguna de las anteriores _____

10) En toda ecuación diferencial ordinaria donde $x=a$ es punto singular, puede ser $x=a$ punto S.I.?

a) Si _____

b) No _____

11) Si una ecuación diferencial ordinaria los coeficientes de la derivada y de la función son funciones trascendentes, podrían tener puntos ordinarios?

a) Si _____

b) No _____

12) Si una ecuación diferencial ordinaria los coeficientes de la derivada y de las funciones trascendentes, podrían tener puntos singulares?

a) Si _____

b) No _____

13) En una ecuación diferencial ordinaria de 2do orden homogénea con puntos ordinarios, la solución debe expresarse en termino de seno y coseno?

a) Si _____

b) No _____

14) Al resolver una ecuación diferencial homogénea de 2do orden con puntos singulares regulares la solución tiene que ser:

- a) Independiente _____
b) Dependiente _____
c) Ninguna de las anteriores _____
d) a y b son correctas _____

15) Al resolver operaciones (suma o restas) en una ecuación diferencial por serie de potencias se debe poner en fase?

- a) Si _____
b) No _____

