



**Tesis para Optar por el Título de
Maestría en Matemática Superior**

TÍTULO:

**ESTRATEGIAS DE APLICACIÓN DE LA
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA EN LA NAVEGACION
ORTODRÓMICA**

Sustentante:

Carlos Manuel Carmona Penzo

2015-0542

Asesor:

Dr. Ignacio de la Caridad Pérez Yzquierdo.

**Santo Domingo, D.N.
República Dominicana
Noviembre, 2016.**

INDICE

RESUMEN.....	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
DEDICATORIAS	iv
INTRODUCCIÓN.....	1

CAPÍTULO I:

NOCIONES BÁSICAS DE TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

1.1 Definición de conceptos	5
1.1.1 Trigonometría	5
1.1.2 Trigonometría plana.....	5
1.1.3 Clasificación de los triángulos planos	6
1.1.4 Trigonometría esférica.....	6
1.2 Geometría sobre la superficie de una esfera.....	7
1.2.1 Circunferencia máxima	7
1.2.2 Circunferencia mínima.....	8
1.2.3 Polos.....	9
1.2.4 Ángulo o huso esférico	10
1.2.5 Distancia esférica	11
1.2.6 Triangulo esférico	13
1.2.7 Área de un polígono esférico	15
1.2.8 Área de un triángulo esférico	16
1.2.9 Área de un huso esférico.	17
1.2.10 Propiedades de los triángulos esféricos	18
1.2.11 Clasificación de los triángulos esféricos	21
1.2.12 Exceso esférico según los lados.....	21
1.2.13 Incentro.....	21
1.2.14 Circuncentro.	22

1.2.15 Triángulo esférico polar	23
1.3 Triángulo esférico oblicuángulo	26
1.3.1 Ley de los senos	27
3.1.1 La altura esférica	27
1.3.2 Ley de los cosenos	28
1.3.3 Ley de la relación cotangente-seno	28
1.3.4 Funciones del ángulo mitad	29
1.3.5 Funciones para el Semi-lado	29
1.3.6 Analogía de Gauss o D'Lambre	29
1.3.7 Analogías de Neper en un triángulo esférico ABC	30
1.4 Triángulo esférico Oblicuángulo (Soluciones Alternas)	30
1.4.1 La función semisenoverso	31
1.5 Método del ángulo auxiliar	31
1.5.1 Primer caso	32
1.5.2 Segundo caso	33
1.6 Método de la ecuación de 2do grado	33
1.7 Resolución del triángulo esférico	35
1.7.1 Triángulo esférico rectángulo	35
1.7.2 Propiedades fundamentales de los triángulos esféricos rectángulos	36
1.7.3 Leyes de los cuadrantes	37
1.7.4 Regla del pentágono de Neper	38
1.7.5 Resolución del triángulo esférico rectilátero	39
1.7.6 Propiedades particulares de los triángulos esféricos birrectángulos y trirectángulo	41
1.7.7 Descomposición de un triángulo rectángulo (Método del perpendicular)	41
1.7.7.1 Datos iniciales del triángulo esférico rectángulo 1 (AHC)	42
1.7.7.2 Datos iniciales del triángulo esférico rectángulo 2 (CHB)	42
1.7.8 Resolución de triángulos esféricos isósceles	46

CAPITULO II:

NAVEGACION ORTODRÓMICA

2.1 Elementos básicos de la navegación ortodrómica	48
2.1.1 La longitud de un arco de circunferencia	48
2.1.2 Latitud	49
2.1.3 Meridiano	50
2.1.4 Paralelo.....	51
2.1.5 Derrota o ruta.....	51
2.1.6 Derrota ortodrómica.....	51
2.1.7 Rumbo	52
2.1.8 Distancias ortodrómicas.....	54
2.1.9 Distancias y velocidades.....	54
2.2 Navegación a lo largo de un paralelo.....	56
2.3 Navegación en un plano	60
2.3.1 El camino más corto para viajar entre dos puntos	61
2.4 Navegación por latitud media.....	62
2.5 Estima	62
2.6 Navegación a lo largo de una circunferencia máxima	63

CAPITULO III:

APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA EN AL NAVEGACIÓN ORTODRÓMICA

3.1 Caso didáctico de aplicación de la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica	67
3.1.1 Diferencia de longitud y distancias	67
3.1.2 Rumbo y distancias	70
3.1.3 Navegación a lo largo de un paralelo	75
3.1.4 Navegación en un plano	78
3.1.5 Navegación por latitud media	79
3.1.6 Navegación a lo largo de una circunferencia máxima	81
CONCLUSIONES.....	97
RECOMENDACIONES	100
GLOSARIOS	102
BIBLIOGRAFÍA.....	103
ANEXOS	

RESUMEN

La trigonometría esférica como estrategia para la navegación ortodrómica es una herramienta fundamental de la navegación en ausencia de instrumentos electrónicos.

El planteamiento de las estrategias para la navegación ortodrómica, extiende su campo a la navegación marítima, aérea y espacial, es donde radica su mayor importancia. Su aplicación en la docencia, desarrollará en el egresado las competencias globales y necesarias enmarcadas en los aspectos de navegación a larga distancias. El primer capítulo nos ofrece un panorama de las características de los triángulos esféricos.

En el segundo capítulo se tratan los elementos básicos de la navegación ortodrómica, y finaliza con un tercer capítulo, donde exponemos los ejemplos didácticos de aplicación de la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad APEC.

Por permitir ser parte de ella y brindarme su orgullo de llevar sus enseñanzas, como parte de pertenecer al conjunto de profesionales de calidad, adecuado a los nuevos tiempos.

Al Asesor del Trabajo Final.

Dr. Ignacio de la Caridad Pérez Yzquierdo, por sus excelentes orientaciones académicas.

A mis Padres.

Quienes dedicaron sus esfuerzos incondicionales para la realización de esta investigación

A mis Hermanos.

Por ser partes activa e integral de mi vida, a lo largo de la trayectoria de esta investigación.

A mis Compañeros.

Lic. Jonathan A. José O., Ing. Jonathan Tavares, Magister Roger F. Paulino, Lic. Claudio Rosario.

Gracias a todos.

DEDICATORIA

A mis Padres.

Dedico esta tesis a mi madre **Silvia maría Penzo** y a mi padre **Mamerto Carmona Méndez** por su apoyo emocional que he recibido de ellos.

A mis Hermanos.

Dedico este trabajo de investigación a **Esteban Carmona Penzo**, Licenciado en filosofía y Magíster en Gerencia de la Comunicación Corporativa. Y a **Ninoska Carmona Penzo**, Licenciada en Informática.

INTRODUCCIÓN

El propósito fundamental de esta investigación es servir de ayuda a lo que se inician en el estudio de la navegación. Dar a conocer los aspectos elementales de la navegación ortodrómica, requiere de ciertos conocimientos de la trigonometría esférica.

Esta investigación mostrara diversos casos de resolución de problemas de navegación marítima y aérea, sometidos a ciertas situaciones que podrán ilustrar soluciones de la navegación sobre la superficie de la tierra, en donde la tierra se considera una esfera perfecta y lo móviles que se desplazan, lo realizan siguiendo arcos de circunferencias máximas. En estas condiciones es posible utilizar la trigonometría esférica para resolver dichos problemas.

Además, se mostrarán problemas, por ejemplo, aquellos en los que la navegación se realiza por un paralelo terrestre, y también se ilustrara mediante ejemplos como se viaja entre dos puntos de la superficie terrestres con una distinta o igual latitud.

El objetivo general es mostrar las aplicaciones de la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica. Y nuestros objetivos específico son describir los elementos, propiedades y leyes que forman parte de la trigonometría esférica, así como definiera los elementos que inciden en la navegación ortodrómica y en consecuencia mostrar aplicaciones didácticas de la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica.

La investigación está compuesta por tres unidades o capítulos, el primero expone las nociones o elementos fundamentales de la trigonometría esférica, a partir del estudio de la geometría de la superficie de una esfera y mediante las resoluciones de triángulos esféricos.

En el segundo capítulo, damos los fundamentos de la navegación ortodrómica, exponiendo distintos métodos de la navegación ortodrómica.

El tercer capítulo, expone los distintos casos didácticos de la navegación ortodrómica, mediante ejemplos ilustrados para los navegantes marítimos y aéreos.

Esta investigación consta de los capítulos siguientes:

Capítulo 1

Comienza con la conceptualización de trigonometría, estos temas han sido abordado mediante la referencia bibliográfica de diferentes autores, relacionado con los temas de trigonometría.

Cabe destacar que la trigonometría se divide en: trigonometría plana y la trigonometría esférica. La trigonometría esférica, consiste en el estudio de la relación de los lado y ángulos de un triángulo, cuyas medidas son arco de circunferencia máxima.

Para el uso de la navegación ortodrómica, es necesario conocer y tener una adecuada comprensión del estudio de los triángulos esféricos y sus propiedades, sin embargo, este estudio está orientado a señalar las técnicas y estrategia de navegación a profesionales de la navegación marítima y aérea.

La trigonometría esférica, considera desarrollar las competencias necesarias en el navegante de estos tiempos.

Capítulo 2

En el exponemos los elementos básicos de navegación ortodrómica, destacándose los conceptos de: longitud de un arco, latitudes, meridianos paralelos, navegación a lo largo de un paralelo, navegación en un plano, navegación por latitud media, estima y navegación a lo largo de una circunferencia máxima.

Capítulo 3

Está constituido por los casos didácticos de aplicación de la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica, como son: las diferencias de longitudes y distancias, rumbos, navegación a lo largo de un paralelo, apartamientos, navegación en un plano, navegación por latitud media y navegación a lo largo de una circunferencia máxima.

Terminamos el capítulo dando un enfoque de los tres casos fundamentales de la navegación ortodrómica, basados en ejemplos didácticos de aplicación.

CAPITULO I
NOCIONES BASICA DE
TRIGONOMETRIA ESFERICA

1.1 DEFINICION DE CONCEPTOS

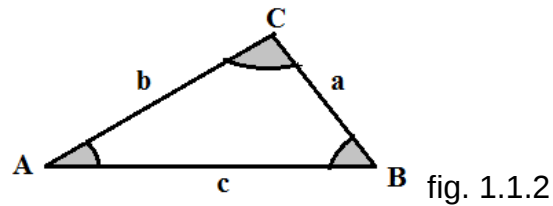
1.1.1 Trigonometría.

Es el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo por las funciones trigonométrica de los ángulos (seno, coseno y tangente). [Castaño, Jesús M. (2001) Diccionario de matemática, editora norma S.A. Colombia p.188.]

Trata de las mediciones de las partes o elementos de un triángulo. La trigonometría plana, se limita a los triángulos contenidos en los planos. La trigonometría esférica estudia ciertos ángulos trazados sobre la esfera. [Ayres, Frank Jr. (1970) Trigonometría plana y esférica, editora McGraw-Hill, Colombia, p.1]

1.1.2 Trigonometría plana¹.

Un triángulo plano es un polígono de tres lados.



Las propiedades fundamentales de los lados y los ángulos de un triángulo plano son:

- a) Cada lado es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.
- b) La suma de los tres ángulos de los triángulos es constante, e igual a 180° .
- c) A mayor lado se opone mayor ángulo, y recíprocamente. A lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente

¹ Villa Mitja Antoni (1992) **Elementos de trigonometría esférica**, ediciones UPC, España, p.27

1.1.3 Clasificación de los triángulos planos².

- En un triángulo equilátero, es aquel que contiene tres lados iguales y tres ángulos iguales, siendo cada uno de los ángulos iguales a 60° .
- Un triángulo escaleno, es aquel que tiene sus tres lados y sus tres ángulos desiguales.
- Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90° .
- En un triángulo acutángulo, es aquel que contiene todos sus ángulos menores de 90° .
- En un triángulo obtusángulo hay un ángulo mayor que 90° .

1.1.4 Trigonometría esférica.

La trigonometría esférica trata de las relaciones trigonométricas que existen entre los seis elementos de un triángulo esférico: tres lados y tres ángulos, donde los lados no son líneas rectas o planos. [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.14]

² Castaño, Jesús M. (2001) **Diccionario de matemática**, editora norma S.A. Colombia p.185 y188

1.2. GEOMETRIA SOBRE LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA

1.2.1. Circunferencia máxima.

Se llama *circunferencia máxima* a la intersección de la esfera que su plano que pasa por el centro de dicha esfera. [Berrocso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.12]

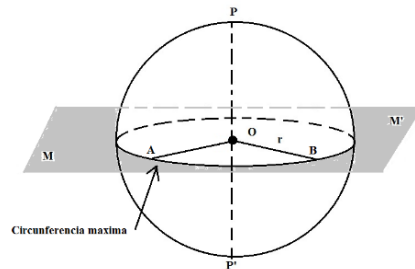


fig. 1.2.1 a

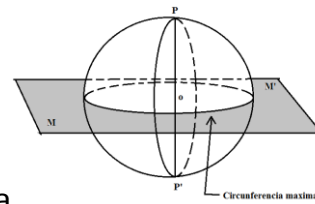


fig. 1.2.1 b

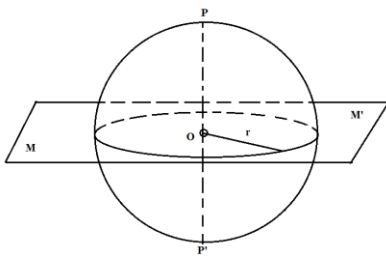


fig. 1.2.1 c

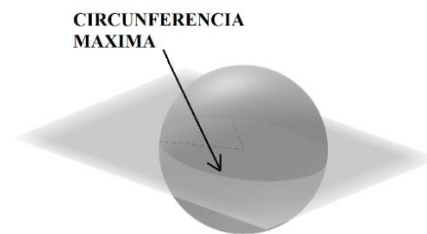


fig. 1.2.1

d

1.2.2. Circunferencia mínima.

Si el plano que interseca a la esfera no contiene al centro y no es tangente a la esfera, entonces la intersección del plano con la esfera es una *circunferencia menor*. [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.12]

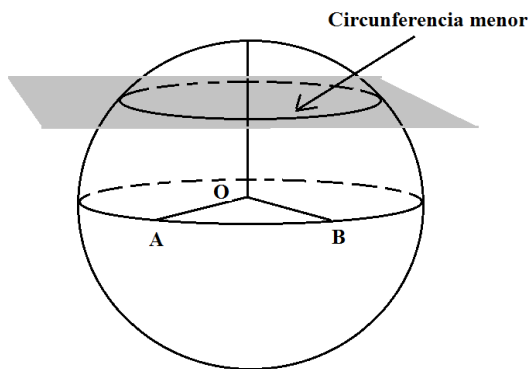


fig. :

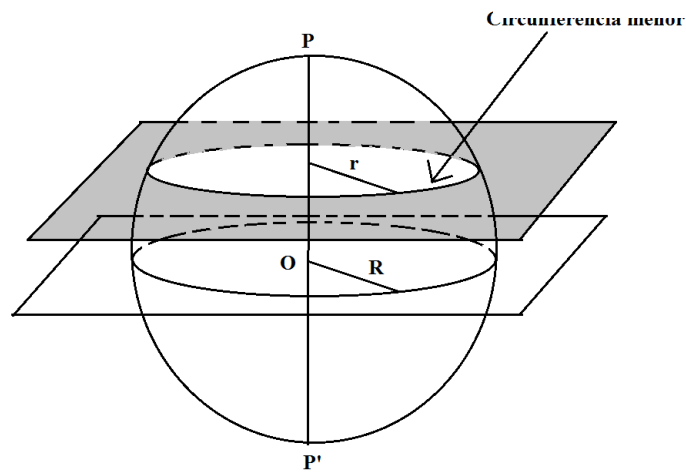
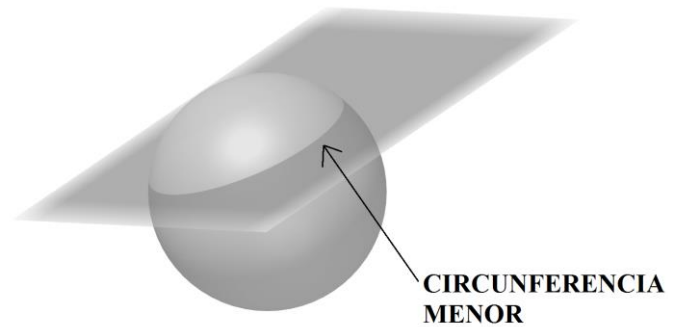


fig. 1.2.2 b

1.2.3. Polos

Se llaman *polos* de una circunferencia máxima a los puntos de la esfera que equidistan de todos los puntos de la circunferencia máxima. También se pueden definir como los extremos del diámetro perpendicular. (Ver la fig. 1.2.3) [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.13]

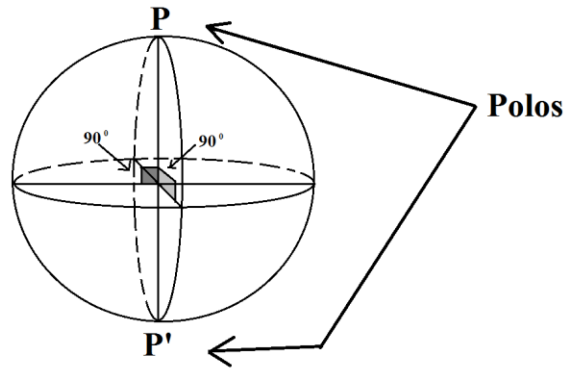


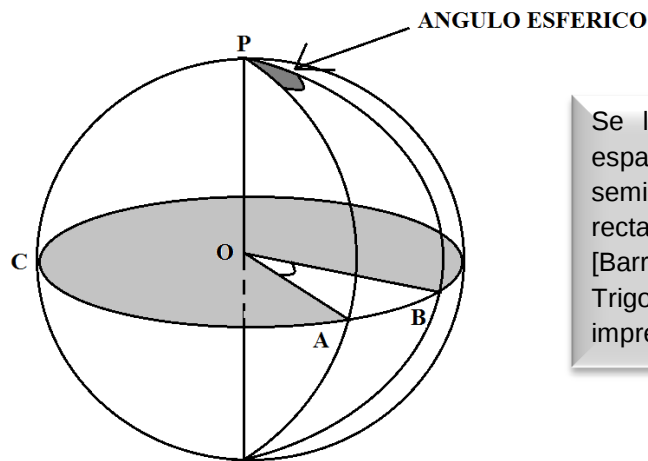
fig. 1.2.3

Se denomina *polos* de una circunferencia máxima, a los extremos del diámetro perpendicular al plano que contiene a dicha circunferencia. (Ver figura 1.2.3) [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.169]

1.2.4. Ángulo o huso esférico.

El ángulo formado en una esfera por dos arcos de circunferencia máxima se denomina *ángulo esférico*. Los arcos de circunferencia máxima son los lados del ángulo esférico, y el punto de intersección de los arcos es el *vértice*. La medida de un ángulo esférico viene dada por el ángulo diedro formado por los planos de las circunferencias máximas cuyos arcos constituyen los lados del ángulo esférico.

En la fig. 1.2.4 a., **APB** es un ángulo esférico de la esfera de centro **O**, y la circunferencia **ABC** es la circunferencia máxima cuyo polo es vértice **P** del ángulo esférico. Como la medida del ángulo diedro* **A-PO-B** corresponde a la medida del ángulo plano **AOB** que, a su vez, tiene por medida la del arco **AB**, sigue que la medida de un ángulo esférico está dada por el arco determinado por los lados sobre la circunferencia máxima cuyo polo es el vértice del ángulo. (Ver la fig. 1.2.4 a.) [Ayres, Frank Jr. (1970) Trigonometría plana y esférica, editora McGraw-Hill, Colombia, p.145]



Se llama **diedro**, a la región del espacio comprendido entre dos semiplanos **a** y **b** limitado por una recta común **AB** (ver fig. 1.2.4 b.) [Barrero Ripol, Manuel (2008) Trigonometría esférica fundamentos, impreso E.T.S.I. p.6]

fig. 1.2.4 a.

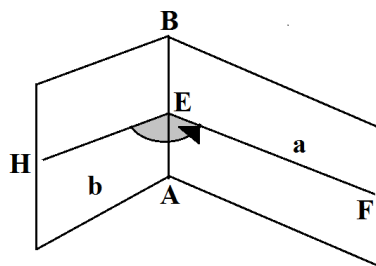


fig. 1.2.4 b.

Se llama **huso esférico**³ a la porción de superficie esférica comprendida entre los lados de un ángulo esférico. (Ver la fig. 1.2.4c)

Se dice que dos circunferencias máximas son *ortogonales*, o perpendiculares, si su ángulo esférico mide 90^0 o, lo que es lo mismo, si sus planos diametrales son ortogonales entre sí.

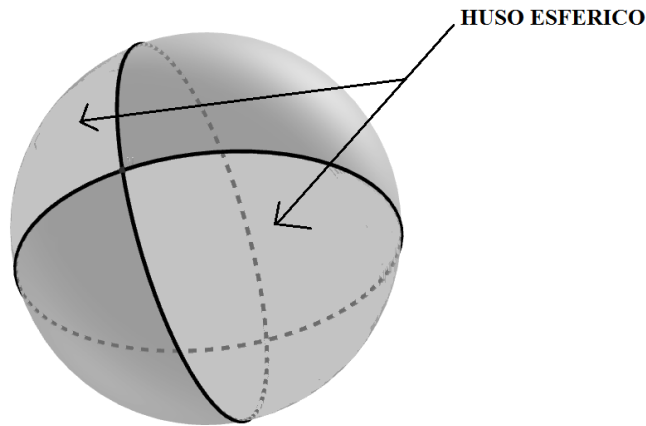


fig. 1.2.4c

1.2.5. Distancia esférica

Dado dos puntos **A** y **B** de una superficie esférica de centro **O**, se llama *distancia esférica* entre ambos al menor de los arcos que determinan en la circunferencia máxima que pasa por ellos; esta circunferencia máxima es la intersección de la superficie esférica y el plano determinado por tres puntos **A**, **B** y **O**. La medida de la distancia **AB** es el ángulo plano **AOB**. (ver fig. 1.2.5a) [Villa Mitja Antoni (1992) Elementos de trigonometría esférica, ediciones UPC, España, p.107]

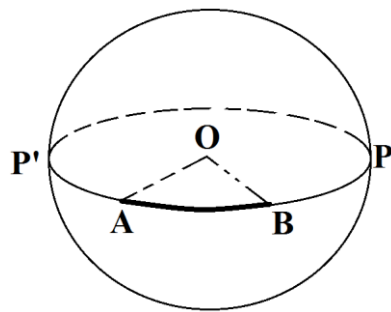


fig. 1.2.5 a

³ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.172

Dado dos puntos **A** y **B** de la esfera, se *denomina distancia esférica*⁴ entre ambos al menor de los arcos de extremos **A** y **B** de la circunferencia máxima obtenida mediante la intersección de la esfera con el plano que contiene al centro de la esfera y a dichos puntos.

Si **A** y **B** son diametralmente opuesto entonces existirán infinita circunferencia máxima que pasan por ellos, tomándose en este caso la semicircunferencia como distancia esférica entre ambos puntos. Por conveniencia, se considera la esfera de radio unidad u consecuentemente, las distancias esféricas son proporcionales a los ángulos centrales que la proyectan, adoptando para su medida la de dicho ángulo

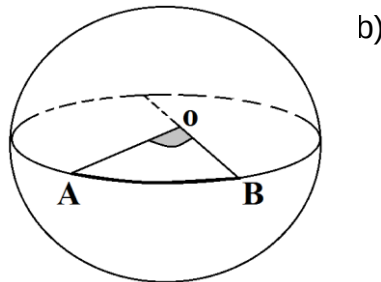


fig. 1.2.5 b

La distancia esférica entre dos puntos **A** y **B** de una superficie esférica es la longitud del menor arco de ciclo comprendido entre los dos puntos **A** y **B**. La medida de la distancia **AB** es la del ángulo plano **AOB**. [Barrero Ripol, Manuel (2008) Trigonometría esférica fundamentos, impreso E.T.S.I. p.8]

Dados dos puntos **A** y **B** de una superficie esférica, se *denomina distancia esférica*⁵ entre ambos a la longitud de arco **AB**. Cuando no hay ambigüedad posible, se denota también **AB**. La distancia esférica **AB** es proporcional a la medida del ángulo central **AOB**. La constante de proporcionalidad es, en radianes, igual al radio de la esfera. **El arco $AB = \text{ángulo } AOB$.**

⁴ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.12

⁵ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.175

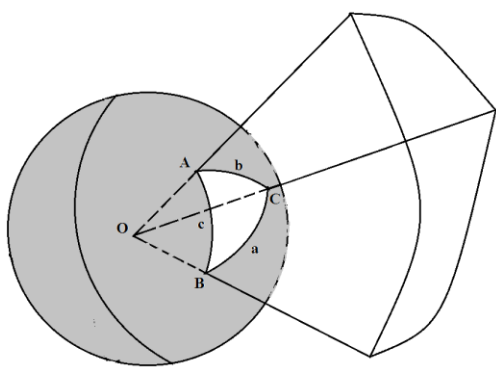
Y, en consecuencia, la distancia esférica se mide en grado o en radianes. Por ejemplo, si **A** y **B** son diametralmente opuesto, su distancia esférica es de **180°**. (ver la fig. 1.2.5 b)

1.2.6. Triangulo esférico.

En el espacio Euclideo de dimensión tres, se considera una superficie esférica de centro **O**. en la esfera, los *triángulos esféricos* están determinado por tres arcos de geodésicas, es decir, por tres arcos de circunferencia de radio y centro de la superficie esférica, cuyas longitudes son proporcionales a sus ángulos centrales **a**, **b**, y **c**. ver figura [Mencia, José (2003) Nociones de trigonometría esférica, Universidad del país vasco-euskal Herriko Unibertistatea, p. 43]

Se denomina *triangulo esférico* a la superficie esférica obtenida mediante la intersección de la esfera y un triedro cuyo vértice es el centro de dicha esfera.

La intersección A, B y C de las aristas del triedro* con la esfera son vértice del triángulo esférico. Puesto que a todo ángulo central le corresponde una distancia esférica sobre la superficie de la esfera y a cada diedro un ángulo esférico, entonces las caras del triedro serán los arcos de circunferencia máxima y a los diedros del triedro les corresponde los ángulos del triángulo esférico. Esto se puede determinar una correspondencia biunívoca entre las caras y los diedros de un triedro y los lados y los ángulos de un triángulo esférico. (Ver fig.1.2.5 a) [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.14]



***Triedros:** Sea R^3 el espacio Euclideo y sea a , b y c , tres semirrectas con un origen en común V . Se denomina triedro a la figura convexa formada por el conjunto de puntos de R^3 que son comunes a los semiespacios limitado por los planos ab , bc y ca que contienen a la semirrecta restante. (ver fig. 1.2.5 b) [Berrocso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, ...]

fig. 1.2.5 a.

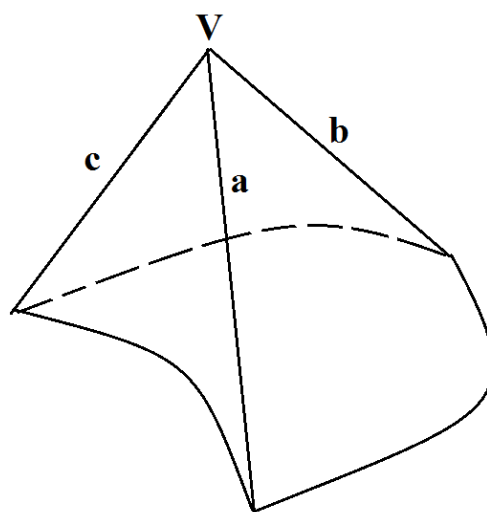


fig. 1.2.5 b.

Triangulo esférico, es la región de la superficie de una esfera limitada por los arcos de tres circunferencias máximas denominadas **triangulo esférico**. los arcos son lo lados del triángulo esférico, y lo vértices de los ángulos esféricos son los vértices del triángulo esférico. Generalmente, los ángulos se dominan A, B, C, y los respectivos lados opuesto a, b, c. (ver la fig.1.2.5 c.) [Ayres, Frank Jr. (1970) Trigonometría plana y esférica, editora McGraw-Hill, Colombia, p.146]

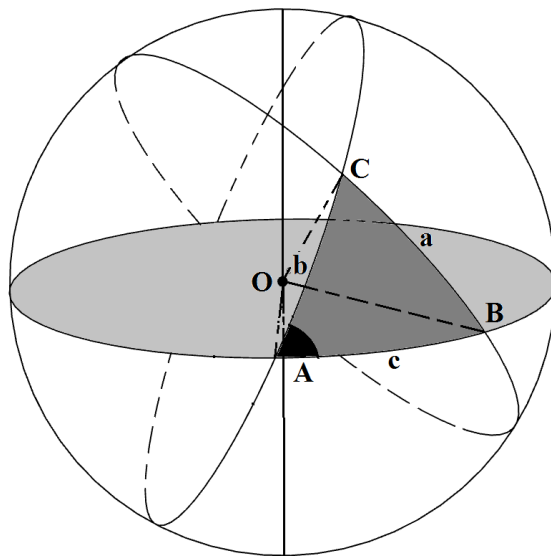


fig. 1.2.5 c.

1.2.7. Área de un polígono esférico⁶.

Se llama polígono esférico a la porción de superficie esférica limitada por una poligonal cerrada, cuyos lados son arcos de circunferencia máxima. (Ver la fig. 1.2.6) El área de un polígono esférico situado sobre la superficie de una esfera de radio r , con n lado y vértices A_1, A_2, A_n , viene dada por:

$$S = \frac{r^2 \pi}{180^\circ} (A_1 + A_2 + \dots + A_n - (n-2) 180^\circ)$$

O bien, expresado los ángulos en radianes,

$$S = r^2 (A'_1 + A'_2 + \dots + A'_n - (n-2) \pi)$$

⁶ Barrero Ripol, Manuel (2008) **Trigonometría esférica fundamentos**, impreso E.T.S.I. p.15

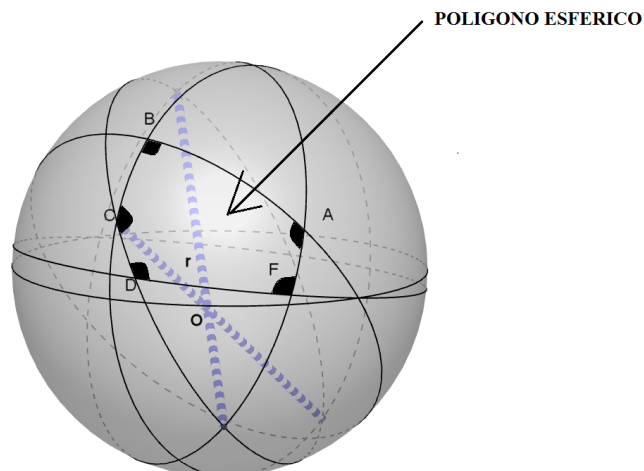


fig. 1.2.6

1.2.8. Área de un triángulo esférico.

El área del triángulo esférico⁷ está determinado por los vértices **A**, **B** y **C**, está dada $r^2(A+B+C-\pi)$.

Si los ángulos se expresan en radian, entonces el área del triángulo esférico es: $S = r^2(A+B+C-\pi)$ siendo **A**, **B** y **C** sus ángulos en radianes. (Ver fig. 1.2.7a) [Barrero Ripol, Manuel (2008) Trigonometría esférica fundamentos, impreso E.T.S.I. p.15]

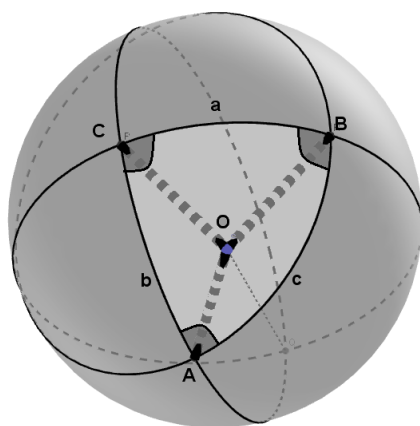
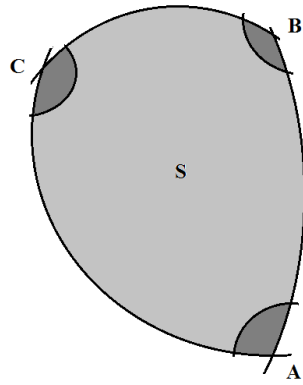


fig. 1.2.7a

⁷ Mencia, José (2003) **Nociones de trigonometría esférica**, Universidad del país vasco-euskal Herriko Unibertistatea, P. 47

Sobre una superficie esférica de radio r , el área S de un triángulo esférico ABC viene dada por: $S = 2\varepsilon r^2$ siendo $\varepsilon = A + B + C - \pi$, donde A , B y C son sus ángulos medidos en radianes. (Ver la fig. 1.2.7b) [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.184]



A fig. 1.2.7b

1.2.9. Área de un huso esférico⁸.

Se define el área de un huso esférico de un grado de amplitud a la 1/360 parte del área total de la superficie esférica ($S = 4\pi r^2$); y, como área de un huso de n grados de amplitud, al producto por n del área del huso esférico de un grado; esto es,

$$A_{\text{huso}(n)} = \frac{\pi r^2 n}{90} = 2r^2 \alpha$$

siendo α la amplitud del huso en radianes y r el radio de la esfera. (Ver fig. 1.2.4 c.)

⁸ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.57

1.2.10. Propiedades de los triángulos esféricos.

Según Manuel Berrocoso, define las *propiedades de los triángulos esféricos*⁹ de la siguiente manera.

Proposición: entre los elementos de todo triángulo esférico se verifican las siguientes propiedades:

- Los lados del triángulo esférico: son menores que una semicircunferencia.
- La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos.
- Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis.
- El menor de los ángulos de un triángulo esférico difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.
- En todo triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo y, recíprocamente, a mayor ángulo se opone mayor lado.

Según Manuel Barrero Ripol, define las propiedades¹⁰ de los triángulos esférico, de la siguiente manera:

- Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que una semicircunferencia **$a < 180^\circ$** .
- Cada lado del triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que el módulo de su diferencia. **$|a - b| < c < a + b$** .
- La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos. **$a + b + c < 360^\circ$** .

⁹ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.15

¹⁰ Barrero Ripol, Manuel (2008) **Trigonometría esférica fundamentos**, impreso E.T.S.I. p.11

Estas propiedades de derivan de las correspondientes propiedades referentes a los ángulos de las caras de un triedro.

- La expresión $360^0 - (a + b + c)$ se llama *defecto esférico*.
- En un triángulo, esférico a mayor lado se opone mayor ángulo. Y recíprocamente. $a > b \Leftrightarrow A > B$.
- En un triángulo esférico, a lados iguales se oponen ángulos iguales. Y recíprocamente. $a = b \Leftrightarrow A = B$.
- La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis rectos. $180^0 < A + B + C < 540^0$.
- La expresión $A + B + C - 180^0$. Se llama exceso esférico y la representamos por ε .

Las propiedades¹¹ de los triángulos esféricos según Ayres, Frank Jr. Están definida así:

- La suma de los dos lados cualquiera es mayor que el tercer lado.
- La suma de los tres lados es menor que 360^0 . (Estos teoremas se derivan de los correspondientes teoremas referentes a los ángulos de las caras de un ángulo triedro.)
- Si dos lados son iguales, los ángulos opuesto son iguales, y recíprocamente.
- Si dos lados son desiguales, los ángulos opuesto son desiguales, y el ángulo mayor se opone al lado mayor, y recíprocamente.
- La suma de los tres ángulos es mayor que 180^0 y menor que 540^0 .
- El exceso esférico ε de un triángulo esférico es el valor del ángulo en que la suma de los ángulos del triángulo esférico excede a 180^0 . Por ejemplo, en el triángulo esférico cuyos ángulos son $A = 65^0$, $B = 75^0$, $C = 112^0$, entonces: $\varepsilon = 65^0 + 75^0 + 112^0 - 180^0 = 72^0$.

¹¹ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.146

Las *propiedades de los triangulo esféricos*¹² según Rodríguez Acros A. son:

- Si dos lados de un triángulo esférico ABC son iguales, también lo son los ángulos opuestos, y recíprocamente. $a = b \Leftrightarrow A = B$, $a = c \Leftrightarrow A = C$, $b = c \Leftrightarrow B = C$. (Dicho triángulos se llama isósceles).
- En un triángulo esférico ABC , a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente. $a < b \Leftrightarrow A < B$.
- En un triángulo esférico ABC , cada lado es menor que la suma de los dos lados restante y mayor que su diferencia. $|b - c| < a < b + c$, $|a - c| < b < a + c$, $|a - b| < c < a + b$.
- En un triángulo esférico ABC , la suma de los lados es menor que cuatro rectos. $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$.
- En un triángulo esférico ABC , la suma de los ángulos es mayor que dos rectos y menor que seis. $180^\circ < A + B + C < 540^\circ$.
- En un triángulo esférico ABC , cada ángulo aumentado en dos rectos es mayor que la suma de los otros dos ángulos. $A + 180^\circ > B + C$; $B + 180^\circ > A + C$; $C + 180^\circ > A + B$.
- En un triángulo esférico ABC , la suma de los lados y la suma de sus ángulos opuesto guardan la misma relación con respecto a dos rectos.
 $a + b > 180^\circ \Leftrightarrow A + B > 180^\circ$
 $a + b = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ$
 $a + b < 180^\circ \Leftrightarrow A + B < 180^\circ$

¹² Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.177-178

1.2.11. Clasificación de los triangulo esféricos¹³.

- Un triángulo esférico se denomina isósceles si tiene dos lados iguales y equilátero si tiene iguales los tres lados.
- Se denomina rectángulo si tiene un ángulo recto, birrectángulo si tiene dos, en cuyo caso también tiene recto los lados opuestos.
- Trirectangulo u octante si tiene los tres ángulos rectos siendo, por tanto, sus lados tres cuadrantes de circunferencia máxima.

1.2.12. Exceso esférico según los lados¹⁴.

Según la fórmula de *L' Huilier*, si **a**, **b** y **c** los lados de un triángulo esférico y **p** el semiperimetro. Entonces, el exceso esférico viene definido por:

$$\tan^2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \tan\left(\frac{p}{2}\right)\tan\left(\frac{p-a}{2}\right)\tan\left(\frac{p-b}{2}\right)\tan\left(\frac{p-c}{2}\right), \text{ donde } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Si en un triángulo esférico se conocen dos lados, **b** y **c**, y el ángulo comprendido **A**, el exceso esférico de dicho triangulo viene dado por:

$$\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{b}{2}\right)\tan\left(\frac{c}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c-\varphi}{2}\right)}, \text{ donde } \varphi = 2\arctan\left(\tan\left(\frac{b}{2}\right)\cos A\right).$$

¹³ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.15

¹⁴ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.59

1.2.13. Incentro¹⁵.

El punto **I**, denominado Incentro, es el centro de la circunferencia inscrita en un triángulo esférico y se obtiene como la intersección de los arcos de circunferencia máxima que son bisectrices de los ángulos del triángulo esférico.

Sea ABC un triángulo esférico entonces, la circunferencia inscrita en el triángulo esférico viene dado en función de los lados de dichos triángulos por:

$$\tan r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}} \quad \text{siendo } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Y según los ángulos:

$$\tan r = \frac{\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{2 \cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)} \quad \text{siendo } S = \frac{A+B+C}{2}$$

(ver la fig. 1.2.11)

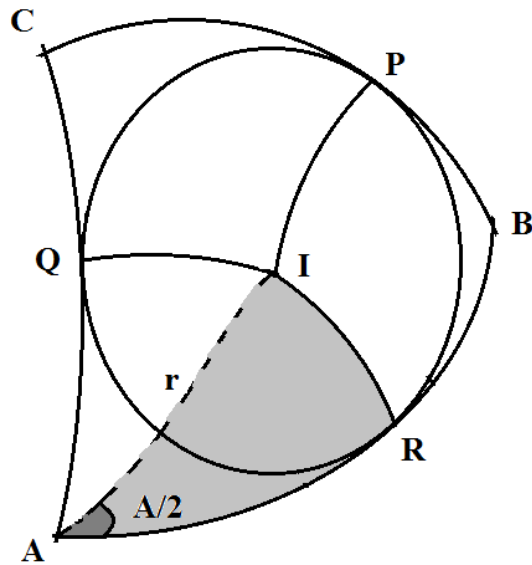


Fig. 1.2.11

¹⁵ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.62

1.2.14. Circuncentro¹⁶.

El punto **O**, denominado Circuncentro, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo esférico **ABC** y se obtiene como intersección de los arcos de circunferencia máxima perpendiculares a los lados del triángulo esférico y pasa por el punto medio de cada uno de sus lados.

Proposición:

Sea **ABC** un triángulo esférico entonces, la circunferencia circunscrita al triángulo esférico viene dado en función de los ángulos de dicho triángulo esférico por:

$$\tan R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}} \quad \text{Siendo } S = \frac{A+B+C}{2}$$

Y según sus lados

$$\tan R = \frac{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2}\right)\sin\left(\frac{c}{2}\right)}{\sqrt{\sin(p)\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}} \quad \text{siendo } p = \frac{a+b+c}{2}$$

(Ver fig. 1.2.12)

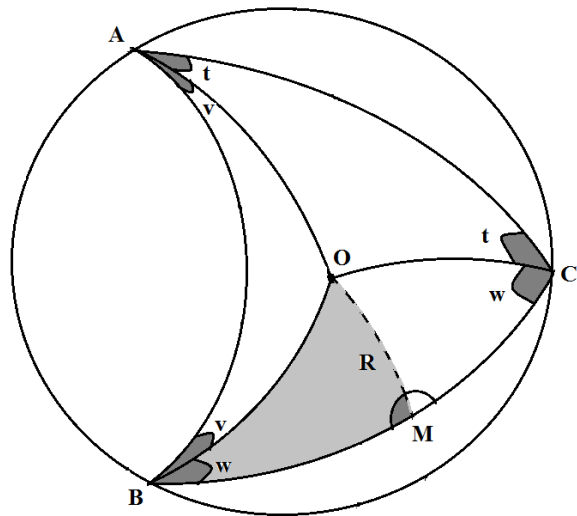


fig. 1.2.12

¹⁶ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.63

1.2.15. Triángulo esférico polar.

Según Ayres, Frank¹⁷ Jr.: sean A, B, y C los vértices de un triángulo esférico, entonces trácense las tres circunferencias máximas cuyos polos son los tres vértices dados. Siendo A'' la intersección de las circunferencias máximas cuyo polo son B y C, y que se encuentran, respecto de BC, al mismo lado que A; B' la intersección de las circunferencias máximas cuyo polo son C y A y que se encuentran, respecto de CA, al mismo lado que B; C la intersección de las circunferencias máximas cuyos polos son A y B y que se encuentran, respecto de AB, al mismo lado que C. Po lo que el triángulo esférico A'B'C' es el triángulo polar de ABC. Sus lados polares son a', b' c'. (ver la fig.1.2.15 a.)

Los teoremas fundamentales referentes a los triángulos polares son:

- Si A'B'C' es un triángulo polar de ABC, entonces ABC es el triángulo polar de A'B'C'.
- Dado un triángulo y su triangulo polar, cada ángulo de cualquiera de los triángulos dados es igual al suplemento de lado correspondiente del otro triangulo; así:

$$A = 180^\circ - a' \quad B = 180^\circ - b' \quad C = 180^\circ - c'$$

$$A' = 180^\circ - a \quad B' = 180^\circ - b \quad C' = 180^\circ - c$$

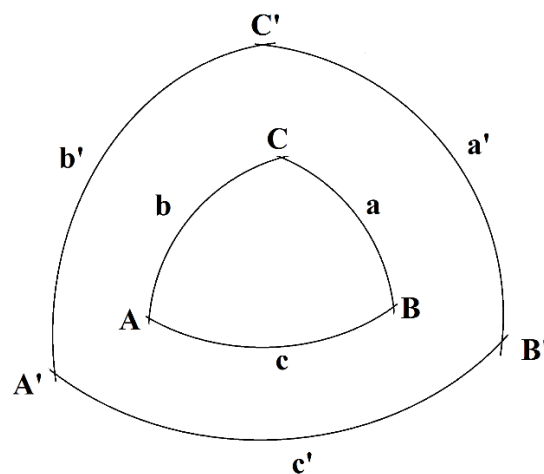


fig. 1.2.15 a.

¹⁷ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.146

Según *Villa Mitja Antoni*¹⁸, él explica de la siguiente manera:

El vértice A' es polo del círculo máximo OBC, perteneciente al mismo hemisferio que el vértice A del triángulo inicial ABC; análogamente, B' es el polo del círculo máximo OAC que pertenece al mismo hemisferio que B, y C' es polo del círculo máximo que está en el mismo hemisferio que C. (ver fig. 1.2.15 b.)

Observemos que, si el triángulo inicial hubiese sido el A'B'C', su triángulo polar hubiese resultado ser precisamente ABC; en efecto, los vértices A, B, C, son polos, respectivamente, de los círculos máximo OB'C', OA'C' y OB'A', como se deduce del siguiente esquema.

$$\left. \begin{array}{l} OA' \perp \begin{Bmatrix} OB \\ OC \end{Bmatrix} \\ OB' \perp \begin{Bmatrix} OA \\ OC \end{Bmatrix} \\ OC' \perp \begin{Bmatrix} OA \\ OB \end{Bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} OA \perp \begin{Bmatrix} OB' \\ OC' \end{Bmatrix} \\ OB \perp \begin{Bmatrix} OA' \\ OC' \end{Bmatrix} \\ OC \perp \begin{Bmatrix} OA' \\ OB' \end{Bmatrix} \end{array} \right.$$

Por consiguiente, podemos decir que los triángulos esféricos ABC y A'B'C' son polares entre sí; cada uno es polar del otro. Los triángulos esféricos poseen una relación muy especial, que consiste en que: Cada ángulo de un triángulo esférico es suplementario de un lado de su triángulo polar.

¹⁸ Villa Mitja Antoni (1992) Elementos de trigonometría esférica, ediciones UPC, España, p.45-46

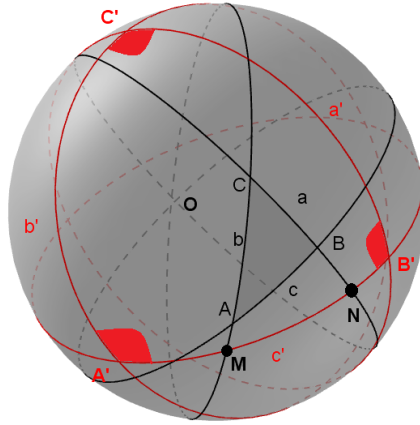


fig. 1.2.15 b.

Si $A'M = 90^0$, $B'N = 90^0$; $A'M + B'N = 180^0$.

$$A'M + B'N = A'B' + MN = A'B' + \angle C$$

$$A'B' + \angle C = 180^0$$

Análogamente,

$$B'C' + \angle A = A'C' + \angle B = 180^0.$$

Por otra parte, la propiedad simétrica de la relación binaria de los “triángulos polares” justifica relaciones análogas entre los lados del triángulo ABC y los ángulos de su triángulo polar A'B'C':

$$AB + \angle C' = AC + \angle B' = BC + \angle A' = 180^0.$$

Puesto que $BC = a$ entonces, $a + A' = 180^0$ se forma similar se deducen las demás.

1.3. TRIANGULO ESFERICO OBLICUANGULO.

Es un triángulo esférico tal que ninguno de sus ángulos es recto. (ver fig. 1.3) Un triángulo esférico oblicuángulo queda determinado cuando se conocen tres cualesquiera de sus elementos, excepto en los casos posibles de ambigüedad.

Hay que considerar seis casos¹⁹:

- I. Dados los tres lados.
- II. Dados los tres ángulos.
- III. Dados dos lados y el ángulo comprendido.
- IV. Dados un lado y los dos ángulos adyacentes.
- V. Dados dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
- VI. Dados dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos.

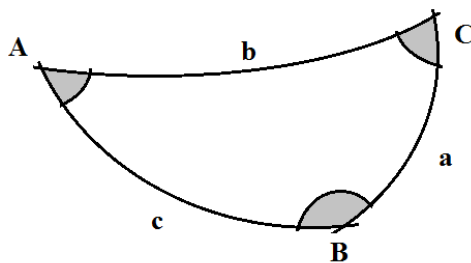


fig. 1.3

Los cuatro primeros casos tienen una única solución y se pueden resolver de forma directa. Esto significa que cada una de las tres incógnitas se puede obtener a partir de los tres datos, sin necesidad de que haya que calcular primero una de las incógnitas para hallar las otras dos. Por el contrario, en los dos últimos casos es posible que no haya solución y, de haberla, pueden existir una o dos soluciones. [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.226]

¹⁹ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.164

1.3.1. Ley de los senos²⁰.

Lo senos de los lados de un triángulo esférico, son proporcionales a los senos de los ángulos opuesto, siendo los ángulos A, B, C y los lados a, b, y c.

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

Esta relación permite calcular un lado o un ángulo, conocido su ángulo o lado opuesto, y otro par de elementos opuestos.

1.3.1.1. La altura esférica.

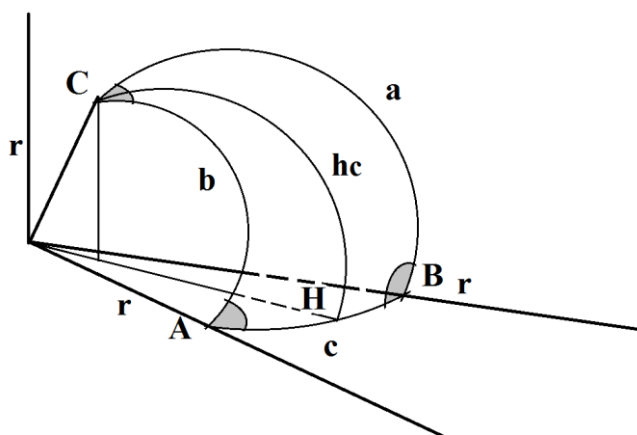


fig. 1.3.1.1

Dado que h_c es la altura esférica sobre el lado c es: $h_c = r \text{ sen } a \text{ sen } B$, entonces para los demás lados es $h_b = r \text{ sen } c \text{ sen } A$; $h_a = r \text{ sen } b \text{ sen } C$ donde r es el radio de la esfera. [Barrero Ripol, Manuel (2008) Trigonometría esférica fundamentos, impreso E.T.S.I. p.19]

²⁰ Barrero Ripol, Manuel (2008) **Trigonometría esférica fundamentos**, impreso E.T.S.I. p.20

1.3.2. Ley de los cosenos²¹.

En un triángulo esférico, el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de sus senos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido. Siendo los ángulos A, B, C y los lados a, b, c.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Según los ángulos, es:

El coseno de un ángulo es igual al producto de los senos de los otros dos ángulos por el coseno del lado opuesto, menos el producto de los cosenos de dichos ángulos. Siendo los ángulos A, B, C, y los lados a, b, c.

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C$$

$$\cos B = \sin C \sin A \cos b - \cos C \cos A$$

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B$$

1.3.3. Ley de la relación cotangente-seno²².

Dado dos lados, el ángulo comprendido y el ángulo opuesto a uno de ellos, se verifica que:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A$$

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A$$

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B$$

$$\cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B$$

$$\cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C$$

$$\cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C$$

Siendo los ángulos A, B, C y los lados a, b, c.

²¹ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.21

²² Barrero Ripol, Manuel (2008) **Trigonometría esférica fundamentos**, impreso E.T.S.I. p.20

1.3.4. Funciones del ángulo mitad²³.

Estas fórmulas permiten calcular los ángulos de un triángulo esférico, conocido los tres lados o bien el semiperímetro y los dos lados.

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\tan r}{\operatorname{sen}(s-a)} \quad , \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{\tan r}{\operatorname{sen}(s-b)} \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{\tan r}{\operatorname{sen}(s-c)} \quad \text{donde}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{y} \quad \tan r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} s}}$$

1.3.5. Funciones para el Semi-lado²³.

$$\cot \frac{a}{2} = \frac{\tan R}{\cos(S-A)} \quad \cot \frac{b}{2} = \frac{\tan R}{\cos(S-B)} \quad \cot \frac{c}{2} = \frac{\tan R}{\cos(S-C)} \quad \text{donde}$$

$$S = \frac{A+B+C}{2} \quad \text{y} \quad \tan R = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}$$

1.3.6. Analogías de Gauss o D'Lambre.²⁴

En las analogías intervienen todos los elementos de un triángulo esférico ABC, ellas establecen equivalencias muy útiles entre relaciones con pares de lados del triángulo y relaciones análogas entre los ángulos opuestos. Estas son:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)} \quad \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}$$

$$\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{c}{2}\right)} \quad \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}$$

²³ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.165

²⁴ Villa Mitja Antoni (1992) **Elementos de trigonometría esférica**, ediciones UPC, España, p.64

1.3.7. Analogías de Neper²⁵ en un triángulo esférico ABC.

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cot\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)} \qquad \frac{\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\tan\left(\frac{c}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cot\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \qquad \frac{\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\tan\left(\frac{c}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Nota biográfica:

Karl Friedrich **Gauss** (Brunswick, 1777 – Gottingen, 1855).

Jean Baptiste Joseph **Dalambre** (Amiens, 1749 – Paris, 1822).

John **Napier** (Neper o Nepero) (Edimburgo, 1550 – Edimburgo, 1617).

²⁵ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.165

1.4. TRIANGULO ESFERICO OBLICUANGULO²⁶ (SOLUCIONES ALTERNAS).

Las *soluciones alternas* que se estudiarán a continuación requieren el uso de una función adicional, llamada *semisenoverso*, y la división de un triángulo esférico oblicuángulo en dos triángulos esféricos rectángulos.

Una desventaja del uso del *semisenoverso* es que, además de las tablas corrientes de las funciones trigonométricas, se necesitara tablas de los valores naturales de la función *semisenoverso* y de sus correspondientes logaritmos. Una ventaja es, sin embargo, que resulta imposible caer en el error de situar un ángulo o un lado en un cuadrante incorrecto puesto que solamente existe un ángulo positivo menor 180^0 que tenga un *semisenoverso* dado.

1.4.1.1. La función *semisenoverso*²⁴.

El *semisenoverso* de un ángulo θ , (**ssv** θ), se define mediante la relación

$$\text{ssv } \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

La función *semisenoverso* se aplica directamente en la solución de los casos I y III, y en la solución del triángulo polar asociado de los casos II y IV. Para ello se necesitan las siguientes formulas:

$$\begin{aligned} \text{ssv } A &= \text{sen}(s-b)\text{sen}(s-c)\csc b \csc c \\ \text{ssv } B &= \text{sen}(s-c)\text{sen}(s-a)\csc c \csc a \\ \text{ssv } C &= \text{sen}(s-a)\text{sen}(s-b)\csc a \csc b \end{aligned} \quad \text{donde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

para los lados

$$\begin{aligned} \text{ssv } a &= \text{ssv}(b-c)\text{sen } b \text{ sen } c \text{ ssv } A \\ \text{ssv } b &= \text{ssv}(c-a)\text{sen } c \text{ sen } a \text{ ssv } B \\ \text{ssv } c &= \text{ssv}(a-b)\text{sen } a \text{ sen } b \text{ ssv } C \end{aligned}$$

²⁶ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.176

1.4.2. METODO DEL ANGULO AUXILIAR.²⁷

En los casos *I*, *II*, *III* y *IV* de resolución de triángulo oblicuángulo, se puede calcular cada una de las incógnitas mediante cálculo directo o independiente, es decir, utilizando solo los datos. Sin embargo, en los casos *V* y *VI* esto no es posible, puesto que se necesita calcular primero, o bien un ángulo (en el caso *V*), o bien un lado (en el caso *VI*), por la fórmula de los senos y, utilizando este resultado, se calculan las otras incógnitas.

No obstante, en estos dos últimos casos se pueden hallar los elementos desconocido mediante cálculo “*independiente*”, según denominación tradicional. Para ello es necesario introducir y calcular previamente un **ángulo auxiliar**, de ahí que la “*independencia*” no sea tal, puesto que también se requiere un cálculo intermedio.

Entonces ¿Cuál es el verdadero interés de este método? La respuesta es por razones históricas. En década pasadas, en la bibliografía tradicional este método tenía su importancia, puesto que transforma las fórmulas de Bessel a utilizar en otras en que las funciones trigonométricas que contienen las incógnitas se igualen a productos y cocientes de funciones trigonométricas evaluadas en los datos, situación apropiada para el cálculo mediante logaritmos (una herramienta muy utilizada en aquella época).

En la actualidad, con las herramientas de cálculo existentes, este método ya no es necesario. No obstante, por su valor tradicional y su carácter formativo, así como por su relación con el método del perpendicular, se expondrá a continuación. [Berrocó, Manuel (2003) Notas y apuntes de

²⁷ Villa Mitja Antoni (1992) Elementos de trigonometría esférica ediciones UPC, España, p.73-83.

trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.250]

Para poder calcular los elementos desconocido mediante calculo independiente, se necesitará utilizar en algunos casos un ángulo auxiliar, función de los datos iniciales. Ello ocurrirá, por ejemplo, si los datos son:

- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

1.4.2.1. Primer caso.

- Datos: **lados a, b y ángulo A.** incógnita: **lado c.**

Introducimos el ángulo auxiliar **x** definido por:

$$\tan x = \tan b \cos A : 0^\circ < x < 180^\circ \quad \text{Donde} \quad \cos(c-x) = \frac{\cos a \cos x}{\cos b}$$

De este modo pueden obtenerse dos posibles soluciones para el lado:

$$\mathbf{c - x:} \quad c-x = \pm y, \text{ es decir } c_1 = x+y \quad \text{y} \quad c_2 = x-y$$

- Datos: **lados a, b y ángulo A.** incógnita: **ángulo C.**

Introducimos el ángulo auxiliar **z** definido por:

$$\tan z = \frac{\cot A}{\cos b} ; 0^\circ < z < 180^\circ \quad \text{Donde} \quad \cos(C-z) = \cot a \tan b \cos z$$

De este modo pueden obtenerse dos posibles soluciones para el ángulo

$$C-z = \pm t, \text{ es decir } C_1 = z+t \quad \text{y} \quad C_2 = z-t$$

1.4.2.2. Segundo caso.

- Datos: **ángulos A, B**; **lado a** para incógnita; **ángulo C**.

Sea m el ángulo único definido por:

$$\cot m = \tan B \cos a ; 0^\circ < m < 180^\circ \quad \text{Donde} \quad \sin(C - m) = \frac{\cos A \sin m}{\cos B},$$

el cual existe con dos soluciones.

- Datos: **ángulos A, B** y **lado a** para incógnita: **lado c**.

Sea n el ángulo único definido por:

$$\cot n = \frac{\cot a}{\cos B} ; 0^\circ < n < 180^\circ \quad \text{Donde} \quad \sin(c - n) = \tan B \cot A \sin n ,$$

el cual existe con dos soluciones.

1.5. METODO DE LA ECUACION DE 2DO GRADO²⁸.

La ambigüedad existente a la hora de resolver triángulo esféricos *conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos*, nos conduce el estudio de métodos que faciliten la determinación de la existencia y unicidad de soluciones. Entre estos métodos cabe destacar *el método de la ecuación de segundo grado*, que es una condición necesaria, aunque no suficiente, de existencia y unicidad.

$$\text{Donde } \sin^2(c) - \left(\frac{2 \cos(a) \sin(b) \cos(A)}{1 - \sin^2(b) \sin^2(A)} \right) \sin(c) + \left(\frac{\sin(a+b) \sin(b-a)}{1 - \sin^2(b) \sin^2(A)} \right) = 0 \text{ es}$$

una ecuación de la forma $Px^2 + Qx + R = 0$. Para que las raíces sean reales es preciso que $Q^2 - 4PR \geq 0$. Entonces la solución viene dada por:

$$\sin(c) = \frac{-\left(\frac{-2 \cos(a) \sin(b) \cos(A)}{1 - \sin^2(b) \sin^2(A)} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{-2 \cos(a) \sin(b) \cos(A)}{1 - \sin^2(b) \sin^2(A)} \right)^2 - 4 \left(\frac{\sin(a+b) \sin(b-a)}{1 - \sin^2(b) \sin^2(A)} \right)}}{2}$$

Para que el problema tenga dos soluciones reales, $x = \sin c > 0$, es preciso que las dos raíces sean positiva, y por tanto $\frac{R}{P} > 0$. Esto implica que debe

cumplirse que, $x_1 + x_2 = -\frac{Q}{P}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{R}{P}$. Dado que la condición necesaria

para que el problema tenga dos soluciones será: $180^\circ \leq a+b \leq 360^\circ \rightarrow b < a$

o $0^\circ \leq a+b \leq 180^\circ \rightarrow b > a$. Fuera de estos casos no tendrá solución o tendrá una sola solución; bien porque las dos raíces de la ecuación sean complejas; bien por que obtenemos dos valores, siendo uno incompatible con los datos del problema.

La existencia y unicidad de soluciones de este problema depende de la resolución de ambigüedad con que ha sido calculado el ángulo B. para ello se aplicarían las condiciones de existencia y propiedad de los triángulos esféricos.

²⁸ Berrocoso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.47

1.6. RESOLUCION DE TRIANGULO ESFERICO.

1.6.1. Triangulo esférico rectángulo.²⁹

En este caso, las formulas anteriores se simplifican notablemente. Si, por ejemplo, el **ángulo A** es el recto, las formulas simplificada son las siguientes:

- Primer grupo.

$$\cos a = \cos b \cos c$$

- Segundo grupo.

$$\frac{\sin a}{\sin B} = \frac{\sin b}{\sin C} \rightarrow \sin b = \sin a \sin B$$

$$\frac{\sin a}{\sin C} = \frac{\sin c}{\sin B} \rightarrow \sin c = \sin a \sin C$$

- Tercer grupo.

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B \rightarrow \cos B = \cot a \tan c$$

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C \rightarrow \cos C = \cot a \tan b$$

$$\cot b \sin c = \cot B \rightarrow \sin c = \tan b \cot B$$

$$\cot c \sin b = \cot C \rightarrow \sin b = \tan c \cot C$$

- Cuarto grupo.

$$\cos a = \cot B \cot C$$

- Análogamente.

$$\cos B = \sin C \cos b$$

$$\cos C = \sin B \cos c$$

²⁹ Villa Mitja Antoni (1992) Elementos de trigonometría esférica ediciones UPC, España, p.85-86.

1.6.1.1. Propiedades fundamentales de los triángulos esféricos rectángulos.

Las propiedades³⁰ según Barrero Ripol, Manuel son:

- En todo triángulo esférico rectángulo, un cateto y su ángulo opuesto son ambos agudos o ambos obtusos.
- En todo triángulo esférico rectángulo, o los tres lados son menores de 90^0 , uno tan solo de ellos cumple con esa condición.
- En todo triángulo esférico rectángulo, la hipotenusa es menor o mayor que 90^0 , según que los dos catetos sean de la misma o de distinta especie, respectivamente.

Las propiedades³¹ según Villa Mitja Antoni

- La *hipotenusa* de un triángulo esférico rectángulo no puede medir 90^0
- Lo *catetos* de un triángulo esférico rectángulo no pueden medir 90^0 .
- El número de lados de un triángulo esférico rectángulo que pertenecen al primer cuadrante es siempre impar (1 o 3).
- El seno de un cateto es menor que el seno de la hipotenusa.
- Cada cateto pertenece al mismo cuadrante que su ángulo opuesto.
- Si un cateto pertenece al primer cuadrante, es menor que su ángulo opuesto; en cambio, si pertenece al segundo cuadrante, es mayor que dicho ángulo opuesto.
- Lo ángulos B y C de un triángulo esférico rectángulo en A, verifican las desigualdades siguientes: $90^0 < B + C < 270^0$; $B - C < 90^0$.

³⁰ Barrero Ripol, Manuel (2008) **Trigonometría esférica fundamentos**, impreso E.T.S.I. p.36

³¹ Villa Mitja Antoni (1992) **Elementos de trigonometría esférica**, ediciones UPC, España, p.87

1.6.1.2. Leyes de los cuadrantes.

Si en un triángulo esférico rectángulo se conocen los elementos **A** y **c**, el valor de **sen c** viene dado por la formula, **sen a = sen A sen c**. Sin embargo, para determinar si **a** es menor o mayor que **90°** se necesita una información adicional. Esta información se obtiene de la ley de los cuadrantes³²:

- El lado **a** y el ángulo **A** (lo mismo que el lado **b** y el ángulo **B**) pertenecen al mismo cuadrante.
- Su **c < 90°**, entonces los lados **a** y **b** (lo mismo que los ángulos **A** y **B**) pertenecen al mismo cuadrante; si **c > 90°**, entonces los lados **a** y **b** (lo mismo que los ángulos **A** y **B**) pertenecen a cuadrantes diferentes.

Dado un triángulo esférico **ABC** rectángulo, es un solo ángulo recto **C**, se verifican³³:

- Cada cateto pertenece al mismo cuadrante que su ángulo opuesto.
a < 90° a < 90° o bien **a > 90° a > 90°** (de igual modo para **b** y **B**).
- Un cateto es menor que su ángulo opuesto si ambos son menores que **90°** y mayor en caso contrario. **0° < a < A < 90°**, o bien **90° < A < a < 180°**, (de igual forma para **b** y **B**).
- Si la hipotenusa es aguda, los dos catetos pertenecen al mismo cuadrante (y, por tanto, los dos ángulos opuesto también)
 $c < 90^\circ \Rightarrow (a < 90^\circ, b < 90^\circ \vee a > 90^\circ, b > 90^\circ)$
- Si, por el contrario, la hipotenusa es obtusa, los dos catetos pertenecen a distintos cuadrantes (y, por tanto, los dos ángulos opuesto también)
 $c > 90^\circ \Rightarrow (a < 90^\circ, b > 90^\circ \vee a > 90^\circ, b < 90^\circ)$
- La hipotenusa está comprendida entre cada cateto y su suplementario,
a < c < 180° - a, o bien **180° - a < c < a**, (del mismo modo para **b**).

³² Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.176

³³ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.210

- Los tres lados pertenecen al primer cuadrante o bien solo uno pertenece al primer cuadrante y los otros dos al segundo. Esto es, puede darse una de los cuatro posibilidades siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \ c < 90^0, a < 90^0, b < 90^0, \\ (2) \ c > 90^0, a < 90^0, b > 90^0, \\ (3) \ c > 90^0, a > 90^0, b < 90^0, \\ (4) \ c < 90^0, a > 90^0, b > 90^0. \end{array} \right.$$

1.6.1.3. Reglas del pentágono de Neper³⁴.

Cualquiera de las diez formulas anteriores puede obtenerse mediante una sencilla regla mnemotécnica, conocida como regla del pentágono. Se basa en el siguiente esquema, en el que se han situado los lados y los ángulos del triángulo rectángulo, distinto del ángulo recto, A:

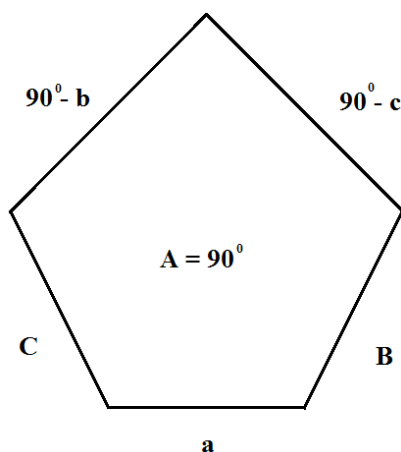


fig. 1.7.1.3

El enunciado de la regla es:

- El coseno de un elemento cualquiera del pentágono es igual al producto de los *senos* de los elementos *opuestos*.
- El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de las *cotangentes* de los elementos *adyacentes*.

³⁴ Villa Mitja Antoni (1992) Elementos de trigonometría esférica ediciones UPC, España, p.86

1.6.2. Resolución de triángulo esférico rectilatero³⁵.

Para resolver un triángulo esférico rectilatero bastara tener en cuenta que su triángulo polar es un triángulo rectángulo. Este triángulo se resuelve utilizando los casos expuestos (relacionado al **tema 1.2.14 triángulo polar**) y, conocidos los elementos del polar, no hay más que tomar los ángulos suplementario, cambiando las denominaciones de los lados por los ángulos y viceversa.

Al igual que en el pentágono de Neper, es la regla mnemotécnica utilizada con mayor asiduidad en la resolución de triángulo esférico rectilatero.

Las diferencias principales con el caso radican en los elementos a situar en los vértices de dicho pentágono como en el orden en que restos han de situarse. Así:

$$180^0 - A, \quad 180^0 - b, \quad C - 90^0, \quad B - 90^0, \quad 180^0 - c$$

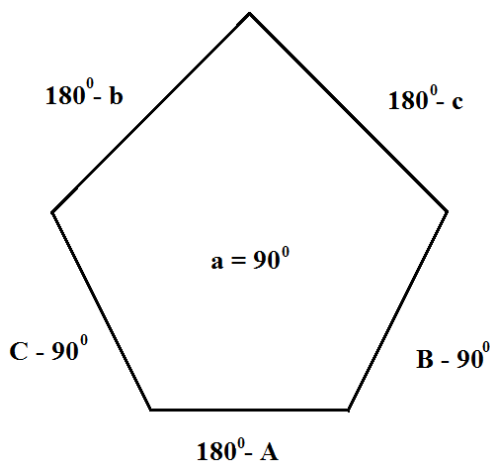


fig. 1.7.2 a

Las reglas que se aplican en este pentágono son las misma que en el caso anterior; esto es:

- El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de los senos de los elementos opuesto.
- El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes.

³⁵ Berrocso, Manuel (2003) **Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición**, universidad de Cádiz, Colombia, p.37

La resolución de los triángulos esféricos rectiláteros dependerá de los elementos conocidos y los elementos a calcular. Así, podemos distinguir en función de los elementos conocidos, los siguientes casos:

- **El ángulo opuesto al lado recto y un ángulo adyacente a dicho lado.**
- **Los dos ángulos adyacentes al lado recto.**
- **El ángulo opuesto al lado recto y un lado oblicuo.**
- **Un ángulo adyacente al lado recto y el lado oblicuo recto y el lado oblicuo opuesto a dicho ángulo.** Este último caso es el único que admite dos posibles soluciones.

Un triángulo esférico es rectilátero si uno de sus lados es un cuadrante ($a = 90^\circ$). Las formulas anteriores (triángulos esféricos oblicuángulo) no permiten resolver los triángulos rectiláteros. También se pueden resolver reduciéndolo al caso de triángulos rectángulos, pues si $a = 90^\circ$, su triángulo A_p, B_p, C_p es rectángulo en A_p . Resuelto el polar, se determina el triángulo dado hallando los suplementos de los ángulos y lados de A_p, B_p, C_p . [Barrero Ripol, Manuel (2008) Trigonometría esférica fundamentos, impreso E.T.S.I. p.39]

Un *triángulo esférico cuadrantal*, es un triángulo esférico tal que uno de sus lados es igual a 90° . Se resuelve mediante su triángulo polar (un triángulo esférico rectángulo). [Ayres, Frank Jr. (1970) Trigonometría plana y esférica, editora McGraw-Hill, Colombia, p.154]

Teniendo en cuenta que los triángulos rectiláteros son los polares de los rectángulos y viceversa. Entonces se puede situar en cada lado del pentágono los elementos en el siguiente orden: $a, 180^\circ - C, b, 90^\circ - A, 90^\circ - B$. y enunciar las reglas del pentágono de Neper ya conocidas. (ver la fig.1.7.2b) [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.212]

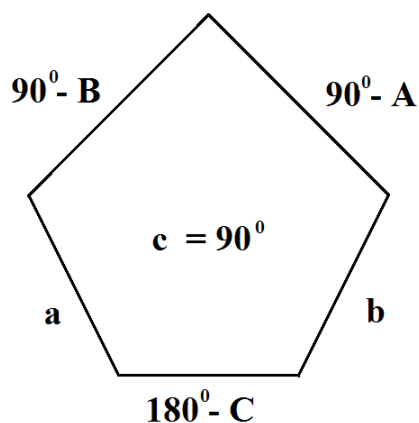


fig. 1.7.2 b

1.6.3. Propiedades particulares de los triángulos esféricos birrectángulos y trirectángulo³⁶.

Todo triángulo esférico birrectángulo es también birrectilatero, y viceversa. Además, el lado y ángulo restantes miden lo mismo. Además, se establece que todo triángulo trirectángulo también es trirrectilatero y viceversa.

1.6.4. Descomposición en triángulo esférico rectángulo (Método del perpendicular)

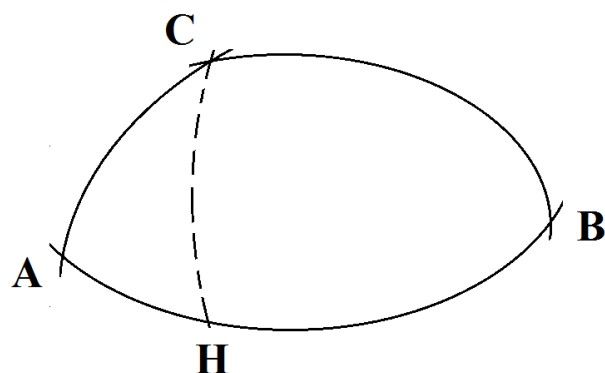


fig. 1.7.4

El arco de circunferencia máxima **CH** es una *altura esférica* o *perpendicular* del triángulo esférico **ABC**.

³⁶ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.213

Descomponiendo un triángulo esférico cualquiera en dos triángulos rectángulos mediante un perpendicular adecuado, puede resolverse el primer triángulo resolviendo sucesivamente los dos triángulos esféricos rectángulos

1.6.4.1. Datos iniciales del triángulo esférico rectángulo 1 (AHC)³⁷

Consideramos los dos triángulos rectángulos que determina el perpendicular **CH**. Del triángulo **CHA** se conoce la hipotenusa **b** y un ángulo **A**.

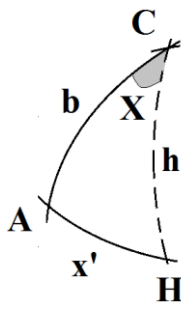


fig. 1.7.4.1 a

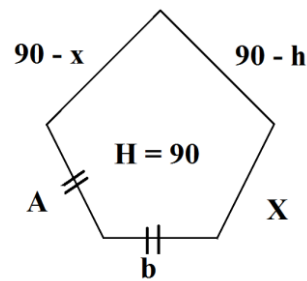


fig. 1.7.4.1 b

Se aplica las reglas del pentágono, para obtener la solución de los elementos del triángulo esférico rectángulo.

1.6.4.2. Datos iniciales del triángulo esférico rectángulo 2 (CHB)³⁸

Dado que resulta la solución para los catetos **x'** y **h**, entonces

$$HB = c = x' + y' \text{ por tanto, } y = c - x.$$

³⁷ Villa Mitja Antoni (1992) **Elementos de trigonometría esférica**, ediciones UPC, España, p.93

³⁸ Villa Mitja Antoni (1992) **Elementos de trigonometría esférica**, ediciones UPC, España, p.93

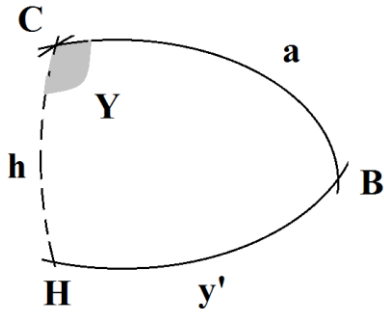


fig. 1.7.4.2a

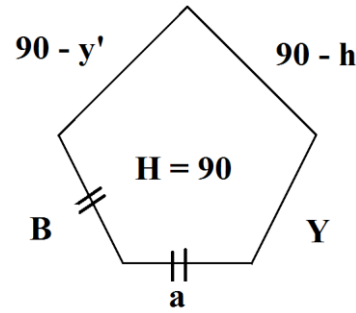


fig. 1.7.4.2 b

Resolviendo mediante el pentágono de Neper y reuniendo los elementos, nos queda resuelto el triángulo esférico inicial **ABC**.

Este método se basa en la descomposición del triángulo esférico oblicuángulo en dos triángulo esférico rectángulos. Para ello, consideremos el arco de círculo máximo que pasa por uno de los vértices del triángulo u perpendicular al lado opuesto a dicho ángulo. **A** este arco, que denotaremos **h**, lo denominamos perpendicular y divide al lado opuesto en dos arcos que son catetos de cada triángulo rectángulo obtenido y que forman, junto al propio perpendicular, ángulo recto.

Sea **H** el punto de intersección del perpendicular **h** con el lado sobre el que proyectamos. Tendremos por construcción que los triángulos **ACH** y **BHC** son rectángulo, por lo que los ángulos **A** y **ACH** deben ser de la misma especie, al igual que ocurre con **B** y **BCH**. Esto implica que el perpendicular **h** puede estar en el interior o en el exterior del triángulo que busquemos, según qué **A** o **B** sean de la misma especie o no.

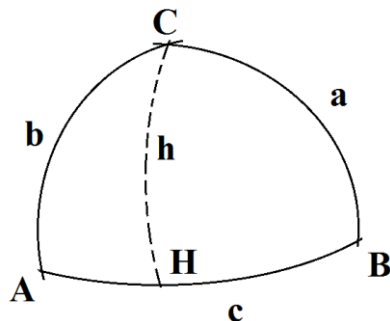


fig. 1.7.4.2c

Si el valor del *perpendicular* es *conocido*, y teniendo en cuenta que la suma de los arcos anteriores es igual al lado opuesto, entonces la resolución es inmediata.

Si el valor del perpendicular es *desconocido*, aplicamos el pentágono de Neper a ambos triángulos rectángulos y operando apropiadamente, se obtiene una expresión de la cotangente de la semidiferencia de dichos catetos, en función de las cotangentes de la semisuma y de la semidiferencia de los otros dos lados, y de la tangente de la semisuma de dichos arcos.

La semidiferencia de los arcos, así calculada, junto a la suma de los mismo, que será el valor del propio lado, permite calcular el valor individual de cada cateto. El método termina resolviendo directamente ambos triángulo rectángulo, de donde se obtienen los valores de los ángulos del triángulo propuesto. [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.39]

Método del triángulo rectángulo, este método de resolución esférico oblicuángulo consiste en la aplicación de las reglas del Neper a cada uno de los dos triángulos esférico rectángulo que se forman cuando, por uno de los vértices de un triángulo esférico oblicuángulo dado, se traza una circunferencia máxima perpendicular al lado opuesto. Como este lado es un arco de circunferencia máxima, la perpendicular trazada corta a esta circunferencia máxima en dos puntos. Puesto que los lados de un triángulo esférico oblicuángulo son arcos menores a 180^0 , puede suceder que ambos puntos se encuentren fuera del triángulo o que solo uno de ellos pertenezca al triángulo.

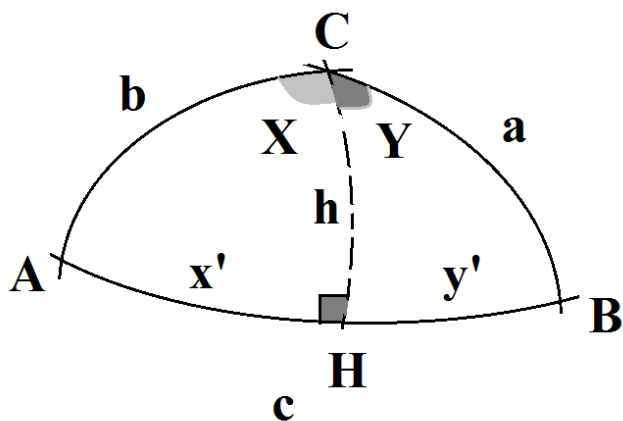


fig.1.7.4d

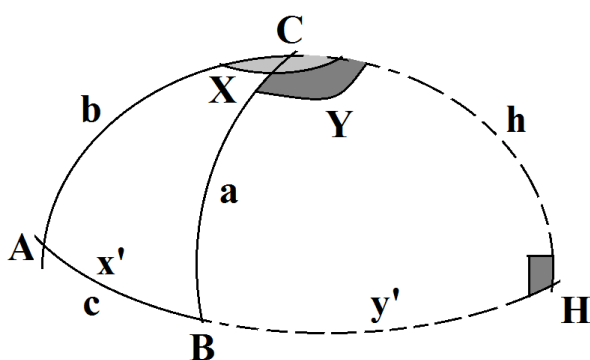


fig. 1.7.4 e

Las **figuras 1.7.4d** y **1.7.4e** ilustran estas dos posibilidades. En el primer caso, el punto de intersección H pertenece al triángulo, y se determina los triángulo rectángulo **ACH** y **BCH** ; en el segundo caso, ninguno de los puntos de intersección pertenece al triángulo y cualquiera de ellos puede ser H . en la **figura 1.7.4 e**, la primera intersección que se encuentra en sentido de A hacia B se ha denominado H y los triángulos formado son, nuevamente **ACH** y **BCH** . [Ayres, Frank Jr. (1970) Trigonometría plana y esférica, editora McGraw-Hill, Colombia, p.177]

1.6.4.3. Resolución de triángulos esférico isósceles³⁹.

Los triángulos esféricos isósceles se resuelven fácilmente por el método del perpendicular. Supóngase que en un triángulo **ABC** se tiene **B = C** y, por tanto, **b = c**.

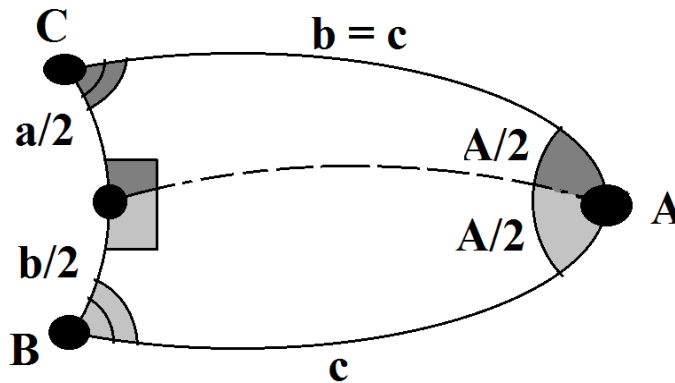


fig. 1.7.4.3

Entonces, se traza el perpendicular desde el vértice A sobre el lado desigual a y el ángulo se descompone en dos triángulos esféricos rectángulos iguales. Dados tres elementos cualquiera del triángulo, se resuelve uno de los triángulos rectángulos. Por lo que aplicamos el pentágono de Neper para resolver los triángulos esféricos rectángulos.

³⁹ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.246

CAPITULO II

LA NAVEGACION ORTODROMICA

2.1 ELEMENTOS BASICOS DE NAVEGACION ORTODROMICA.

2.1.1 La longitud de un arco de circunferencia.

Es la *longitud* total de la circunferencia como el número de grado del ángulo del arco es a 360^0 ; es decir, $L = \frac{\pi R n}{180^0}$ siendo **R** y **n**, el radio de la circunferencia y el numero de grado del ángulo central, respectivamente. [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.64

La *longitud* (Long.) de **A** es el ángulo (no mayor que 180^0) entre el primer meridiano y el meridiano de **A**. se mide por el arco **G'A'** determinado en el ecuador por los dos meridianos o por el ángulo esférico **G'PA'**. La longitud se denomina este u oeste según que el punto dado se encuentra al este o al oeste del primer meridiano. La diferencia de longitud entre dos puntos cuyas longitudes respectivamente son λ_1 y λ_2 , ($\lambda_1 > \lambda_2$), es $\lambda_1 - \lambda_2$ si ambas puntos se encuentran hacia un mismo lado del primer meridiano y es menor que $\lambda_1 + \lambda_2$ y es $360^0 - (\lambda_1 + \lambda_2)$ si se encuentra en lado diferentes. (ver fig. 2.1.1) [Ayres, Frank Jr. (1970) Trigonometría plana y esférica, editora McGraw-Hill, Colombia, p.177]

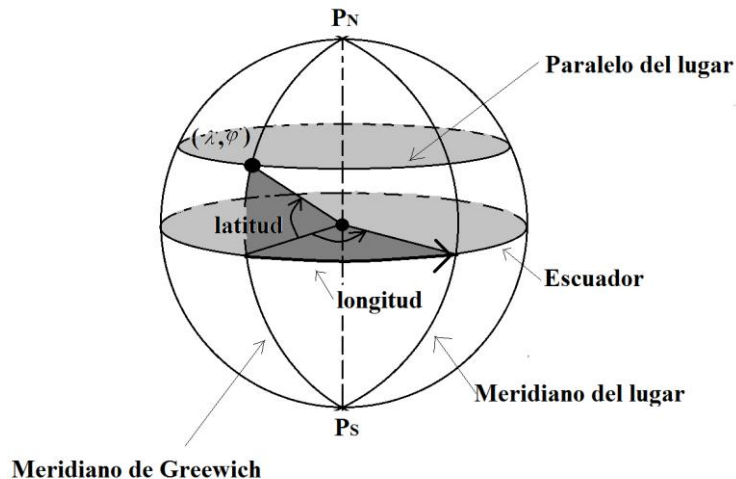


fig. 2.1.1

Se llama *longitud* de un punto de la superficie terrestres al ángulo entre el meridiano de dicho punto y el primer meridiano. Se mide por el arco de Ecuador, contado desde el meridiano de Greenwich hasta el meridiano del lugar. La longitud de un punto puede ser Oeste (W) o Este (E), en función del hemisferio al que pertenezca y toma valores entre 000^0 (el punto está en el meridiano de Greenwich) y 180^0 (el punto está en el meridiano opuesto al de Greenwich). Habitual mente, la longitud se denota con la letra griega λ . [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.279]

2.1.2 Latitud.

Se denomina *latitud* de un lugar central que subtiende el arco del meridiano del lugar comprendido entre el ecuador y el lugar. La latitud se mide a partir del ecuador hacia el norte o hacia el sur, de 0^0 a 90^0 .

(ver fig. 2.1.1) [Berrocso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.64]

Se llama *latitud* de un punto de la superficie terrestres, a la distancia esférica de dicho punto con el Ecuador. Se llama *colatitud* de un punto al complementario de su latitud. La latitud de un punto puede ser Norte (N) o Sur (S), en función de hemisferio al que parezca, y toma valores entre 00^0 (el punto está en el ecuador) y 90^0 (el punto está en el polo). Habitualmente, la latitud se denota con la letra griega φ . (Todo el punto de un mismo paralelo tiene la misma latitud.). [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.279]

2.1.3 Meridiano.

Se denomina *meridiano* de un lugar a la circunferencia máxima de la tierra que pasa por dicho lugar y por los polos norte y sur terrestres. (ver fig. 2.1.1) [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.64]

Se llama meridiano a cada una de las semicircunferencias de circunferencia máxima delimitada por los polos, y meridiano del lugar al que por ese lugar. Se llama primer meridiano, meridiano cero o meridiano de Greenwich, al que pasa por el observatorio de dicha localidad inglesa. El plano que contiene al meridiano cero divide a la superficie esférica terrestres en dos hemisferios: este y Oeste. [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.278]

2.1.4 Paralelo.

Se denomina *paralelo* de un lugar a la circunferencia paralela al ecuador que pasa por ese lugar. (ver fig. 2.1.1) [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.64]

Se llama *paralelo* a cada una de las circunferencias menores paralelas al ecuador. [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.278]

2.1.5 Derrota o Ruta.

Se denomina *ruta* o *derrota* entre dos puntos, a la trayectoria que une el punto de partida con el punto de llegada. (ver fig. 2.1.6) [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.64]

Se llama *derrota* o *ruta* a la trayectoria que recorre un barco o avión entre dos puntos A y B de la superficie terrestres. [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.281]

2.1.6 Derrota ortodrómica.

Se denomina derrota ortodrómica a la derrota que sigue un arco de circunferencia máxima. (ver fig. 2.1.6) [Berrocoso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.64]

Si la trayectoria es un arco de circunferencia máxima, la derrota se llama *ortodrómica*. (vértice de la derrota es el punto de mayor latitud de la derrota entre A y B.). [Rodríguez Acros A. (2012) Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación, paraninfo S.A., España, p.281]

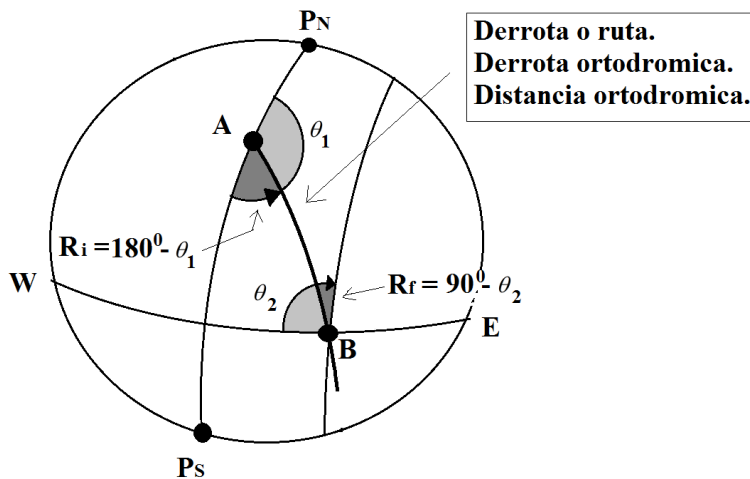


fig. 2.1.6

2.1.7 Rumbo⁴⁰.

Se denomina rumbo geográfico de una ruta en un punto al ángulo que forma el meridiano que pasa por dicho punto con la ruta. Se mide de 0° a 360° a partir del arco de meridiano que une el punto con el polo norte. (ver fig. 2.1.6) [Berrocso, Manuel (2003) Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición, universidad de Cádiz, Colombia, p.64]

Se llama *rumbo*, al ángulo esférico que forma la derrota con el meridiano del lugar en un determinado momento. Se denota por la letra R° .

⁴⁰ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.281

- El rumbo *inicial* es el ángulo esférico que forma la derrota con el meridiano del punto de partida.
- El rumbo *final* es el ángulo esférico que forma la prolongación de la derrota con el meridiano del punto de llegada.

El rumbo se puede proporcionar de dos formas distintos:

- a) *Rumbo circular*: se mide desde el norte hacia el Este. Consta de tres cifras, $000^0 \leq R^0 \leq 360^0$.
- b) *Rumbo cuadrantal*: se toma como tal el menor de los ángulos esférico que forma el Norte o el Sur del meridiano del lugar con la derrota, por lo que puede ser Este U oeste y es menor o igual que un recto, $0^0 \leq R^0 \leq 90^0$.

- Ejemplo⁴¹ 1:

Un barco ha de navegar desde **A** hasta **B**. El *Rumbo inicial* (rumbo A) es el **ángulo $P_N AB$** y el *rumbo de llegada* (rumbo B) es el **ángulo $P_N BC$** como aparece señalado en la fig. 2.1.7 a.

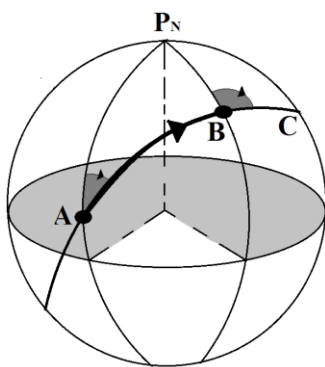


fig. 2.1.7 a.

- Ejemplo³⁹ 2:

⁴¹ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.148

Un barco ha de navegar desde B hasta A. El *rumbo inicial* (en B) es el **ángulo $P_N BA$** y el *rumbo de llegada* (en A) es el **ángulo $P_N AC$** como parece en la fig. 2.1.7 b.

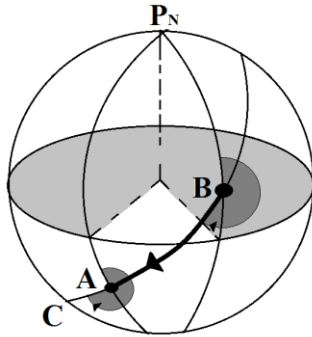


fig. 2.1.7 b.

2.1.8 Distancias ortodrómicas.

Se le llama distancia ortodrómica, al producto de la derrota (en radianes) por el radio medio de la tierra. (ver fig. 2.1.6)

2.1.9 Distancia y Velocidad⁴².

En la historia de la humanidad, muchas civilizaciones han utilizado la milla para medir distancias, dado que este valor que se le asignaba variaba con respecto a las culturas. La milla (del latín, *milia passum*, miles de pasos) es utilizada para medir distancia, este valor suele cambiar por el tipo de cultura. En la actualidad, se llama milla marina o milla náutica, y se denota por la letra **M**, como la longitud de un arco de un minuto de meridiano (circunferencia máxima, suponiendo que a tierra es una esfera de radio $R_T = 6,372 \text{ Km}$). Por tanto, **$1M = 1,852 \text{ Km}$** .

Se puede notar que la tierra no es una esfera perfecta, sino un esferoide, o elipsoide de rotación, de modo que la longitud de un

⁴² Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.283.

arco de un minuto de meridiano varia con la latitud, oscilando entre $1,843 \text{ Km}$. En el ecuador y $1,862 \text{ Km}$. En los polos. Por acuerdo internacional, se ha fijado el valor de una milla náutica en **$1,862 \text{ Km}$** , que corresponde a la medida de un arco de un minuto de meridiano terrestres en la latitud de aproximadamente $\varphi = 45^0$.

Si se considera la elipse de ecuación : $\frac{x^2}{R_{\max}^2} + \frac{y^2}{R_{\min}^2} = 1$ siendo

$R_{\max} = 6,378$ y $R_{\min} = 6,357$ los radios ecuatorial y polar, respectivamente, se calculan los valores de x y y tales que $x^2 + y^2 = R_T^2$ y luego se utiliza el valor de x para calcular el

ángulo φ (latitud) tal que $\cos \varphi = \frac{x}{R_T}$ y se obtiene que $\varphi \approx 46.29^0$.

Por lo que la relación entre milla marina y kilometro se sostiene a partir del radio de la tierra. En efecto, se m el número de kilometro en una milla. Para hallar m basta dividir la longitud total de una circunferencia máxima terrestres entre el número de minutos que

tiene un ángulo completo. Esto es: $m = \frac{2\pi R_T}{(360)(60)} \approx 1.852 \text{ Km}$.

Es decir, *un nudo (Kn)*, es la velocidad que corresponde a recorrer una milla marina en una hora. Por tanto, **$1 \text{ Kn} = 1.852 \text{ Km/h}$** .

2.2 NAVEGACION A LO LARGO DE UN PARALELO⁴³.

Se llama *apartamiento* o *departure*⁴⁴, a la distancia que se recorre sobre un paralelo, se denota por A_p .

Supóngase que un barco navega A_p milla náutica directamente hacia el este o directamente hacia el oeste desde una posición conocida **D** hasta **B**. Como el viaje se realiza a lo largo de un paralelo A_p , entonces la latitud de **B** es la misma del punto **D**.

La diferencia de **longitud entre B y D** ($\Delta\lambda$) se mide mediante el arco **FG** determinado en el ecuador por los meridianos que pasan por **D** y **B**. La distancia recorrida al navegar desde **D** hasta **B**, recibe el nombre de “departure” (A_p) de **B** hacia **D**. La diferencia de longitud se denomina este u oeste según el apartamiento este dirigida hacia el este o hacia el oeste.

Para encontrar la **longitud de B** siendo la diferencia de **longitud G** distinta a la **B**, es necesario considerar: que al unir a **D** y **B** con el **centro C** de la circunferencia menor (o sea el paralelo de latitud), y luego unir **D**, **F** y **G** con el **centro O** de la tierra, y luego trazar **DH perpendicular a OF**. Entonces llamaremos **L** a el ángulo $\angle FOD$, que mide la **latitud de D**. Como $\angle FOG = \angle DCB$, entonces los **arcos FG** y **DB** son proporcionales a sus radio, por tanto:

$$\frac{\text{arcFG}}{\text{arcDB}} = \frac{OF}{CD} = \frac{OD}{OH} = \sec L \rightarrow \frac{\text{arcFG}}{\text{arcDB}} = \sec L \rightarrow \text{arcFG} = (\text{arcDB}) \sec L$$

entonces, $\Delta\lambda = A_p \sec L$ o también $DL_0 = A_p \sec L$. (ver fig. 2.2)

⁴³ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.184.

⁴⁴ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.28, 292-294.

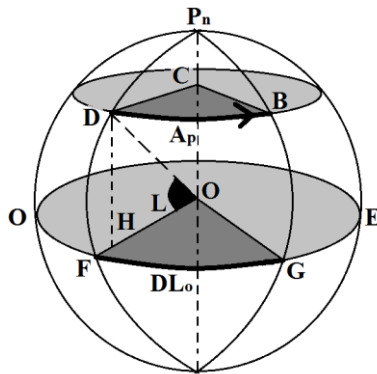


fig. 2.2 a.

- **Otra definición de navegación por un paralelo⁴⁵.**

Sea **A** y **B** dos puntos situados en el paralelo de latitud **L** y se **Ap** el apartamiento, o distancia recorrida (kilometro) sobre el paralelo entre **A** y **B**, ya sea hacia el Este, o al Oeste (ver la fig.2.2 b.)

Observación: Tanto el apartamiento, **Ap**, como el incremento de longitud, **DL_o**. Son magnitudes con signo (positivo si se viaja hacia el Este y negativo si se viaja hacia el Oeste). No obstante, para facilitar la exposición, en las siguientes líneas se consideran ambas positivos, esto es, identificado con su valor absoluto, sin perjuicio de que la fórmula que relaciona a ambas y que se va a obtener será también válida teniendo en cuenta los signos.

⁴⁵ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.28, 292-293.

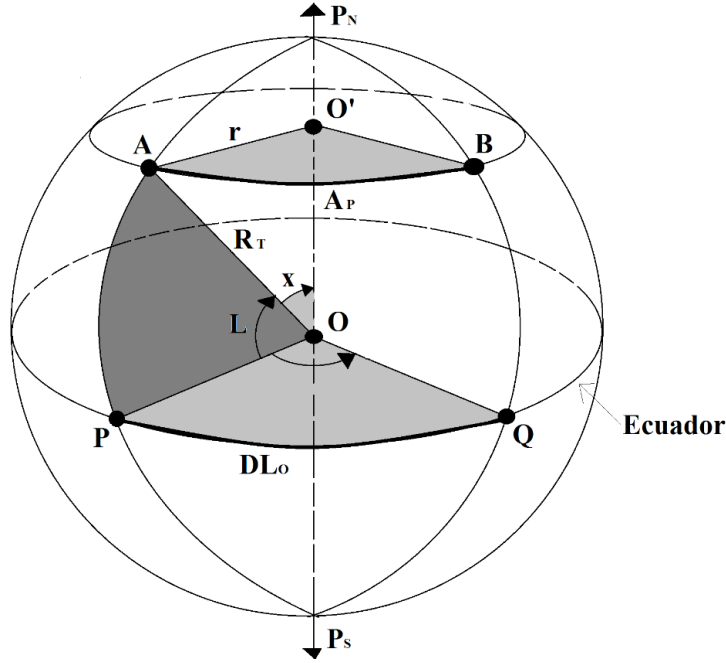


fig. 2.2 b.

El incremento de longitud entre **A** y **B**, en valor absoluto, se puede medir con el **arco PQ** del Ecuador, siendo **P** y **Q** las respectivas intersecciones de los meridianos de **A** y **B** con el Ecuador. Por tanto,

$$DL_0 = \frac{PQ}{R_T} \text{ rad} .$$

Sea **O'** y **r** el centro y radio, respectivamente del paralelo (una circunferencia menor de la superficie terrestre) en el que están situados **A** y **B**. Se observa que los **ángulos planos AO'B** y **POQ** se miden lo mismo que el ángulo esférico que tiene por lados los **meridianos de A** y **B**, esto es,

$$\angle A O' B = \angle POQ = DL_0 .$$

Por tanto, **A_P** y **DL₀** son medidas de dos arcos que corresponden a un mismo ángulo central en dos circunferencias de radios distintos, **r** y **R_T**, respectivamente. Esto es,

$$A_P = \frac{2\pi r}{360^0} n^0 , \quad DL_0 = \frac{2\pi R_T}{360^0} n^0 ,$$

Siendo n^0 la medida en grado de dicho ángulo. En consecuencia, la razón de A_p y DL_0 coinciden con la razón de r y R_T , esto es,

$$\frac{A_p}{DL_0} = \frac{r}{R_T} \rightarrow R_T A_p = r(DL_0).$$

Ahora bien, se observa que el **triángulo plano OAO'**, tiene hipotenusa $OA = R_T$ y el cateto opuesto a O es $AO' = r$. Además, el **ángulo** $\angle AOO' = \angle x$ es el complemento de la **latitud L**. En consecuencia,

$$90^0 = L + x \rightarrow 90^0 - L = x$$

$$\text{sen } x = \frac{AO'}{R_T} \rightarrow \text{sen}(90^0 - L) = \frac{AO'}{R_T} = \cos L$$

$$\frac{r}{R_T} = \cos L \rightarrow r = R_T \cos L$$

Sustituyendo en la ecuación anterior en $R_T A_p = r(DL_0)$ tenemos

$$R_T A_p = (R_T \cos L)(DL_0) \rightarrow A_p = (DL_0) \cos L.$$

Nota: se desprende que las unidades de medidas de A_p coinciden con las de DL_0 .

Nótese también que, en este contexto, no se puede realizar la habitual equivalencia entre millas marina y minutos de longitud, puesto que un paralelo no es (salvo el caso particular del ecuador) una circunferencia máxima.

2.3 NAVEGACION EN UN PLANO⁴⁶.

Supóngase que un barco navega, a lo largo de una circunferencia máxima, con una distancia A_p desde **A** hasta **B**, como se muestra la figura 2.3 a. Trácese por **B** el paralelo que corta en **D** al meridiano que pasa por **A**. Sean **F** y **G** los puntos donde los meridianos que pasan por **A** y **B** cortan el ecuador. Entonces, $l = \text{arc}AD$ que es el cambio de latitud y $A_p = \text{arco } DB$ en el apartamiento.

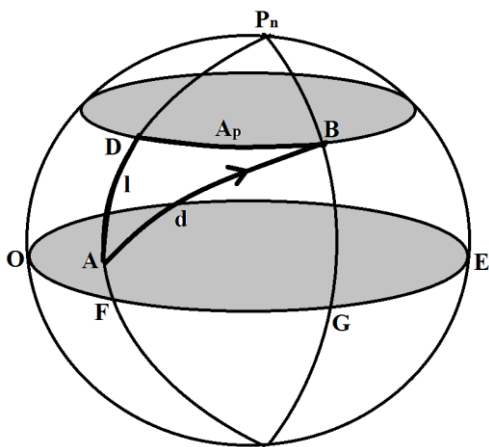


fig. 2.3 a.

Cuando las distancias relacionadas son relativamente pequeñas, se suele considerar la superficie de la tierra como un plano, para poder aprovechar las formulas de la trigonometría plana que son más sencillas. Ahora se supondrá que todas las distancias son menores de 200 millas náutica o 370.4 Km, y que se está trabajando un plano.

En este plano, el ecuador y los paralelos de latitud se representa mediante recta horizontales, mientras que los meridianos, son perpendiculares al ecuador y se representa mediante rectas paralelas verticales. En la fig.2.3 b., **NAS** es el meridiano que pasa por **A**, y **DB** es una parte del paralelo de latitud que pasa por **B**. Entonces, $d = AB$ que es

⁴⁶ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.185.

la distancia, $A_p = DB$ es el apartamiento, l es el cambio de latitud y C es el ángulo del rumbo.

En el triángulo rectángulo **ABD**: $l = d \cos C$, $A_p = d \sen C$ y $\tan C = \frac{A_p}{l}$

El cambio de latitud se designa **N** o **S** según que **B** esta al norte o al sur de **A**. En la fig. 2.3 b., el cambio de latitud es ***l milla N*** o ***l minutos N***, el apartamiento es A_p millas **E** y el rumbo es C° **NE**.

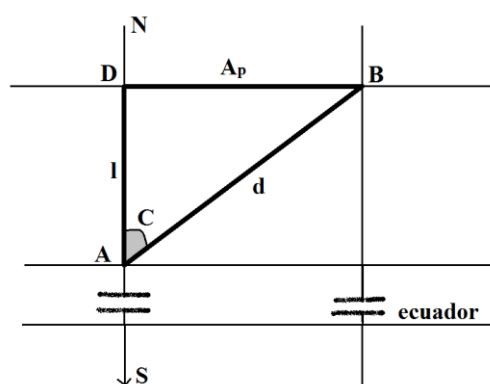


fig. 2.3 b.

2.3.1 El camino más corto para viajar entre dos puntos⁴⁷.

Dado dos puntos de una superficie esférica, la curva de menor longitud trazada sobre la superficie esférica, es el arco de circunferencia máxima. Esto puede probarse con argumento de la geometría diferencial, pero este no es el objetivo de este estudio.

Este hecho es tenido muy en cuenta por las compañías navieras y áreas al planificar sus viajes. Tomar el camino más corto minimiza el tiempo de viaje y el costo del mismo.

En particular, sobre la tierra, para viajar entre dos puntos con la misma latitud, el camino más corto no es el arco de paralelo que lo une, sino el arco de circunferencia máxima que los une. Esto es, más corto viajar por un arco de

⁴⁷ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.294.

circunferencia máxima que por cualquier otra curva, en particular, que por un arco de paralelo.

2.4 NAVEGACION POR LATITUD MEDIA⁴⁸.

Cuando en un **triángulo ABD** de la fig. 2.3 a. se transforma en el **triángulo ABD** de la fig. 2.3 b., se alarga el **arco DB**. Entonces, cuando el “**apartamiento**” $A_P = DB$ se utiliza en la fórmula $DL_0 = A_p \sec L$ de la navegación a lo largo de un paralelo, el valor de DL_0 es muy grande. Se obtiene una mejor aproximación si se considera el “**apartamiento**” correspondiente al paralelo de la latitud media de los paralelos de A y B; esto es, $DL_0 = A_p \sec \frac{1}{2}(lat.A + lat.B)$

Este método, que consiste en convertir el “**apartamiento**” en diferencia de longitud, se llama **navegación por latitud media**. Sin embargo, no debe aplicarse cuando la latitud media excede los 60° .

2.5 ESTIMA⁴⁴.

Es el procedimiento en el que el navegante, para encontrar una aproximación de posición actual, utiliza como datos la última posición conocida de su barco, así como el rumbo seguido y la distancia recorrida desde esa última posición, el cual se conoce por el nombre de **estima**.

⁴⁸ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.185.

2.6 NAVEGACION A LO LARGO DE UNA CIRCUNFERENCIA MAXIMA⁴⁹.

Al navegar a lo largo de una circunferencia máxima desde **A** hasta **B**, un barco recorre el menor de los arcos de la circunferencia máxima que pasa por **A** y **B**. Los problemas fundamentales de la navegación a lo largo de una circunferencia máxima son la determinación entre **A** y **B**, y la determinación de la dirección del recorrido en cualquiera de sus puntos.

Los problemas de la navegación a lo largo de una circunferencia máxima requieren la solución de un triángulo esférico (*generalmente oblicuángulo*), en el que uno de sus vértices es un polo P_n o P_s .

- si **A** y **B** se encuentran en el mismo hemisferio, se toman generalmente como vértice el polo de ese hemisferio.
- si **A** y **B** se encuentran en el hemisferio diferentes, se puede tomar como vértice cualquier de los polos.

En la fig. 2.6 a., **A** y **B** están en hemisferio norte; $b = \text{arco } AP_n = 90^\circ - \text{lat. } A = \text{colatitud } A$, $a = \text{arco } BP_n = 90^\circ - \text{lat. } B = \text{colatitud } B$, y $DL_0 = \angle AP_n B$ es igual a la diferencia de longitud entre **A** y **B**.

⁴⁹ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.285-292.

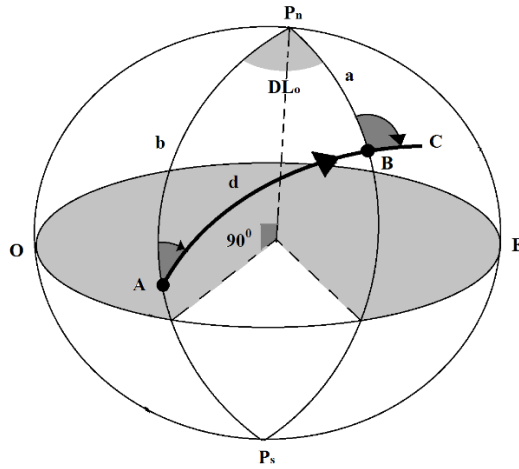


fig. 2.6 a.

En la fig. 2.6 b., **A** está en el hemisferio sur y **B** está en el hemisferio norte. En el triángulo AP_nB , $b' = \text{arco } AP_n = 90^\circ - \text{lat. } A$ y $a' = \text{arco } BP_n = 90^\circ + \text{lat. } B$.

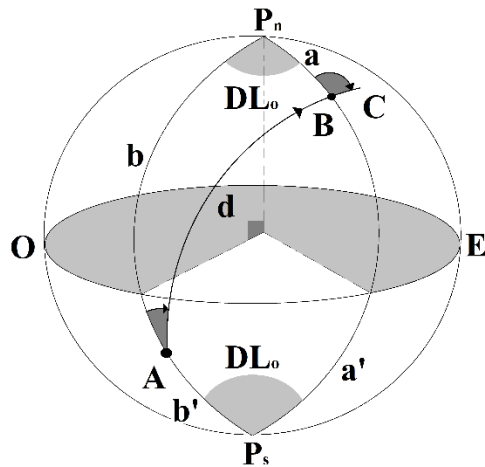


fig. 2.6 b.

En la figura 2.6 c, **A** y **B** se encuentran en el hemisferio sur. En el triángulo AP_sB , $b = \text{arco } AP_s = 90^\circ - \text{lat. } A$ y $a = \text{arco } BP_s = 90^\circ - \text{lat. } B$.

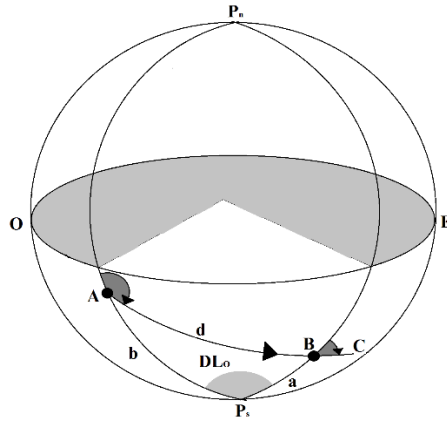


fig. 2.6 c.

En cada una de las figuras, **$d = \text{arco } AB = \text{distancias a lo largo de la circunferencia máxima}$** , entre **A** y **B**, $\angle P_n AB = \text{rumbo de salida}$ y $\angle P_n AC = \text{rumbo de llegada}$.

CAPITULO III

APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRIA

ESFERICA EN LA NAVEGACION

ORTODROMICA

3.1 CASOS DIDACTICO DE LA APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRIA ESFERICA EN LA NAVEGACION ORTODROMICA.

3.1.1 Diferencia de longitudes y distancias⁵⁰.

- Encontrar la diferencia de longitud entre:

a) Nueva York (long. $74^{\circ}10' W$) y Pearl Harbor (long. $157^{\circ} 58.3' W$)).

$\lambda_1 - \lambda_2 = 157^{\circ}58.3' - 74^{\circ}10' = 83^{\circ}57.3'$, puesto que ambas son oeste.

b) Nueva York y Moscú (long. $37^{\circ} 34.3'$).

$\lambda_1 + \lambda_2 = 74^{\circ}10' + 37^{\circ}34.0' = 111^{\circ}57.3'$, porque es este y la otra es oeste.

c) Nueva York y Sydney (long. $151^{\circ} 13'$).

$$360^{\circ} - (\lambda_1 + \lambda_2) = 360^{\circ} - (151^{\circ} 13' + 74^{\circ} 10') = 134^{\circ} 46'$$

d) Sydney y Moscú.

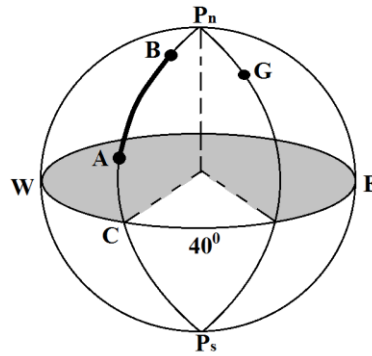
⁵⁰ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.150

- Encontrar la distancia en (km.) entre cada uno de los siguientes pares de puntos de la superficie terrestre.

a) A (lat. $30^{\circ} 25' N$, long. $40^{\circ} W$) y B (lat. $75^{\circ} 10' N$, long. $40^{\circ} W$).

$$CA = 30^{\circ} 25', CB = 75^{\circ} 10' \text{ y}$$

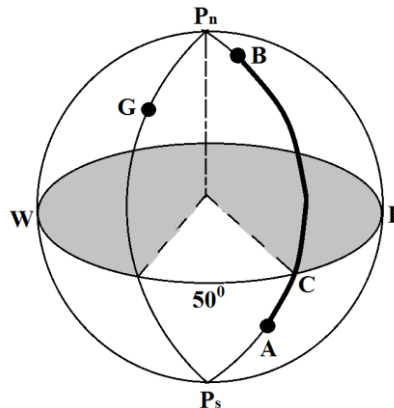
$$AB = CB - CA = 44^{\circ} 45' = \left(\frac{(44^{\circ} 45') \pi}{180^{\circ}} \right) (6,372 \text{ km}) = 4,976.75 \text{ km}$$



- A (lat. $30^{\circ} 25' S$, long. $50^{\circ} E$) y B (lat. $75^{\circ} 10' N$, long. $50^{\circ} E$).

$$CA = 30^{\circ} 25' \text{ CB} = 75^{\circ} 10' \text{ y}$$

$$AB = CA + CB = 105^{\circ} 35' = \left(\frac{(105^{\circ} 35') \pi}{180^{\circ}} \right) (6,372 \text{ km}) = 11,742.17 \text{ km}$$

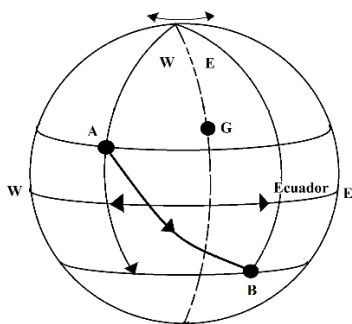


- Considere dos lugares A y B, cuyas longitudes son respectivamente $\lambda_A = 170^\circ E$ y $\lambda_B = 170^\circ W$. Calcular la diferencia de longitud⁵¹.

Solución:

Se observa que $|\lambda_B - \lambda_A| = |-170^\circ - 170^\circ| = 340^\circ > 180^\circ$.

Por tanto, si se viaja de A hasta B hacia el este, entonces $\Delta\lambda = 360^\circ - 340^\circ = 20^\circ$ o de forma equivalente, $\Delta\lambda = 20^\circ E$. Si se viajara de A hasta B hacia el oeste, no se recorrería el mismo camino más corto.

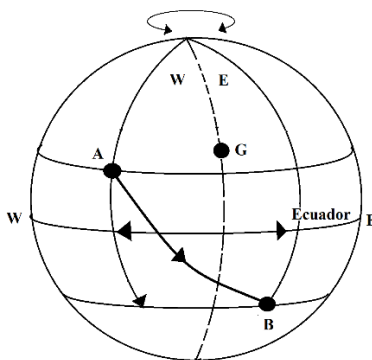


$|\lambda_B - \lambda_A| < 180^\circ$ si se viaja de A, en el Oeste a B en el Este. Entonces $\Delta\lambda > 0$ y si se viaja de B hasta A, entonces $\Delta\lambda < 0$.

Si por el contrario, se viaja de B hasta A hacia el oeste, entonces $\Delta\lambda = -(360^\circ - 340^\circ) = -20^\circ$ o, de forma equivalente, $\Delta\lambda = 20^\circ W$, si se viajara de B hasta A hacia el este, no se recorrería el camino más corto.

$|\lambda_B - \lambda_A| > 180^\circ$ si se viaja de A, en el este a B, en el oeste, entonces $\Delta\lambda > 0$. Si se viaja de B hacia A, entonces $\Delta\lambda < 0$. Además se tiene $|\Delta\lambda| = 360^\circ - |\lambda_B - \lambda_A|$.

⁵¹ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.281.



Para el caso de las latitudes:

Si se viaja de A, en el norte, a B, en el sur, se tiene $|\Delta\phi| < 0$ y si se viaja de A hasta B, entonces $|\Delta\phi| > 0$. (valido para ambas figuras)

3.1.2 Rumbo y distancias⁵².

- El rumbo inicial de un derrotero a lo largo de una circunferencia máxima, a partir de Nueva York (lat. $40^{\circ} 42' N$, long. $74^{\circ} 1' W$) es $30^{\circ} 10' NE$. Localizar el punto M del recorrido más cercano al polo norte, y calcular (kilómetros) las distancias, en la circunferencia máxima, desde M hasta el polo y hasta Nueva York.

Solución:

La distancia mínima entre el recorrido y el polo norte P se mide a lo largo del meridiano que es perpendicular a la ruta. En el triángulo esférico NPM, $M = 90^{\circ}$, $m = NP = 90^{\circ} - 40^{\circ} 42' = 49^{\circ} 10'$ y $N = 30^{\circ} 10'$; P, n y p son las partes buscadas.

Para **n**: $\sin n = \cos (90^{\circ} - m) \cos (90^{\circ} - N) = \sin m \sin N$.

Para **P**: $\sin (90^{\circ} - m) = \tan (90^{\circ} - N) \tan (90^{\circ} - P)$; y $\cot P = \cos m \tan N$.

⁵² Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.161, 162.

Para **p**: $\text{sen}(90^\circ - N) = \tan(90^\circ - m) \tan p$; y $\tan p = \tan m \cos N$.

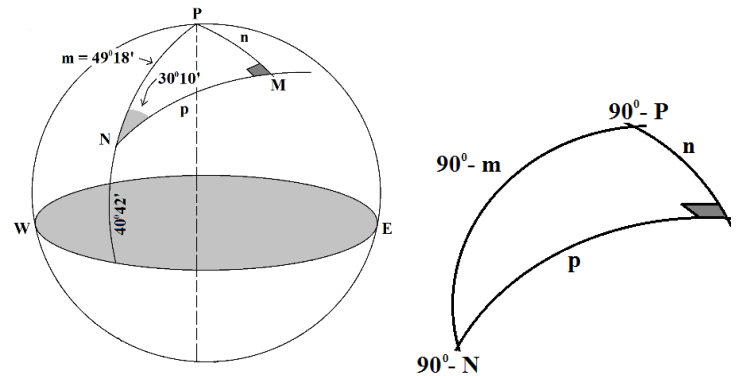
. $m = 49^\circ 18'$

. $N = 30^\circ 10'$

. $n = 22^\circ 23.6'$

$P = 69^\circ 14.6'$

. $p = 45^\circ 8.8'$

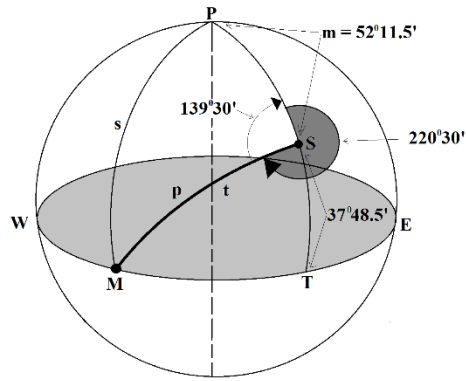


La latitud de M es $90^\circ - n = 67^\circ 36.4' \text{ N}$; la longitud es $74^\circ 1' - P = 4^\circ 46.4' \text{ W}$. La distancia de M a P es

$$n = 22^\circ 23.6' = \left(\frac{22^\circ 23' \pi}{180^\circ} \right) (6,372 \text{ km}) = 2,490.42 \text{ km} \text{ y la distancia de M a}$$

$$\text{Nueva York es } p = 45^\circ 8.8' = \left(\frac{45^\circ 8.8' \pi}{180^\circ} \right) (6,372 \text{ km}) = 5,020.87 \text{ km} .$$

- El rumbo inicial de un derrotero a lo largo de una circunferencia máxima, a partir de San Francisco (lat. $37^\circ 48.5' \text{ N}$, long. $122^\circ 24' \text{ W}$) es $40^\circ 30' \text{ SW}$ o $220^\circ 30' \text{ SW}$. Localizar el punto M donde el recorrido corta el ecuador, y calcular la distancia, en la circunferencia máxima, desde M hasta San Francisco.



Solución 1:

En el triángulo esférico MSP, $s = MP = 90^\circ$, $S = 360^\circ - 220^\circ 30' = 139^\circ 30'$, y $m = SP = 90^\circ - 37^\circ 48.5' = 52^\circ 11.5'$; P y p son las partes buscadas. Como este triángulo es cuadrantal, se puede utilizar su triángulo polar (rectángulo) M'S'P', en el que $S' = 90^\circ$, $s' = 180^\circ - S = 40^\circ 30'$ y $M' = 180^\circ - m = 127^\circ 48.5'$, para encontrar p' y P'.

Para p': $\sin(90^\circ - M') = \tan p' \tan(90^\circ - s')$ y $\tan p' = \cos M' \tan s'$.

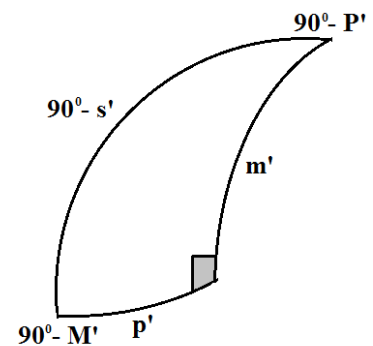
Para P': $\sin(90^\circ - s') \tan(90^\circ - M') \tan(90^\circ - P')$ y $\cot(P') = \tan M' \cos s'$.

$$M' = 127^\circ 48.5'$$

$$s' = 40^\circ 30'$$

$$p' = 152^\circ 21.9'$$

$$P' = 134^\circ 25.3'$$



Entonces, $P = 180^\circ - p' = 27^\circ 38.1'$ y $p = 180^\circ - P' = 45^\circ 34.7'$. La longitud de M es $122^\circ 24' + 27^\circ 38.1' = 150^\circ 2.1' W$ y la distancia desde M hasta San Francisco es $p = 45^\circ 34.7' = 5,068.87 \text{ km}$.

Solución 2:

Puede obtener un procedimiento algo más sencillo que el empleo anteriormente, si se utiliza el triángulo SMT en el que $m = TS = 37^\circ 48.5'$, $S = \angle MST = 40^\circ 30'$ y $T = 90^\circ$. En este caso $s = \text{arco MT}$, que mide la diferencia de longitud entre M y S, y $t = \text{arco MS}$.

Para s : $\text{sen } m = \tan s \tan (90 - S)$ y $\tan s = \text{sen } m \tan S$.

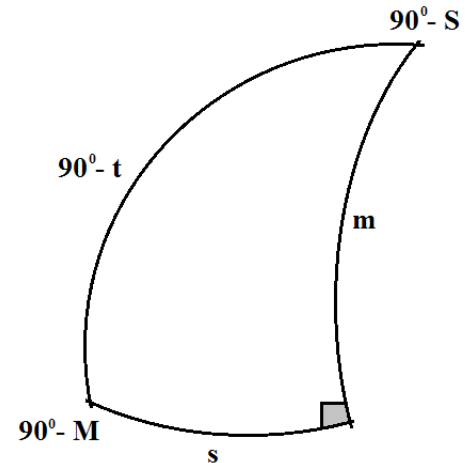
Para t : $\text{sen } (90^\circ - S) = \tan (90^\circ - t) \tan m$ y $\cot t = \cot m \cos S$.

$$M = 37^\circ 48.5'$$

$$S = 40^\circ 30'$$

$$.s = 27^\circ 38.1'$$

$$.t = 45^\circ 34.7'$$



La longitud de M es $122^\circ 24' + 27^\circ 28.1' = 150^\circ 2.1' W$ y la distancia buscada es $t = 45^\circ 34.7' = 5,068.8749 \text{ km}$.

- Encontrar el rumbo inicial y el rumbo final de llegada de un derrotero, a lo largo de una circunferencia máxima que, a partir de Chicago (lat. $41^\circ 50' N$, long. $87^\circ 31.7' W$) corta el ecuador en M (long. $170^\circ 15' E$). Encontrar la distancia entre M y Chicago.

Solución:

Este problema puede resolverse mediante el triángulo polar (rectángulo) del triángulo cuadrantal MCP, o mediante el triángulo MCT. En este último caso, $m = \text{arco TC} = 41^{\circ} 50'$ y $c = \text{arco MT} = 102^{\circ} 13.3'$.

Para C: $\text{sen } m = \tan c \tan (90^{\circ} - C)$

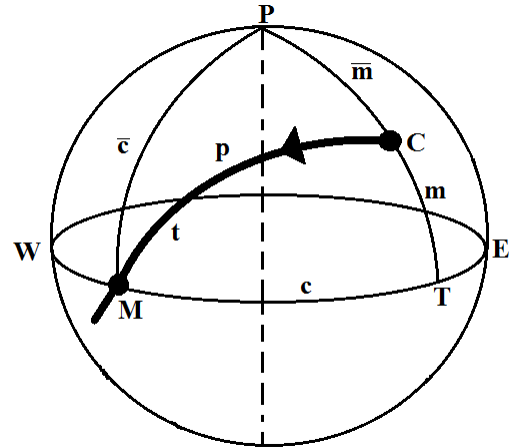
$$\text{Cot } C = \cot c \text{ sen } m.$$

Para M: $\text{sen } c = \tan m \tan (90^{\circ} - M)$

$$\text{Cot } M = \text{sen } c \cot m.$$

Para t: $\text{sen } (90^{\circ} - t) = \cos c \cos m$

$$\text{Cos } t = \cos c \cos m.$$



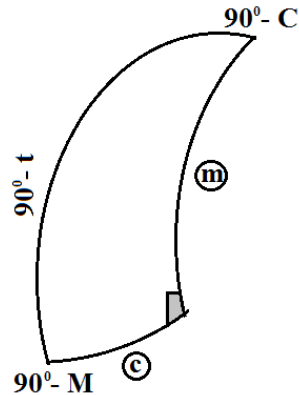
$$.c = 102^{\circ} 13.3'$$

$$.m = 41^{\circ} 50'$$

$$C = 90^{\circ} 13.2'$$

$$M = 42^{\circ} 29.2'$$

$$.t = 99^{\circ} 4.5'$$



El rumbo inicial es $180^{\circ} + 98^{\circ} 13.2' = 278^{\circ} 13.2'$, el rumbo de llegada es $270^{\circ} - 42^{\circ} 29.2' = 227^{\circ} 30.8'$, y la distancia es

$$t = 99^{\circ} 4.5' = 11,018.3665 \text{ km.}$$

3.1.3 Navegación a lo largo de un paralelo⁵³.

- Un barco navega 101.86 km., hacia el este en latitud $44^{\circ} 30' \text{ N}$. Encontrar el cambio de longitud.

Solución:

En relación con la fig. 2.2 a., el apartamiento es $A_p = 101.86 \text{ km.}$, y $L = 44^{\circ} 30'$. Entonces, $DL_0 = (101.86) \sec 44^{\circ} 30' = 142.81 \text{ km. E. o}$

$$DL_0 = \frac{(142.81 \text{ km})180^{\circ}}{(6,372 \text{ km})\pi} = 1^{\circ} 17' 2.86'' \text{ E.}$$

- Hallar la longitud l de un arco de un grado del paralelo de latitud $L = 59^{\circ} 21' \text{ N}$.

Solución:

$$R = R_T \cos L = (6,372 \text{ km}) \cos 59^{\circ} 21' = 3,248.40 \text{ km.}$$

$$\text{Por tanto, } l = \frac{2\pi r \times 1^{\circ}}{360^{\circ}} 56.65 \text{ km.}$$

También se puede utilizar que la longitud de un grado de ecuador es $d = 1,852 \times 60 = 111,12 \text{ km}$.

La fórmula $A_p = (DL_0) \cos L$, en este contexto, resulta: $l = d \cos L$

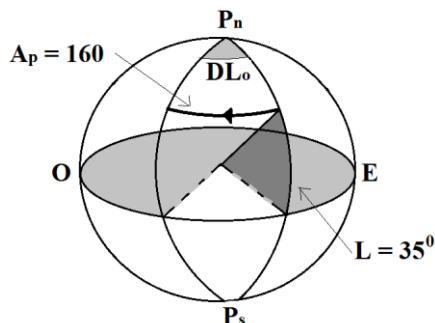
$$\text{Donde } l = 111.12 \times 0.5098 = 56.65 \text{ km.}$$

⁵³ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.187.

- Un barco navega hacia el oeste a una distancia de 296.30 km en la latitud 35° N. Encontrar el cambio de longitud.⁵⁴

Solución:

Aquí, $A_p = 296.30$ km, $L = 35^{\circ}$ y $DLo = A_p \sec L = 160 \sec 35^{\circ} = 361.74$ km al oeste.

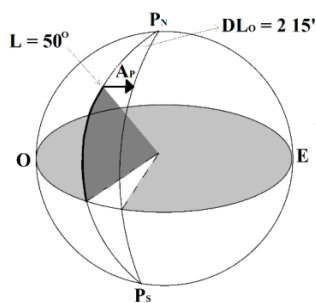


- Un barco cuya latitud es 50° N navega hacia el este hasta que alcanza una diferencia de longitud de $2^{\circ} 15'$. Encontrar el **apartamiento**.

Solución:

Aquí, $DLo = \left(\frac{2^{\circ} 15' \pi}{180^{\circ}} \right) (6,372 \text{ km}) = 250.23 \text{ km E}$, $L = 50^{\circ}$ entonces $DLo =$

$A_p \sec L$, tenemos $A_p = DLo \cos L = (250.23 \text{ km}) \cos 50^{\circ} = 160.85$ km. E.



⁵⁴ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.184.

- Dados dos puntos A y B sobre la superficie terrestres están sobre un paralelo de latitud $= 30^0$ S y difieren en tres de reloj. (a) Tomando como radio terrestre $R_T = 6.372$ km, hallar su distancia en km. Medida sobre el menor de los arcos de paralelo que los une. (b) ¿Cuál será la distancia entre A y B medida sobre el menor de los arcos de circunferencia máxima que las une?⁵⁵

Nota:

Tres horas de reloj equivalen a un incremento de longitud.

$$\Delta\lambda = 3 \times 15 \frac{\text{grado}}{\text{horas}} = 45^0, \text{ entonces } \Delta\lambda = \left(\frac{45^0 \pi}{180^0} \right) (6,372 \text{ km}) = 5,004.55 \text{ km}$$

a) Solución:

$$A_P = (5,004.55) \cos 30^0 = 4,334.067 \text{ km}$$

b) Solución:

Se resuelve un triángulo esférico ABC, donde C representa el polo sur (así como el ángulo $C = \Delta\lambda$). Por tanto, los lados a y b representa las colatitud de B y A, respectivamente siendo $a = b = 60^0$. Utilizando una fórmula de los cosenos se calcula.

$$AB = c = 4,301.37 \text{ km.}$$

Comparando los resultados anteriores, se pone de manifiesto que la distancia entre los puntos A y B, medida sobre el menor de los arcos de circunferencia máxima que los une, es menor que la medida sobre el paralelo, esto es que las curvas de menor longitud sobre la superficie esférica son los arcos de circunferencia máxima.

⁵⁵ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.294.

3.1.4 Navegación en un plano⁵⁶.

- Un barco viaja una distancia 277.8 km con un rumbo de $245^{\circ} 10'$ SW (o $R = 245^{\circ} - 180^{\circ} = 65^{\circ} 10'$ SW) desde sanfrancisco (lat. $37^{\circ} 50'$ N). encontrar el apartamento y la latitud alcanzada.

Solución:

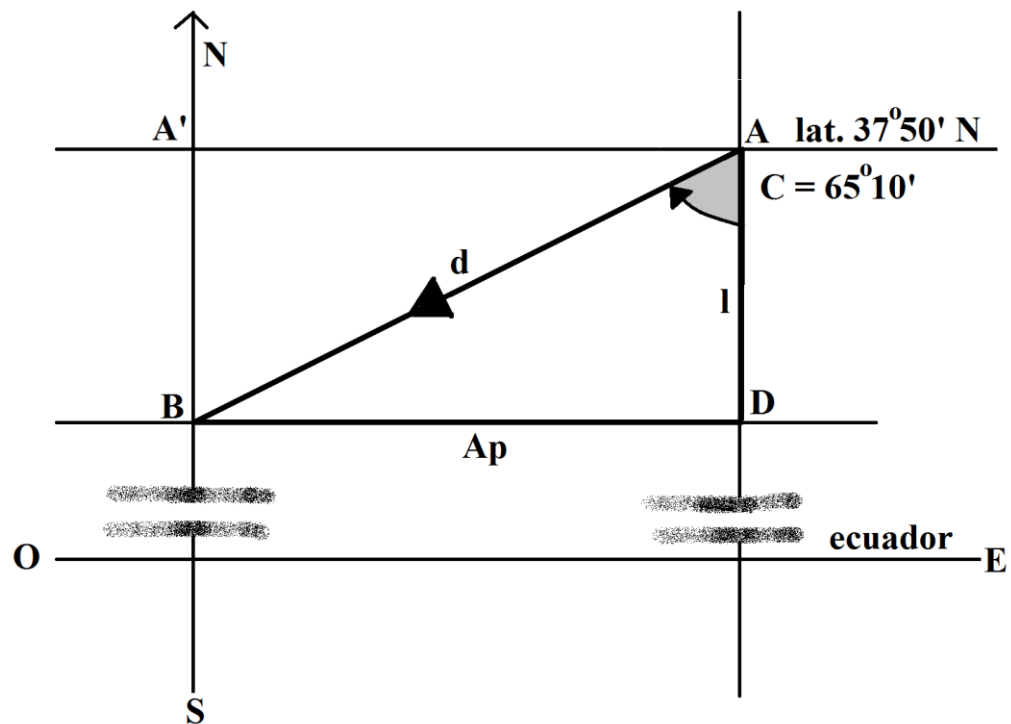
Sean **A** y **B** las posiciones iniciales y finales del barco. En el triángulo rectángulo ABD, $C = 65^{\circ} 10'$, entonces:

$$Ap = d \sen C = (277.8) \sen 65^{\circ} 10' = 252.11 \text{ km. W.}$$

$$l = d \cos C = (277.8) \cos 65^{\circ} 10' = 116.67 \text{ km. S.}$$

$$\text{La latitud de } B = 37^{\circ} 50' - \left(\frac{(116.67 \text{ km})(180^{\circ})}{(6,372 \text{ km})\pi} \right) = 36^{\circ} 47' 3.33''$$

La altitud de **B** = $36^{\circ} 47' 3.33''$



⁵⁶ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.187.

- Un buque sigue un rumbo de 160^0 cuando navega desde A (lat. $53^0 10' S$) hasta B (lat. $55^0 40' S$). Encontrar la distancia y el *apartamiento*.

Solución:

Aquí $I = 55^0 40' - 53^0 10' = 2^0 30' = 278.031 \text{ km.}$, $C = 20^0 \text{ SE}$, entonces:

$$d = I \sin C = (278.031) \sin 20^0 = 95.0922 \text{ km.}$$

$$A_p = I \tan C = (278.031) \tan 20^0 = 101.95 \text{ km E.}$$

3.1.5 Navegación por latitud media⁵⁷.

- Un buque que sale de A (latitud $54^0 10' N$, long. $156^0 W$) y viaja 305.58 km . Con un rumbo de 220^0 Encontrar la posición alcanzada B.

Solución:

Aquí, $C = 40^0 \text{ SW}$, $d = 305.58 \text{ km}$, entonces

$$I = d \cos C = (305.58) \cos 40^0 = 234.0879 \text{ km. S}$$

$$A_p = d \sin C = (305.58) \sin 40^0 = 196.4230 \text{ km. W}$$

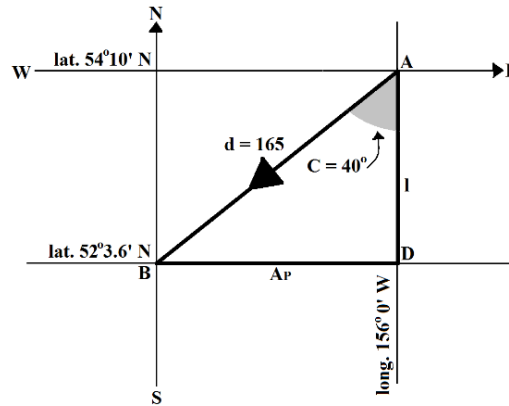
$$\text{La latitud de } B = 54^0 10' - \left(\frac{(243.0879 \text{ km})(180^0)}{(6,372 \text{ km})\pi} \right) = 51^0 58' N$$

La latitud media es $\frac{1}{2}(54^0 10' + 51^0 58' 51.12") = 53^0 04' N$. Entonces,

$$DL_o = A_p \sec \left(\frac{\text{lat. A} + \text{lat. B}}{2} \right) = (305.58) \sec 52^0 37' = 503.3067 \text{ km W}$$

⁵⁷ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.188.

Y la longitud de B = $156^{\circ} + \left(\frac{(503.3067 \text{ km})(180^{\circ})}{(6,372 \text{ km}) \pi} \right) = 157^{\circ} 35' \text{ W}$ (ver la fig).



- Un barco parte de A (lat. $40^{\circ} 22'$, long. $47^{\circ} 12' \text{ W}$) y llega a B (lat. $37^{\circ} 46' \text{ N}$, $44^{\circ} 54' \text{ W}$). Entonces tras, mediante navegación por latitud media, encontrar el rumbo y la distancia.

Solución:

La diferencia de latitud $l = 47^{\circ} 12' - 37^{\circ} 46' = 2^{\circ} 36' \text{ S}$.

La diferencia de longitud es $DL_0 = 47^{\circ} 12' - 44^{\circ} 52' = 2^{\circ} 18' \text{ E}$.

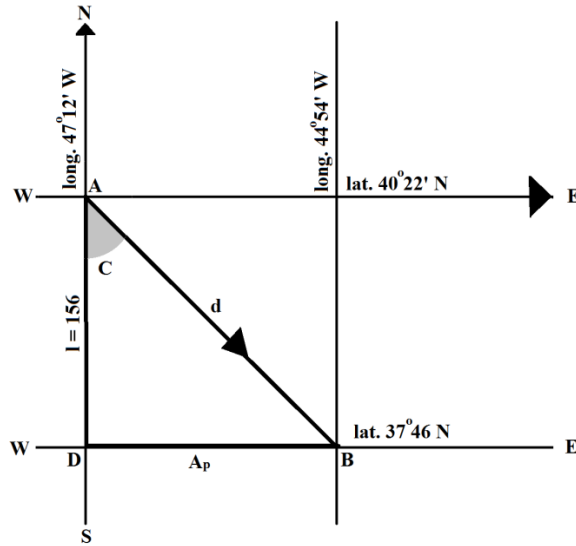
La latitud media es $\frac{1}{2}(40^{\circ} 22' + 37^{\circ} 46') = 39^{\circ} 4'$. de

$$DL_0 = A_p \sec \left(\frac{\text{lat. A} + \text{lat. B}}{2} \right), A_p = (2^{\circ} 18') \cos 39^{\circ} 4';$$

$$\tan C = \frac{A_p}{l} = \frac{(2^{\circ} 18') \cos 39^{\circ} 4'}{2^{\circ} 36'} = 0.6868 \text{ y } C = 34^{\circ} 29' \text{ y, } l = d \cos C,$$

$$d = l \sec C = (2^{\circ} 36') \sec 34^{\circ} 29' = 3^{\circ} 9' 15.21'' = 350.79 \text{ km E.}$$

Y el rumbo es $34^{\circ} 29' \text{ SE}$.



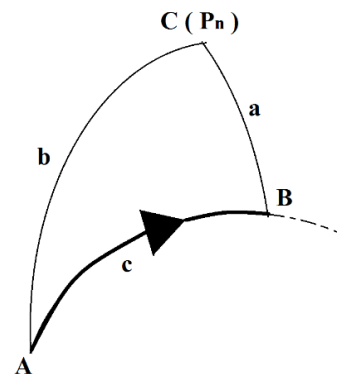
3.1.6 Navegación a lo largo de una circunferencia máxima⁵⁸.

- Encontrar la distancia, el rumbo de salida y el rumbo de llegada correspondiente a un viaje desde Honolulu (lat. $21^{\circ} 18.3' N$, long. $157^{\circ} 62.3' W$) hasta san Francisco (lat. $37^{\circ} 47.5' N$, long. $122^{\circ} 25.7' W$).

Solución:

En la figura, A es Honolulu y B es san Francisco.

Entonces, $a = 90^{\circ} - 37^{\circ} 47.5' = 52^{\circ} 12.5'$,
 $b = 90^{\circ} - 21^{\circ} 18.3' = 68^{\circ} 41.7'$ y $C = 157^{\circ} 52.3' - 122^{\circ} 25.7' = 35^{\circ} 26.6'$



Solución normal:

⁵⁸ Ayres, Frank Jr. (1970) **Trigonometría plana y esférica**, editora McGraw-Hill, Colombia, p.189-192.

Para A, B: (1) $\tan\left(\frac{B+A}{2}\right) = \cos\left(\frac{b-a}{2}\right) \sec\left(\frac{b+a}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$

(2) $\tan\left(\frac{B-A}{2}\right) = \sin\left(\frac{b-a}{2}\right) \sec\left(\frac{b+a}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$

Para c: (3) $\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \tan\left(\frac{b-a}{2}\right) \sin\left(\frac{B+A}{2}\right) \csc\left(\frac{B-A}{2}\right)$

$$\frac{b-a}{2} = 8^{\circ}14.6' \quad \frac{b+a}{2} = 60^{\circ}27.1' \quad \frac{C}{2} = 17^{\circ}43.3'$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} \frac{B+A}{2} = 80^{\circ}57.1' \\ \frac{B-A}{2} = 27^{\circ}16.9' \end{cases} \quad B = 108^{\circ}14', A = 53^{\circ}$

$$40.2' \quad \frac{C}{2} = 17^{\circ}20.1' \quad C = 34^{\circ}40.2'$$

La distancia buscada es $34^{\circ}40.2' = 3,855.7332$ km. El rumbo de salida es $53^{\circ}40.2'$ NE o $53^{\circ}40.2'$ y el rumbo de llegada es $(180^{\circ} - 108^{\circ}14')$ NE = $71^{\circ}46'$ NE o $71^{\circ}46''$.

Solución alterna:

. $\text{ssv } c = \text{ssv } (b - a) + \sin b \sin a \text{ ssv } C = \text{ssv } (b - a) + x$

. $\text{ssv } A = \sin (s - b) \sin (s - c) \csc b \csc c$

. $\text{ssv } B = \sin (s - c) \sin (s - a) \csc c \csc a$

. $b = 68^{\circ}41.7' \quad b - a = 16^{\circ}29.2'$

. $a = 52^{\circ}12.5'$

$C = 35^{\circ}26.6'$

. $x = 0.06822$

$$.c = 34^{\circ} 40.2'$$

$$.a = 52^{\circ} 12.5' \quad s - a = 25^{\circ} 34.7'$$

$$.b = 68^{\circ} 41.7' \quad s - b = 9^{\circ} 5.5'$$

$$.c = 34^{\circ} 40.2' \quad s - c = 43^{\circ} 7'$$

$$2s = 155^{\circ} 34.4' \quad a = 52^{\circ} 12.5'$$

$$.s = 77^{\circ} 47.2' \quad b = 68^{\circ} 41.7'$$

$$.c = 34^{\circ} 40.2'$$

$$A = 53^{\circ} 40.2'$$

$$B = 108^{\circ} 14'$$

La distancia buscada es $c = 34^{\circ} 40.2' = 3,855.7332$ km. El rumbo de salida es $53^{\circ} 40.2'$, y el rumbo de llegada es $71^{\circ} 46'$.

- Un barco navega a lo largo de una circunferencia máxima desde Dutch Harbor (lat. $53^{\circ} 53'$ N, long. $166^{\circ} 35'$ W) hasta Melbourne (lat. $37^{\circ} 50'$ W, long. $144^{\circ} 59'$ E). (a) Encontrar la distancia, el rumbo de salida y el de llegada. (b) Localizar el punto donde el recorrido corta el ecuador. Encontrar el rumbo y la distancia desde este punto hasta Dutch Harbor. (c) Localizar el punto del recorrido cuya longitud es 180° . Encontrar el rumbo y la distancia desde este punto hasta Dutch Harbor.

a) Solución:

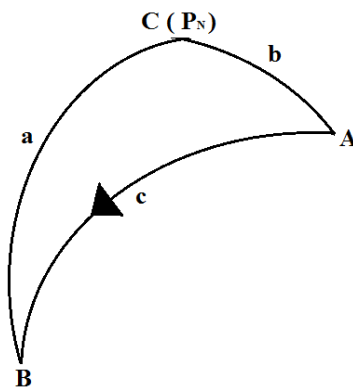
En la fig. mostrada A es Dutch Harbor y B es Melbourne. Entonces, $b = 90^{\circ} - 53^{\circ} 53' = 36^{\circ} 7'$, $a = 90^{\circ} + 37^{\circ} 50' = 127^{\circ} 50'$ y $C = 360^{\circ} - (166^{\circ} 35' + 144^{\circ} 59') = 48^{\circ} 26'$.

$$\text{Para A,B: (1) } \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sec\left(\frac{a+b}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$(2) \tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \csc\left(\frac{a+b}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\text{Para c: (3) } \tan\left(\frac{c}{2}\right) = \tan\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \csc\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right) = 45^{\circ} 51.5' \quad \left(\frac{a+b}{2}\right) = 81^{\circ} 58.5' \quad \frac{C}{2} = 24^{\circ} 13'$$



$$\text{Resolviendo el sistema } \begin{cases} \frac{B+A}{2} = 84^{\circ}50.9' \\ \frac{B-A}{2} = 58^{\circ}10.5' \end{cases} \quad A = 143^{\circ} 1.4' \quad B = 26^{\circ} 40.4'$$

$$\frac{c}{2} = 50^{\circ}22.7' \quad c = 100^{\circ} 45.4'$$

La distancia buscada es $100^{\circ} 45.4' = 11,250.3887$ km. El rumbo de salida es $(180^{\circ} - 143^{\circ} 1.4') \text{ SW} = 36^{\circ} 58.6' \text{ SW}$ o $360^{\circ} - 143^{\circ} 1.4' = 215^{\circ} 58.6'$ y el rumbo de llegada es $26^{\circ} 40.4' \text{ SW}$ o $180^{\circ} + 26^{\circ} 40.4' = 206^{\circ} 40.4'$.

b) Solución:

Denomínese D la intersección del recorrido y el ecuador, y G la intersección del meridiano que pasa por A y el ecuador. Considérese el triángulo esférico rectángulo AGD de la fig. en el que $G = 90$,

$$d = \text{arco GA} = 53^{\circ} 53' \text{ y } A = \angle DAG = 180^{\circ} - 143^{\circ}1.4' = 36^{\circ}58.6'.$$

$$\text{Para a: } (4) \tan a = \sin d \tan A$$

$$\text{Para D: } (5) \cos D = \cos d \sin A$$

$$\text{Para g: } (6) \tan g = \tan d \sec A$$

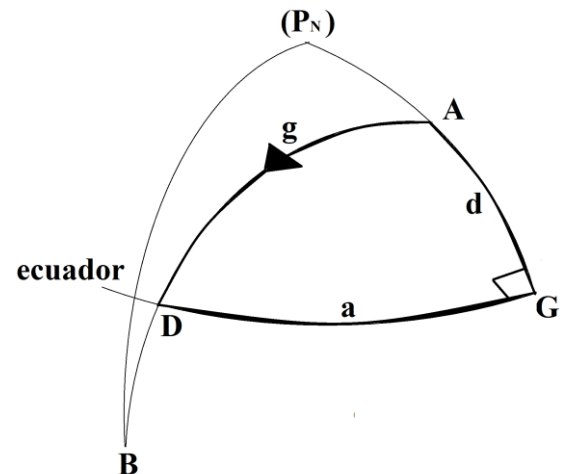
$$\therefore d = 53^{\circ} 53.4'$$

$$A = 36^{\circ} 58.6'$$

$$\therefore a = 31^{\circ} 15.5'$$

$$D = 69^{\circ} 14.1'$$

$$\therefore g = 59^{\circ} 45.7'$$



La longitud de D es $166^{\circ} 35' + 31^{\circ} 18.5' = 197^{\circ} 53.5' W$.

El rumbo desde D es $(90^{\circ} - 69^{\circ} 14.1'') SW = 20^{\circ} 45.9' SW$ o $200^{\circ} 45.9'$.

La distancia entre D y Dutch Harbor es $59^{\circ} 45.7' = 6,646.2372 \text{ km}$.

c) Solución:

Denomínese M el punto del recorrido cuya longitud es 180° y considérese el triángulo esférico AMC de la figura en el que $C = 180^{\circ} - 166^{\circ} 35' = 13^{\circ} 25'$.

Para a.c: (7) $\tan\left(\frac{a+c}{2}\right) = \cos\left(\frac{A-C}{2}\right) \sec\left(\frac{A+C}{2}\right) \tan\left(\frac{m}{2}\right)$

$$(8) \tan\left(\frac{a-c}{2}\right) = \sin\left(\frac{A-C}{2}\right) \csc\left(\frac{A+C}{2}\right) \tan\left(\frac{m}{2}\right)$$

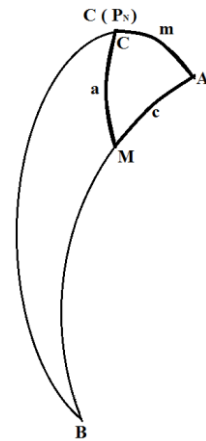
Para M: (9) $\cot\left(\frac{M}{2}\right) = \sin\left(\frac{a-c}{2}\right) \csc\left(\frac{a+c}{2}\right) \tan\left(\frac{A-C}{2}\right)$

$$\left(\frac{A-C}{2}\right) = 64^{\circ} 48.2' \quad \left(\frac{A+C}{2}\right) = 78^{\circ} 13.2' \quad \frac{m}{2} = 18^{\circ} 3.5'$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} \left(\frac{a-c}{2}\right) = 34^{\circ} 12.7' \\ \left(\frac{a+c}{2}\right) = 16^{\circ} 46.3' \end{cases} \quad a = 50^{\circ}$

$$59' \quad c = 17^{\circ} 26.4' \quad \frac{M}{2} = 13^{\circ} 34.5'$$

$$M = 27^{\circ} 9'.$$



La altitud de M es $(90^\circ - a) N = 39^\circ 1' N$. El rumbo desde M es $27^\circ 9' SW$ o $207^\circ 9'$ y la distancia entre M y Dutch Harbor es $17^\circ 25.4' = 1,939.5439 \text{ km}$.

- ❖ Un buque parte de Nueva York (lat. $40^\circ 48.6' N$, long. $73^\circ 57.3' W$) para efectuar una travesía a lo largo de una circunferencia máxima. El rumbo de salida es $36^\circ 0'$. (a) Encontrar la latitud y la longitud de su posición B cuando ha recorrido 925 km. (b) Localizar el punto de la travesía que se encuentra el norte.

a) Solución:

En la figura, A es Nueva York. Entonces, $b = 90^\circ - 40^\circ 48.6' = 49^\circ 11.4'$,

$$c = \left(\frac{(925 \text{ km})(180^\circ)}{(6372 \text{ km})(\pi)} \right) = 8^\circ 20' \text{ y } A = 36^\circ 0'$$

Para C: (1) $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{b-c}{2}\right) \sec\left(\frac{b+c}{2}\right) \cot\left(\frac{A}{2}\right)$

$$(2) \tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \sin\left(\frac{b-c}{2}\right) \csc\left(\frac{b+c}{2}\right) \cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

Para a: (3) $\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \tan\left(\frac{b-c}{2}\right) \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \csc\left(\frac{B-C}{2}\right)$

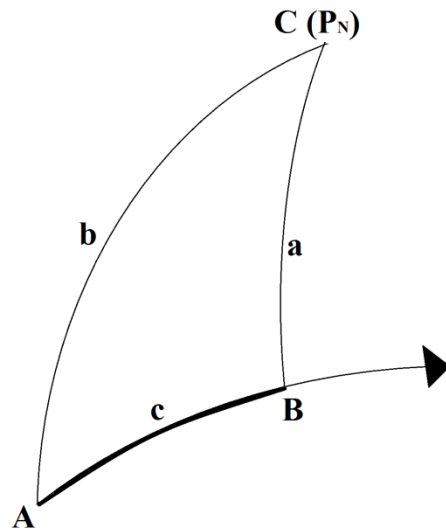
$$\left(\frac{b-c}{2}\right) = 20^\circ 25.7' \quad \left(\frac{b+c}{2}\right) = 28^\circ 45.7' \quad \left(\frac{A}{2}\right) = 18^\circ 0'$$

$$\text{Resolviendo el sistema } \begin{cases} \frac{B+C}{2} = 73^{\circ} 5.6' \\ \frac{B-C}{2} = 65^{\circ} 52.3' \end{cases} \quad B = 138^{\circ} 57.9' \quad C = 7^{\circ} 13.3''$$

$$\frac{a}{2} = 21^{\circ} 19.8' \quad a = 42^{\circ} 39.6'$$

La latitud de B es $(90^{\circ} - 42^{\circ} 39.8') \text{ N} = 47^{\circ} 20.4' \text{ N}$ y

la longitud es $(73^{\circ} 57.5' - 7^{\circ} 13.3') \text{ W} = 66^{\circ} 44.2' \text{ W}$.



b) Solución:

El punto de la travesía que se encuentra más al norte es D, cuyo meridiano es perpendicular al recorrido. En el triángulo esférico rectángulo ACD de la figura, $b = 49^{\circ} 11.4'$ y $A = 36'$

Para a: (4) $\sin a = \sin b \sin A$

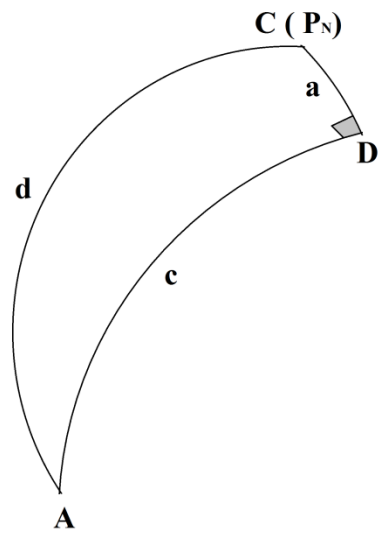
Para C: (5) $\tan C = \tan a \cot A$.

$$. d = 49^{\circ} 11.4'$$

$$A = 36^{\circ} 0'$$

$$a = 26^{\circ} 24.9'$$

$$C = 64^{\circ} 36.0'$$



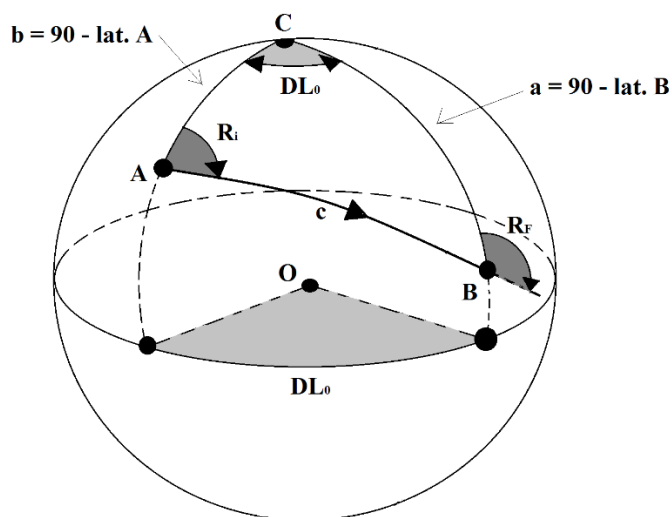
La latitud de D es $(90^{\circ} - 26^{\circ} 24.9')$ N = la longitud es $(73^{\circ} 57.5'' - 64^{\circ} 36')$
 $W = 9^{\circ} 21.5''$ W.

❖ **NAVEGACION CASO 1: conociendo el origen y destino⁵⁹.**

Un barco navega desde un punto A (lat. $40^{\circ} 26' N$, long. $72^{\circ} 14' W$) hasta un punto B (lat. $32^{\circ} 30' N$, long. $17^{\circ} 12' W$) según un arco de circunferencia máxima. Hallar la distancia entre A y B, así como los rumbos de salida y llegada.

Solución:

En este caso concreto, se viaja hacia el este y los puntos de origen y destino están en el hemisferio norte. Por tanto, se considera un triángulo esférico ABC, donde C representa el Polo Norte, A el punto de origen y B el de destino. Se tiene la siguiente correspondencia:



$C = DL_0 = \Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$: incremento de longitud.

. $a = 90^{\circ} - \text{lat. B}$: colatitud de B

. $b = 90^{\circ} - \text{lat. A}$: colatitud de A

$A = R_i$: rumbo inicial.

$B = 180^{\circ} - R_f$: suplementario del rumbo final (circular)

. c : arco recorrido.

⁵⁹ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.286.

Nótese que la longitud oeste se toma como un valor negativo, por lo que

$$C = \lambda_B - \lambda_A = -17^0 14' - (-72^0 14') = 55^0 02'$$

Entonces,

$$\cos c = \text{sen}(lat.A)\text{sen}(lat.B) + \cos(lat.A)\cos(lat.B)\cos(\Delta\lambda)$$

$$\tan A = \frac{\text{sen}(\Delta\lambda)}{\tan(lat.B)\cos(lat.A) - \text{sen}(lat.A)\cos(\Delta\lambda)}$$

$$\tan B = \frac{\text{sen}(\Delta\lambda)}{\tan(lat.A)\cos(lat.B) - \text{sen}(lat.B)\cos(\Delta\lambda)}$$

Sustituyendo los valores concretos de los datos, resulta

$$.c = 44^0 14.6'; A = 82^0 08'; B = 63 22.9'$$

$$\text{Donde } c = 44^0 14.6' = 4,920.40 \text{ km.}$$

Por otra parte, el rumbo inicial es $R_i = 82^0 08'$ en notación circular o, lo que es lo mismo que $R_i = 82 08'$ NE. en notación cuadrantal.

Por último, el rumbo final es $R_f = 180^0 - B = 116^0 37.1'$ en notación circular o, lo que es lo mismo, $R_f = 63^0 22.9'$ SE en notación cuadrantal.

Alternativa: este problema puede ser resuelto mediante las analogías de Neper.

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cot\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cot\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\begin{cases} \frac{A+B}{2} = 72^{\circ}45.5' \\ \frac{A-B}{2} = 9^{\circ}22.5' \end{cases} \quad \text{resolviendo el sistema tenemos, } A = 82^{\circ}08' \text{ y } B = 63^{\circ}$$

23'.

Para c:
$$\frac{\tan\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\tan\left(\frac{c}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)}, \quad \text{despejando el lado } c \text{ y}$$

sustituyendo los valores encontrados, tenemos $c = 44^{\circ}14.6'$.

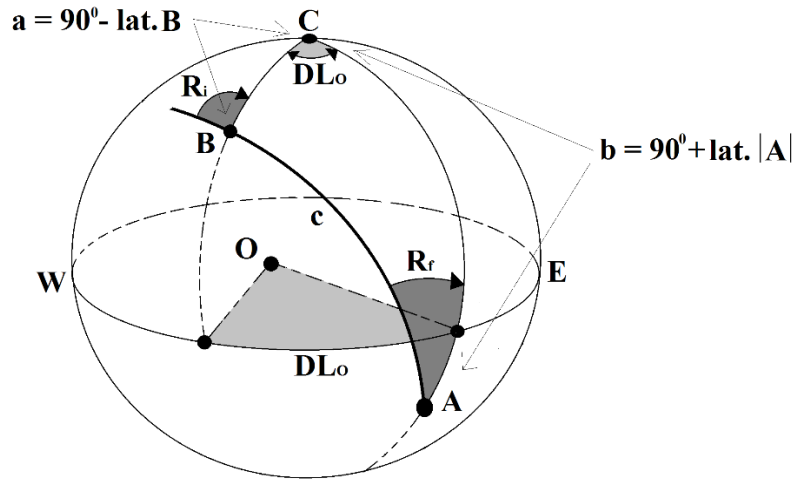
❖ **NAVEGACION CASO 2:** conocidos origen, rumbo y distancias a recorrer⁶⁰.

Un avión vuela sobre un punto A de coordenadas geográfica (lat. 17° 12' S, long. 8° 45' E.), siguiendo un arco de circunferencia máxima. Si el rumbo inicial es $R_i = 330^{\circ}15'$, hallar las coordenadas del punto B que sobrevuela cuando haya recorrido 10,315.64 km, así como el rumbo en ese instante.

Solución:

El punto de origen está en el hemisferio Sur y, previsiblemente dado el rumbo y la distancia recorrida, el de destino está en el Norte. Por tanto, se considera un triángulo esférico ABC, donde C representa el polo norte, A el punto de origen y B el de destino.

⁶⁰ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.288.



Dado que se viaja hacia el Oeste (pues el rumbo en notación circular es mayor que 180°), se tiene $A = 360^\circ - R_i$. Además, dado que el punto de origen está en el hemisferio sur, se tiene que $\varphi_A < 0$ y entonces $b = 90^\circ + |\varphi_A|$. Se tiene las siguientes correspondencias.

$$A = 360^\circ - R_i = 29^\circ 45'.$$

$$b = 90^\circ - \varphi_A = 90^\circ + |\varphi_A| = 10^\circ 712'$$

$$.c = 10,315.64 \text{ km} = 90^\circ 50': \text{ arco recorrido.}$$

$$C = DL_0 = |\lambda_B - \lambda_A|: \text{ incremento de longitud.}$$

Entonces:

$$\cos a = \sin(|\varphi_A|) \cos c + \cos(|\text{lat.} A|) \sin c \cos R_i$$

$$\tan B = \frac{-\sin R_i}{-\tan(|\varphi_A|) \sin c - \cos(R_i) \cos c}$$

$$\tan C = \frac{\sin(\Delta\lambda)}{\cot c \cos \varphi_A - \sin(|\varphi_A|) \cos R_i}$$

Despejando se obtiene:

$$. a = 32^\circ 32.7'; B = 118^\circ 13'; C = 67^\circ 6.9'$$

Como $a < 90$, se deduce que B está en el hemisferio Norte. En concreto, la $\text{Lat.} = 90^\circ - a = 57^\circ 27.3 \text{ N}$.

Como el punto de origen A esta en el hemisferio Este, en las siguientes operaciones se toma su longitud como una cantidad positiva. Por tanto,

$\lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda = \lambda_A - C = -58^\circ 21.9'$, esto es B está en el hemisferio Oeste y tiene por longitud. $\lambda_B = 58^\circ 21.9 \text{ W}$.

Por último, como se navega hacia el Este, el rumbo final en notación circular es igual a B más dos rectos. Esto es, $R_i = 298^\circ 13'$, o de forma equivalente, $R_f = 61^\circ 47' \text{ NW}$ en notación cuadrantal.

❖ **NAVEGACION CASO 3: corte con el Ecuador**⁶¹.

Un avión se encuentra a media noche sobrevolando Rio de Janeiro ($22^\circ 54' \text{ S}$, $43^\circ 12' \text{ W}$) y su rumbo es de $277^\circ 45.5'$. si se desplaza por un arco de circunferencia máxima con una velocidad de 800 km/h, ¿a qué hora cruzara el ecuador? ¿con que longitud lo hará? ¿Cuál será su rumbo en ese momento?

Solución:

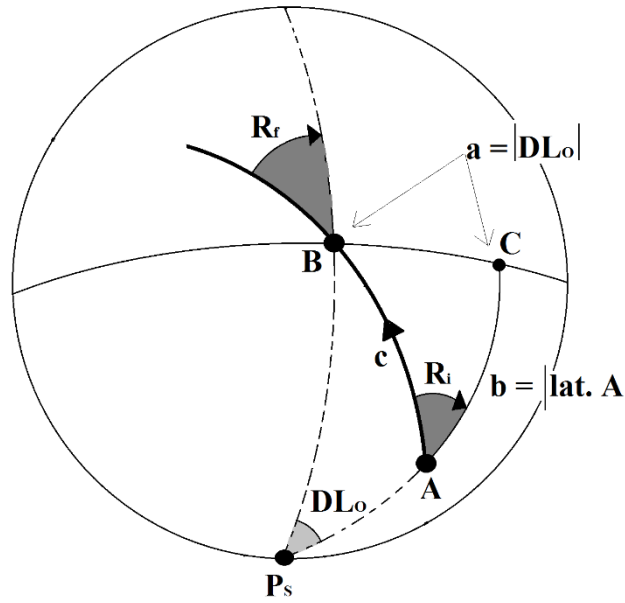
Se considera el triángulo esférico que tiene por vértices **A** (Río), **B** (punto de corte con el Ecuador) y **C** (punto de corte del meridiano de Río con el Ecuador). El triángulo ABC es rectángulo en **C** y se conocen un cateto (b, latitud de Río) y el ángulo no opuesto (A, que depende del rumbo inicial). Por tanto, su resolución se encuentra en caso V del tema 1.3

⁶¹ Rodríguez Acros A. (2012) **Trigonometría plana y esférica con aplicaciones a la navegación**, paraninfo S.A., España, p.290.

Los datos son,

Lat. A = $22^{\circ} 54'$ S, Long. A = $43^{\circ} 12'$ W, $R_i = 277^{\circ} 45.5'$.

$b = |\varphi_A| = 22^{\circ} 54'$, $A = 360^{\circ} - R_i = 82^{\circ} 14.5'$.



Para saber a qué hora cruzara el Ecuador, hace falta conocer la distancia a recorrer, en este caso la hipotenusa c , para calcular la longitud a la que corta el Ecuador, hace falta calcular el cateto a , por último, para calcular el rumbo en ese instante, hace falta calcular el ángulo B . A partir del pentágono de Neper se resuelve de forma directa, cuyos datos son b , A , resulta:

$$\text{sen } b = \tan a \cot A; \cos A = \tan b \cot c; \cos B = \cos b \text{ sen } A.$$

Utilizando la relación existente entre lat. A y b , y entre R_i y A , esta fórmula se transforma en:

$$\tan a = -\text{sen}|\varphi_A| \tan R_i \quad \tan c = \frac{\tan b}{\cos A} = \frac{\tan|\varphi_A|}{\cos R_i} \quad \cos B = -\cos \varphi_A \text{ sen } R$$

Lo que hace innecesario calcular explícitamente a y A. sustituyendo los datos, se obtiene que

$$C = 72^{\circ} 16.6' = 8,038.06 \text{ km.} \quad A = 70^{\circ} 42'.2 \quad B = 24^{\circ} 6.7'$$

Para calcular el tiempo t empleado, se tiene en cuenta que $t = \frac{C}{v}$, donde v es la velocidad. Como la velocidad viene dada en km/h y la distancia se ha obtenido en kilómetro, entonces:

$$t = \frac{C}{v} = \frac{8,038.06 \text{ km}}{800 \text{ k/h}} = 10.048 \text{ h} = 10\text{h } 2\text{min } 1.27\text{seg}$$

Dado que el momento inicial es medianoche, la hora de paso por el Ecuador son las 10 de la mañana y 2 minutos, con 1.27 segundos aproximadamente.

Para hallar el incremento de longitud, se tiene en cuenta que $a = |DL_0|$ y , dado que se viaja hacia el Oeste, $DL_0 = 70^{\circ}42' \text{ W}$. En definitiva, la longitud de B es

$$\lambda_B = \lambda_A + DL_0 = 113^{\circ} 54.2' \text{ W}$$

Por último, el rumbo final R_f se obtiene a partir del complementario de B. Esto es,

$$R_f = 65^{\circ} 53.3' \text{ NW} = 249^{\circ} 6.7'.$$

CONCLUSIONES

Tras la investigación realizada concluimos en varios tópicos relevantes:

- ☐ En el primer capítulo definimos el concepto de trigonometría, trigonometría plana y algunas propiedades, así como también una breve definición de la trigonometría esférica.
- ☐ Describimos en el capítulo 1 los aspectos de la geometría sobre la superficie de una esfera, el concepto de: triángulo esférico, triángulo esférico oblicuángulo, las soluciones alternas de los triángulos esférico oblicuángulos, el método del ángulo auxiliar en los triángulos esféricos, el método de la ecuación de 2do grado y la resolución de triángulos esféricos rectángulos.
- ☐ Establecimos que el estudio de la superficie de una esfera esta descrita por: la circunferencia máxima y circunferencia mínima, los polos, los ángulos o husos esférico, la distancia esférica, el triángulo esférico, el área de los polígonos esféricos, las propiedades de los triángulos esféricos, el exceso esférico y los triángulos esféricos polares.
- ☐ Otro de los subtemas que abordamos fue la resolución triángulos esférico oblicuángulos, en el que se expuso: la ley del seno esférico, la altura esférica, la ley de los cosenos esférico, la ley de la relación cotangente-seno, las funciones del ángulo y lado mitad, las analogías de Gauss o D'Lambre y John Neper, la función semisenoverso, el método del ángulo auxiliar y el método de la ecuación de 2do grado.
- ☐ Otro subtema que se señaló fue el triángulo esférico rectángulo, en el que expusimos: cuatro grupos de fórmulas que da solución a los triángulos esféricos rectángulos, las propiedades fundamentales de los triángulos esféricos rectángulos, las leyes de los cuadrantes, las reglas del pentágono de Neper, la resolución de triángulos esféricos rectiláteros y la

descomposición en triángulos esféricos rectángulos (es decir el método del perpendicular).

- ☐ Concluimos el primer capítulo realizando un análisis de las distintas técnicas y métodos para resolver un triángulo esférico.
- ☐ El segundo capítulo resaltó la importancia de la navegación ortodrómica basada en la resolución de triángulos esféricos, donde se expuso: los elementos básicos de la navegación ortodrómica, la navegación a lo largo de un paralelo, la navegación en un plano, la navegación por latitud media y la navegación a lo largo de una circunferencia máxima.
- ☐ Otros subtemas que abordamos del capítulo dos son: la longitud de un arco de circunferencia, la latitud, los meridianos, los paralelos, la derrota o ruta, la derrota ortodrómica, el rumbo, la distancia ortodrómica, la distancia y velocidad, la diferencia de longitud, el apartamiento y el camino más corto para viajar entre dos puntos.
- ☐ Concluimos en el capítulo dos, que la definición de los conceptos asociados a la navegación y relacionados a la trigonometría esférica, dan como resultado la navegación ortodrómica.
- ☐ Finalmente, concluimos el capítulo tres exponiendo los casos didácticos de la aplicación de la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica, como son: la diferencia de longitudes y distancias, los rumbos y distancias, la navegación a lo largo de un paralelo, la navegación en un plano, la navegación por latitud media, la navegación a lo largo de una circunferencia máxima y los tres casos fundamentales de la navegación ortodrómica.

RECOMENDACIONES

Recomendaciones para la enseñanza de la navegación ortodrómica.

- λ Hacer uso o aplicar los **programa o softwares** de navegación en los laboratorios de informática de los centros académicos.
- λ La **habilitación de un aula virtual**, estimada para los fines de prácticas de navegación ortodrómica de forma marítima o aeronáutica.
- λ Las prácticas físicas o reales en **cruceros de instrucción y viajes a torres de control aéreo**, orientadas al uso de la navegación ortodrómica.
- λ Las **bibliotecas** deben contar con mayor contenido de literatura en formato físico y digital.
- λ Las **escuelas, academias y universidades**, que proporcionan esta enseñanza como asignatura en su pensum, debe contener un mínimo de 8 horas teóricas, 8 horas de practica didácticas, 4 horas de prácticas virtuales y 4 horas de prácticas físicas.

GLOSARIO

- ❖ **Analogía**, semejanza general entre dos métodos. Se emplea para indicar los resultados de un problema a partir del resultado de otro.
- ❖ **Círculo inscrito**, círculo tangente a todos los lados de un polígono convexo.
- ❖ **Circunscrita**, figura geométrica en torno a otra, la cual queda encerrada en la primera.
- ❖ **Geometría**, es el estudio de las propiedades de las formas y del espacio.
- ❖ **Esfera**, superficie cerrada constituida por el conjunto de puntos del espacio que está a una distancia dada, el radio r , de un punto dado, el centro.
- ❖ **Huso**, Parte de la superficie esférica limitada por dos semicírculos máximos que tienen extremos comunes.
- ❖ **Ortogonal**, (curvas) Dos curvas son ortogonales si se cortan formando un ángulo recto.
- ❖ **Trigonometría**, es la rama de la matemática que se utiliza en cartografía y navegación, así como en toda la aplicación de la matemática que se refieran a las relaciones entre longitudes de lados de triángulos y sus ángulos, y en el análisis de movimiento ondulatorios.
- ❖ **Superficie**, conjunto de puntos que se extiende en dos dimensiones. Puede ser plana o curva, finita o infinita.

BIBLIOGRAFIA

- Ayres, Frank Jr. (1970) **TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA**, Editora McGraw-Hill Latinoamérica, S.A. Bogotá, Colombia. Páginas: 152-184.
- Balado, Rodríguez, Juan J. (2011) **INTRODUCCION A LA NAVEGACION COSTERA**, Armada Española, Impreso en el cae-uvicoa, España. Páginas: 4,5.
- Barrero Ripol, Manuel (2008) **TRIGONOMETRIA ESFERICA FUNDAMENTOS**, Impreso E.T.S.I.
- Berrocoso, Manuel (2003) **NOTAS Y APUNTES DE TRIGONOMETRIA ESFRICA Y ASTRONOMIA DE POSICION**, Universidad de Cádiz, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Páginas: 21-68.
- Bolt, Brian (2002) **LEXICO DE MATEMATICAS**, Ediciones Akal, S.A., Impreso en MaterPrint, S.L. Colmenar Viejo (Madrid), España. Páginas: 175, 52, 96, 94.
- Castaño, Jesús María (2001) **DICCIONARIO DE MATEMATICA**, Editora Norma S.A. Apartado Aéreo 53550, Bogotá, D.C. Colombia. Páginas: 188, 78, 79, 80, 119, 113.
- Clapham, Christopher (1998) **DICCIONARIOS OXFORD-COMPLUTENSE MATEMATICA**, Editora Ibérica Grafico, Oxford University Press, impreso en España. Páginas: 130, 257, 232,210.
- Gibilisco, Stan (2003) **TRIGONOMETRY DEMYSTIFIED**, McGraw-Hill, Manufacturado en los Estados Unidos de América. Páginas: 232-250.
- Mencia, José (2003) **NOCIONES DE TRIGONOMETRIA ESFERICA**, Universidad del país vasco-euskal Herriko Uinibertistatea, Páginas: 43-49.

- Nieto Said, José Heber (2011) **TRIGONOMETRIA**, XV Escuela Venezolana para Enseñanza de la Matemática, Mérida, Páginas: 89-98.
- Palmer, Claude Irwin (1934) **PLANE AND SPHERICAL TRIGONOMETRY**, McGraw-Hill Book Company, Inc., Printed in The United States of American. Página: 193-217.
- Rodríguez Aros A. (2012) **TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA CON APLICACIONES A LA NAVEGACION**, Paraninfo S.A. Av. Filipinas, 50 Bajo A / 28003 Madrid, España. Páginas: 167-300.
- Villa Mitja Antoni (1992) **ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA ESFERICA**, 1ra Ediciones UPC, Salgado, 31, Barcelona, Paginas: 43-93, 121.
- Webster Wells, S.B. (1917) **TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA**, D.C, Healt & CIA, Boston, EE.UU. Páginas: 87-123.

ANEXO

ANTEPROYECTO DE INVESTIGACION



Fundada en septiembre 1965

Vicerrectoría de Estudio de Postgrado

Proyecto de Tesis para Optar por el Título de Maestría en Matemática Superior

Título:

***Estrategias de Aplicación de la Trigonometría Esférica
en la Navegación Ortodrómica***

Asesor:

Dr. Ignacio de la Caridad Pérez Yzquierdo.

Sustentante:

Carlos Manuel Carmona Penzo

2015-0542

Santo Domingo, D.N.

República Dominicana

Septiembre, 2016.

INDICE

	Pág.
Introducción	3
Planteamiento del problema.....	5
Objetivo de la investigación	5
Objetivos específicos de la investigación	5
Justificación de la investigación.....	6
Antecedentes de la investigación	6
Marco de referencia	7
Esquema temático.....	8
Recurso disponible	10
Tipo de investigación.....	11
Cronograma de trabajo.....	11
Bibliografía.....	12

INTRODUCCION

El presente anteproyecto expone los detalles para llevar a cabo una investigación bajo el título **“Estrategias de Aplicación de la Trigonometría esférica en la Navegación Ortodrómica”**.

La navegación marítima, es el arte y la ciencia de manejar una embarcación con eficiencia y responsabilidad desde su punto de salida hasta su punto de llegada. La navegación marítima se clasifica en: Navegación Ortodrómica, Navegación Loxodrómica, Navegación por Estima, Navegación Costera, Navegación Astronómica, Navegación Electrónica y Navegación Inercial. Este anteproyecto centra su atención en la navegación ortodrómica, donde a continuación observaremos breve definiciones de cada uno de estos tipos de navegación. Como son:

La Navegación Ortodrómica, es la que sigue la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie de la esfera.

Navegación Loxodrómica, es la que recorre un mismo rumbo cortado por todos los meridianos con un mismo ángulo.

Navegación Costera, esta usa las técnicas de posicionamiento basada en la observación de demoras y distancias a puntos notables de la costa.

Navegación Astronómica, esta se basa en las técnicas de posicionamiento de las estrellas y los demás cuerpos celestes.

Navegación Electrónica, esta determina la posición basada en la ayuda obtenida por los sistemas GPS y GLONASS.

Navegación inercial, esta utiliza las técnicas de datos ofrecidos por acelerómetros y/o giroscopios.

El anteproyecto está estructurado por dos capítulos, el primero expone los elementos de la trigonometría esférica, que se aplican a la navegación ortodrómica.

El segundo capítulo, expone los aspectos básicos o esenciales de la navegación ortodrómica.

La importancia de la navegación ortodrómica, radica en mostrar al navegante de los mares y océanos, una técnica para trasladarse y situarse en cualquier punto de la superficie terrestre.

Este trabajo de investigación pretende mostrar al navegante y docente, la naturaleza en que sustenta la navegación ortodrómica y señalar un enfoque analítico de su aplicación.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la presente investigación se pretende dar a conocer los elementos de la trigonometría esférica y como se aplican en la navegación ortodrómica. De esta manera se muestra la utilidad que tiene la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica. En esta investigación se plantean las siguientes interrogantes:

- a) ¿Cuáles elementos, propiedades y leyes forman parte de la trigonometría esférica?
- b) ¿Cuáles son los elementos inciden en la navegación Ortodrómica?
- c) ¿Cuáles aplicaciones tiene la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica?

2. OBJETIVO DE LA INVESTIGACION

Mostrar las Aplicaciones de la Trigonometría Esférica en la Navegación Ortodrómica.

2.1 OBJETIVO ESPECIFICO DE LA INVESTIGACION

- ❖ Describir los elementos, propiedades y leyes que forman parte de la trigonometría esférica.
- ❖ Conocer elementos que inciden la navegación Ortodrómica.
- ❖ Mostrar las aplicaciones que tiene la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica.

3. JUSTIFICACION DE LA INVESTIGACION

Esta investigación contribuir a mostrar los conocimientos de la trigonometría esférica y sus aplicaciones en el campo de la navegación ortodrómica, basados en un contexto de resoluciones de triángulos esféricos. Indicando al docente y navegante la importancia, y la utilidad de la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica.

Además, busca dar un enfoque de la navegación marítima en ausencia de instrumentaciones electrónicas como GPS, GLONASS, ACELEROMETROS, GIROSCOPIOS y Cartas Náuticas, donde se mostrará un aspecto geométrico y analítico de la navegación sobre la superficie de la esfera terrestre.

4. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACION

Para la presente investigación se consultó a: Grupo Náutica-RD, la Escuela de Marinería de la A.R.D., el Departamento de Navegación Marítima y la Bibliotecas de la Academia Naval de la A.R.D., como resultado de estas consultas se obtuvieron las siguientes respuestas:

- **Grupo Náutica-RD:** “Conocemos el tema, pero aquí en RD no disponemos de esa información”. 14-sep-2016.
- **Escuela de Marinería Mercante de la A.R.D.:** “Solo se prepara el personal para actividades de navegación y manejo de la instrumentación electrónica, hasta el momento este tipo de conocimiento no es impartido por esta escuela”. 15-sep-2016.
- **Biblioteca de la Academia Naval de la A.R.D.:** No se encuentra investigación, tesis o libro que trate sobre el tema. 16-sep-2016.
- **Departamento de Navegación Marítima de la A.R.D.:** Se maneja con más relevancia los aspectos de la navegación costera. 16-sep-2016.

5. MARCO DE REFERENCIA.

5.1 La trigonometría esférica.

5.1.1 La geometría sobre la superficie de una esfera.

5.1.2 Distancia Esférica.

5.1.3 Triángulos esféricos oblicuángulos.

5.1.4 Triángulos esféricos rectángulos.

5.1.5 Descomposición de un triángulo esférico oblicuángulo.

5.2 La navegación ortodrómica.

5.2.1 Ortodrómica.

5.2.2 Distancia ortodrómica o derrota.

5.2.3 Meridianos.

5.2.4 Paralelos.

5.2.5 Latitudes.

5.2.6 Rumbo y Distancias.

5.2.7 Navegación a lo largo de un paralelo.

5.2.8 Navegación a lo largo de una circunferencia máxima.

6. ESQUEMA TEMATICO

Presentación

Dedicatorias y agradecimientos

Indice

Introducción

CAPITULO I

LA TRIGONOMETRIA ESFERICA

1.1 Definición de conceptos.

1.2 Geometría sobre la superficie de una esfera.

1.2.1 Circunferencia máxima y mínima.

1.2.2 Angulo esférico, huso esférico, triángulo esférico y polígonos esféricos.

1.2.3 Propiedades de los triángulos esféricos.

1.2.4 Exceso esférico según los lados y los ángulos

1.2.5 Incentro y Circucentro.

1.2.6 Triángulo esférico polar.

1.3 Triángulos esférico oblicuángulos.

1.3.1 Ley de los senos esféricos

1.3.2 Ley de los cosenos esféricos según los lados y los ángulos.

1.3.3 El ángulo mitad.

- 1.3.4 Semilado.
- 1.3.5 La relación seno-coseno.
- 1.3.6 Relación Cotangente-seno.
- 1.3.7 Analogía de Gauss-D'Lambre.
- 1.3.8 Analogía de John Neper.
- 1.4 Triángulo esférico oblicuángulo (soluciones alternas)
- 1.5 Método del ángulo auxiliar.
- 1.6 Método de la ecuación de 2do grado.
- 1.7 Triángulos esféricos rectángulos.
 - 1.7.1 Propiedades de los triángulos esféricos rectángulos
 - 1.7.2 Reglas del pentágono de Neper.
 - 1.7.3 Descomposición de un triángulo esférico.
 - 1.7.4 Método del perpendicular.

CAPITULO II

LA NAVEGACION ORTODROMICA

- 2.1 Elementos básicos de navegación ortodrómica.
 - 2.1.1 Concepto de longitud, latitud, meridiano, ruta o derrota, paralelo, derrota ortodrómica.
 - 2.1.2 Rumbo y distancias.
 - 2.1.3 Rumbo inicial y rumbo final.

2.1.4 Distancia ortodrómica.

2.2 Navegación a lo largo de un paralelo.

2.3 Navegación por latitud media.

2.4 Navegación a lo largo de una circunferencia máxima.

CAPITULO III

APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRIA ESFERICA EN LA NAVEGACION ORTODROMICA

3.1 Casos didácticos de la aplicación de la trigonometría esférica en la navegación ortodrómica.

Conclusión.

Recomendaciones.

Glosario.

Bibliografías.

Anexos.

3 RECURSOS DISPONIBLES

- Recopilación documental.
- Revisión bibliográfica.
- Software: GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone.; MathType - Design Science, Inc.; Maplesoft, Inc.; Autodesk, AutoCAD, Inc. All rights reserved.

4 TIPO DE INVESTIGACION

Exploratoria.

5 CRONOGRAMA DE TRABAJO

Este Proyecto se pretende realizar en un periodo de tres a cuatros meses, iniciando en septiembre y finalizando en noviembre o diciembre del 2016.

		2016															
	MES	SEPTIEMBRE				OCTUBRE				NOVIEMBRE				DICIEMBRE			
1	ACTIVIDADES /SEMANAS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	Presentación del proyecto de investigación.																
3	Investigación bibliográfica.																
4	Recolección de la información teórica.																
5	Análisis de la información.																
6	Síntesis de la información teórica.																
7	Elaboración del informe final.																
8	Presentación del trabajo de investigación.																

6 BIBLIOGRAFIA PRELIMINAR

- Ayres, Frank Jr. (1970) **TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA**, Editora McGraw-Hill Latinoamérica, S.A. Bogotá, Colombia. Páginas: 152-184.
- Balado, Rodríguez, Juan J. (2011) **INTRODUCCION A LA NAVEGACION COSTERA**, Armada Española, Impreso en el cae-uvicoa, España. Páginas: 4,5.
- Barrero Ripol, Manuel (2008) **TRIGONOMETRIA ESFERICA FUNDAMENTOS**, Impreso E.T.S.I.
- Berrocoso, Manuel (2003) **NOTAS Y APUNTES DE TRIGONOMETRIA ESFRICA Y ASTRONOMIA DE POSICION**, Universidad de Cádiz, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Páginas: 21-68.
- Bolt, Brian (2002) **LEXICO DE MATEMATICAS**, Ediciones Akal, S.A., Impreso en MaterPrint, S.L. Colmenar Viejo (Madrid), España. Páginas: 175, 52, 96, 94.
- Castaño, Jesús María (2001) **DICCIONARIO DE MATEMATICA**, Editora Norma S.A. Apartado Aéreo 53550, Bogotá, D.C. Colombia. Páginas: 188, 78, 79, 80, 119, 113.
- Clapham, Christopher (1998) **DICCIONARIOS OXFORD-COMPLUTENSE MATEMATICA**, Editora Ibérica Grafico, Oxford University Press, impreso en España. Páginas: 130, 257, 232,210.
- Gibilisco, Stan (2003) **TRIGONOMETRY DEMYSTIFIED**, McGraw-Hill, Manufacturado en los Estados Unidos de América. Páginas: 232-250.
- Mencia, José (2003) **NOCIONES DE TRIGONOMETRIA ESFERICA**, Universidad del país vasco-euskal Herriko Uinibertistatea, Páginas: 43-49.

- Nieto Said, José Heber (2011) **TRIGONOMETRIA**, XV Escuela Venezolana para Enseñanza de la Matemática, Mérida, Páginas: 89-98.
- Palmer, Claude Irwin (1934) **PLANE AND SPHERICAL TRIGONOMETRY**, McGraw-Hill Book Company, Inc., Printed in The United States of American. Página: 193-217.
- Rodríguez Aros A. (2012) **TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA CON APLICACIONES A LA NAVEGACION**, Paraninfo S.A. Av. Filipinas, 50 Bajo A / 28003 Madrid, España. Páginas: 167-300.
- Villa Mitja Antoni (1992) **ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA ESFERICA**, 1ra Ediciones UPC, Salgado, 31, Barcelona, Paginas: 43-93, 121.
- Webster Wells, S.B. (1917) **TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA**, D.C, Healt & CIA, Boston, EE.UU. Páginas: 87-123.

ANALISIS ANTIPLAGIO

THE PLAGIARISM CHECKER

PREMIUM

The plagiarism detector has analyzed the following text segments, and did not find any instances of plagiarism:

Text being analyzed	Result
Mencia, José (2003) NOCIONES DE TRIGONOMETRIA ESFERIC...	✓ OK
Propiedades fundamentales de los triángulos esféricos rectángulos46	✓ OK
teoremas fundamentales referentes a los triángulos polares son:	✓ OK
lados del triángulo esférico: son menores que una semicircunferencia	✓ OK
triángulo esférico entonces, la circunferencia circunscrita al triangulo...	✓ OK
Estas propiedades de derivan de las correspondientes propiedades ...	✓ OK
vértices de un triángulo esférico, entonces trácese las tres circunfer...	✓ OK
puede determinar una correspondencia biunívoca entre las caras y los	✓ OK
trigonometría esférica, considera desarrollar las competencias nece...	✓ OK
(1970) TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA, Editora McGraw-...	✓ OK
Gibilisco, Stan (2003) TRIGONOMETRY DEMYSTIFIED, McGraw-...	✓ OK
Villa Mitja Antoni (1992) ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA ES...	✓ OK
(Estos teoremas se derivan de los correspondientes teoremas refer...	✓ OK
Barrero Ripol, Manuel (2008) TRIGONOMETRIA ESFERICA FUN...	✓ OK
Clapham, Christopher (1998) DICCIONARIOS OXFORD-COMPLU...	✓ OK
Quienes dedicaron sus esfuerzos incondicionales para la realización...	✓ OK
centro y radio, respectivamente del paralelo (una circunferencia me...	✓ OK
Cuando las distancias relacionadas son relativamente pequeñas, se...	✓ OK
diametralmente opuesto entonces existirán infinita circunferencia m...	✓ OK
Según Manuel Barrero Ripol, define las propiedadesde los triángulo...	✓ OK

Results: No plagiarism suspected