



VICERECTORIA DE ESTUDIOS DE POSGRADO
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA SUPERIOR

**ESTRATEGIA PARA LA
IDENTIFICACIÓN Y APLICACIÓN DE LOS
MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA**

Sustentante

José Armando Rodríguez Solano

2013 – 0496

Asesor

Msc. Francesco Semerari

**Santo Domingo, R. D.
Diciembre 2014**

RESUMEN

Esta tesis pretende tener una visión mas clara sobre los métodos de integración numérica desde el punto de vista de Newton – Cotes y presentar una estrategia que ayude a identificar cuando y como aplicarlo. La metodología utilizada es el deductivo para identificar y aplicar los métodos y el comparativo, para comparar un método con otro y ver cual tiene más ventaja. Se presenta un capítulo I con una cronología histórico, social y conceptual que se debe conocer para poder introducir el tema a tratar en el capítulo II se aborda los métodos de integración numérica, Riemann, Trapecio y Simpson. Para dar paso al capítulo III, donde se aplican cada uno de estos métodos en un caso de la vida real. Al final se da una estrategia que permitirá identificar y aplicar cada uno de los métodos descritos anteriormente; haciendo una recomendación de cómo continuar la presente investigación.

PALABRAS CLAVES

Integración numérica, aplicación, estrategia, aprendizaje, integral definida, área, trapecio, Riemann, Simpson.

Índice

| | |
|---|----|
| INTRODUCCIÓN | 1 |
| MARCO TEORICO..... | 4 |
| ASPECTOS METODOLOGICOS | 4 |
| CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES PRELIMINARES | 5 |
| 1.1 MARCO SOCIAL: | 5 |
| 1.2 MARCO HISTORICO: | 8 |
| 1.3 MARCO TEÓRICO: | 10 |
| 1.4 MARCO CONCEPTUAL: | 14 |
| 1.4.1. Notación sigma | 14 |
| 1.4.2. Áreas | 16 |
| 1.4.3. Sumas de Riemann e integral definida. | 18 |
| 1.4.3.1. Definición de una suma de Riemann | 19 |
| 1.4.3.2. Integral definida | 19 |
| 1.4.3.3. Funciones Riemann-Integrables | 21 |
| 1.4.3.4. Propiedades de la integral de Riemann | 21 |
| 1.4.4. Primitivas e integración indefinida. | 23 |
| 1.4.4.1. Notaciones para antiderivadas o primitivas | 23 |
| 1.4.5. El teorema fundamental del cálculo. | 24 |
| 1.4.5.1. Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo | 25 |
| CAPÍTULO II: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA | 26 |
| 2.1. MÉTODO DE RECTANGULOS (RIEMANN) | 27 |
| 2.1.1. SUMA DE RIEMANN POR LA IZQUIERDA | 28 |
| 2.1.2. SUMA DE RIEMANN POR LA DERECHA | 29 |
| 2.1.3. SUMA DE RIEMANN POR PUNTO MEDIO | 30 |
| 2.2. MÉTODO DEL TRAPECIO | 35 |
| 2.3. MÉTODO DE SIMPSON | 43 |
| 2.4. MÉTODO DE SIMPSON 3/8 | 49 |
| 2.5. COMPARACION GRÁFICA DE LOS TRES MÉTODOS | 49 |
| 2.6. ESTIMACION DEL ERROR | 50 |

| | |
|--|----|
| CAPÍTULO III: APLICACIONES DE LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA | 55 |
| 3.1. Aplicación: Área de piscina irregular | 55 |
| 3.2. Aplicación: Gasto Cardíaco | 57 |
| 3.3. Aplicación: Integración para determinar la cantidad total de calor | 59 |
| CONCLUSIÓN..... | 62 |
| RECOMENDACIONES..... | 64 |
| BIBLIOGRAFÍA..... | 65 |

INTRODUCCIÓN

La presente investigación, está referida a la elaboración de una estrategia, cuyo propósito es apoyar en la labor de formación de los alumnos, en el curso de Calculo integral aplicada a la ingeniería, en la universidad APEC.

Dicha investigación trata de ayudar a tener una visión general y completa para poder identificar los diferentes métodos de integración numérica convenientes y aplicarlo.

El tema de investigación es diseñar una propuesta de estrategia para la identificación y aplicación de los métodos de integración numérica.

El **objeto de estudio** es el análisis matemático real a través del **campo de acción** los métodos de integración numérica.

La situación problemática detectada es la dificultad que presentan los alumnos universitarios del cálculo integral para identificar y aplicar los métodos de integración numérica.

En definitiva el **problema científico** a resolver es: La toma de decisión en la elección de los métodos de integración numéricas mas apropiados.

Hipótesis: si se aplica la estrategia propuesta en la presente tesis se solucionará el problema existente para identificar y aplicar correctamente los métodos de integración numérica.

A partir del problema detectado surgen unas preguntas, a ser satisfechas con la siguiente investigación:

- ¿Qué método tiene más ventaja?
- ¿Cuáles son los más utilizados en la ingeniería?

- ¿Existirá algún software que permita contribuir con los cálculos de la integración numérica?

Objetivo General de la investigación:

Elaborar una estrategia que contribuya a la identificación y aplicación de los métodos de integración numérica en los estudiantes del curso de Cálculo Integral en el nivel superior.

Objetivos específicos:

- Identificar los diferentes métodos de integración numérica
- Determinar cuando conviene usar los métodos de integración numérica.
- Aplicar cada uno de los métodos de integración numérica según convenga.
- Comprender las ventajas y desventajas de seleccionar el mejor método.
- Presentar una estrategia dirigida a la identificación y aplicación de los métodos de integración numérica.

Para justificar esta investigación podemos decir que el análisis matemático real, cálculo integral, pertenece al currículo de todo ingeniero industrial, eléctrico, civil, entre otros. Dentro del curso de análisis matemático real se encuentran los métodos de integración numéricas, conocimiento indispensable para el ingeniero de hoy día.

Existen autores que dan las razones principales de porque utilizar la integración numérica, por ejemplo:

“Con frecuencia surge la necesidad de evaluar la integral definida de una función que no tiene una primitiva explícita o cuya primitiva tiene valores que no son fácilmente obtenibles, como pueden ser la función de error, combinaciones algebraicas de funciones trascendentes y logarítmicas o la función gamma de Euler, etc.” (Apaza, 2009)

“La necesidad de aproximar numéricamente el valor de una integral surge por dos motivos fundamentalmente:

- *La dificultad o imposibilidad en el cálculo de una primitiva,*
- *La función a integrar sólo se conoce por una tabla de valores.”*
(Martinez)

“Sabemos que cada función continua en un intervalo $[a, b]$, es integrable en dicho intervalo. Sin embargo, no todas las funciones continuas, se pueden integrar de la forma elemental. Este inconveniente se supera haciendo uso de la integración numérica.” (Semerari, 2011)

Observando las opiniones de algunos autores se puede deducir que la razón principal de utilizar los métodos de integración numérica, es la imposibilidad de resolver la integración de manera analítica o inclusive se puede calcular de manera analítica, pero se requiere de un gran conocimiento y manejo del análisis matemático real más profundo, pudiendo ésta ser resuelta más fácilmente, usando algunos de los métodos de integración numérica.

Los métodos de integración numérica dan un resultado aproximado al que nos daría de manera analítica, dependiendo del método usado; el error puede llegar a ser imperceptible.

Actualmente existen muchos métodos de integración numérica, también conocidas como fórmulas de integración de Newton – Cotes (la regla de los trapecios, Simpson, integración de Romberg, curvatura de gauss, entre otros, son algunos de los métodos de integración numérica), donde los estudiantes

deben comprender las ventajas y desventajas al seleccionar el mejor método (o métodos), para cualquier problema específico.

Como son tantos los métodos de integración numérica los alumnos presentan una gran dificultad de identificar cuando usar uno u otro método, lo realizan de manera mecánica, por lo tanto nos planteamos esta investigación.

MARCO DE REFERENCIA

MARCO TEORICO

En este trabajo el autor pretende realizar una exhaustiva revisión de materiales científicos relativos al tema a tratar, como son: revistas, libros, tesis de maestría y doctorales, e internet. También definir unas palabras claves que den luz a lo que el autor pretende explicar, algunos de estos conceptos son estrategia, aprendizaje, aplicación, identificación y además relacionarlo con lo investigado sobre otros autores.

Aunque existe un amplio contenido de métodos de integración numérica, el autor se concentrara en los métodos de integración numérica por Newton – Cotes para los fines de este trabajo.

ASPECTOS METODOLOGICOS

En el presente proyecto el autor pretende utilizar el método deductivo que es un método científico que considera que la conclusión se halla implícita dentro las premisas. Esto quiere decir que las conclusiones son una consecuencia necesaria de las premisas: cuando las premisas resultan verdaderas y el razonamiento deductivo tiene validez, no hay forma de que la conclusión no sea verdadera. Además utilizaremos el método comparativo, para comparar un método con otro y verificar cual es mas eficaz.

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES

PRELIMINARES

En este primer capítulo se desarrollarán los marcos social, teórico y contextual en los cuales se identificará a quien va dirigida esta investigación y se hará un recorrido histórico sobre la evolución de la integración hasta la integración numérica y se definirán un conjunto de conceptos necesarios.

1.1 MARCO SOCIAL:

Esta investigación esta dirigida hacia los alumnos de la universidad APEC, que cursan la asignatura de cálculo y geometría analítica II, que se encuentra en el cuarto período de las carreras de ingeniería eléctrica, electrónica, sistema, industrial entre otra. En dicha institución existen 6 grupos impartidos por 5 profesores. Siendo un total de 1284 alumnos inscritos en la asignatura en el periodo Septiembre – Diciembre del 2014. Esta asignatura comprende el desarrollo desde los límites hasta los diferentes métodos de integración, incluyendo las aplicaciones de las integrales.

Estudiantes de Calculo II de UNAPEC

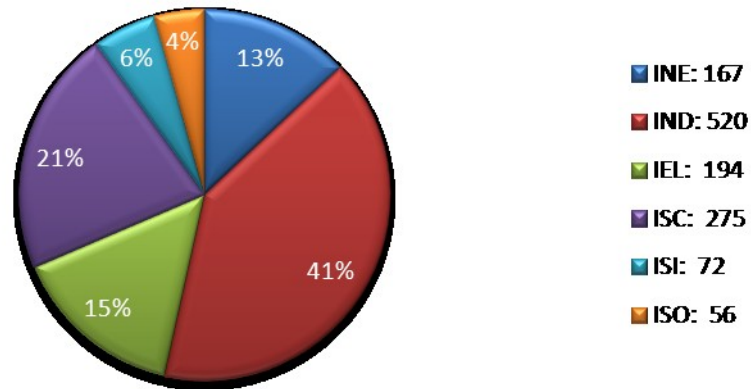


Figura (1). Fuente: Unapec.edu.do

Los estudiantes son personas de diferentes estratos sociales, baja – media – alta, por lo cual hay una diversidad de aprendizaje que habrá que enfrentarla con estrategias apropiadas.

La Universidad APEC es una Institución primogénita cuyas siglas indican que es de Acción Pro Educación y Cultura (APEC), constituida en 1964 por empresarios, comerciantes, profesionales y hombres de iglesia, creando una entidad sin fines de lucro, con el fin de impulsar la educación superior en la República Dominicana.

En 1968, mediante Decreto No.2985, el Poder Ejecutivo le concede el beneficio de la personalidad jurídica para otorgar títulos académicos superiores, con lo cual la Institución alcanza categoría de Universidad.

Dicha institución responde a una filosofía como lo es:

Su misión:

“Formamos líderes creativos y emprendedores para una economía global, mediante una oferta académica completa con énfasis en los negocios, la

tecnología y los servicios, que integra la docencia, la investigación y la extensión, con el fin de contribuir al desarrollo de la sociedad dominicana.”

Su visión:

“Ser la primera opción entre las universidades dominicanas por su excelencia académica en los negocios, la tecnología y los servicios.”

Valores institucionales:

- *“Compromiso y responsabilidad.*
- *Sentido de pertenencia en la institución.*
- *Trabajo colectivo/en equipo.*
- *Calidad en el servicio.*
- *Eficiencia.*
- *Perseverancia.*
- *Respeto a la diversidad”*

Objetivos:

- *“Aportar al mercado de trabajo los recursos humanos idóneos para satisfacer la demanda de las actividades industriales, comerciales, administrativas y de servicios.*
- *Formar profesionales a nivel técnico superior, tecnólogo, grado y posgrado, de acuerdo con las exigencias nacionales e internacionales de la ciencia y la tecnología.*
- *Preparar y especializar profesionales en aquellas tecnologías necesarias para el desarrollo industrial y empresarial.*
- *Promover la formación integral, a través de la docencia, el estudio, la divulgación, la extensión y la educación continuada.”*

Principios:

“Para cumplir con su misión, la Universidad ha definido y adoptado principios como fundamento y orientación para el desarrollo de sus procesos esenciales.” (UNAPEC, 2005)

1.2 MARCO HISTORICO:

El origen del cálculo se remonta a tiempos muy lejanos, los primeros pasos fueron dados por los matemáticos griegos. Los métodos que estos matemáticos usaban se llaman el método exhaustivo dado a conocer con una base científica por Eudoxo en el año 370 a. c.

El método se llama exhaustivo ya que considera las áreas medidas como expandiéndolas de tal manera que cubran más y más del área requerida. Eudoxo, Arquímedes fueron precursores del concepto de integral y se centraron en cuestiones geométricas tales como el cálculo de áreas o volúmenes.

Arquímedes utilizó el método exhaustivo para encontrar de manera aproximada el área de un círculo. Esto es una manera temprana de definición de integral llevando al resultado aproximado de π .

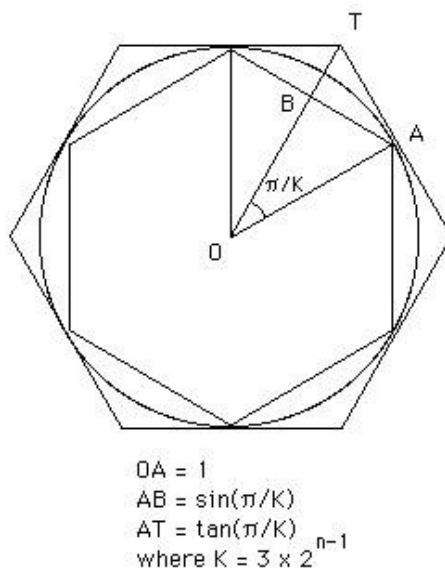


Figura (2) fuente: astroseti.org

En el siglo XVII, se produjo la necesidad de explicar y comprender ciertos fenómenos naturales, desembocando en una concepción dinámica de la integral, frente a la concepción estática de la geometría griega. Así, Kepler estableció las leyes que describen matemáticamente el movimiento de los planetas en sus órbitas, y en particular, demostró que “el radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales”. Por su parte, figuras como Galileo o Barrow consideraron el problema del movimiento y contribuyeron al desarrollo del cálculo infinitesimal.

Con el Teorema Fundamental del Cálculo, la derivación y la integración se establecieron como operaciones inversas, lo que supuso un nuevo significado de la integral.

En el siglo XIX, “Cauchy formalizó el concepto con un procedimiento de paso al límite. Estas cuatro situaciones nos permiten considerar cuatro configuraciones distintas del concepto de integral” (Ordóñez y Contreras, 2010. p. 28).

Si bien la integración definida se uso mucho antes de Georg Friedrich Bernhard Riemann, éste generalizó el concepto y lo hizo aplicable a clases muy amplias de funciones.

Luego se dio un avance en la integración definida con la regla de Barrow (también llamada de Newton – Leibniz), Suponiendo que $f(x)$ sea continua en $[a, b]$, donde $F(x)$ es cualquier primitiva de $f(x)$, es decir, una función cuya derivada de una función sea $f(x)$.

“Por supuesto que, si no se tiene una primitiva expresada en términos de funciones elementales, no es posible evaluarla en los límites de integración, y la regla de Barrow se hace inaplicable.” (Álvarez)

Debido a la imposibilidad de resolver integrales definidas por la regla de Barrow y Riemann surgen los métodos de integración numérica, conocidos como cuadratura o fórmulas de Newton – Cotes.

1.3 MARCO TEÓRICO:

Como el tema de investigación es “Estrategia de identificación y aplicación de los métodos de integración numérica” pretendemos dar una noción del significado de cada una de estas palabras que se consideran claves fundamentales para comprender el desarrollo de esta tesis y que se consideran importantes definir:

Estrategia: es un conjunto de acciones que se llevan a cabo en el tiempo planificadas sistemáticamente, para lograr una meta. Es decir, es la manera en que un individuo piensa las acciones que va ha realizar luego.

Según Amatista y Camacho la definen, *“la estrategia es como una guía, en donde están presentes todas las acciones que nos precisan las metas de modo que podamos establecer prioridades de acuerdo a las necesidades”*

Existen diferentes tipos de estrategias que se pueden desarrollar, como son: Estrategia cognitiva en la atención, estrategias cognitivas en la codificación, estrategias de recuperación y estrategias cognitivas en la recuperación de información.

Aprendizaje: es la manera en la cual el individuo interioriza la información que considera importante, en diferentes ámbitos: conceptos, procedimientos y actitudes.

Hay que aprender a aprender, para aprender los conceptos no es suficiente la repetición, hay que relacionarlos, comprenderlos y poner en marcha un proceso de aprendizaje realmente significativo.

Debido a la variedad de cultura que tienen los individuos así mismo interiorizan la información poseyendo cada una su característica propia:

- **El aprendizaje abierto:** no posee fases ni esquemas prefijados, más bien está centrado en intereses, necesidades y posibilidades de los alumnos, que favorece ofertas de aprendizaje fuera del ámbito escolar. De esta manera su organización es libre y flexible, se reduce la enseñanza frontal a favor de la enseñanza personal y de equipo.
- **Aprendizaje activo:** favorece el aprendizaje por medio de la acción y la participación, activando muchos sentidos. El alumno o la alumna

participa en el desarrollo de su propio aprendizaje y la forma ideal es el trabajo por proyectos.

- **Aprendizaje interrelacionado por áreas:** este aprendizaje rompe con la separación del conocimiento por asignaturas aisladas, buscando la interdisciplinariedad que se debe dar alrededor de un tema, un problema, un proyecto o necesidad.
- **Aprendizaje dialógico:** es donde las personas demuestran que son capaces de comunicarse y generar acciones a través del consenso, transformando las relaciones entre las personas y su entorno.
- **Aprendizaje significativo:** en este aprendizaje se vinculan los nuevos conocimientos de manera clara y estable con los conocimientos previos.
- **Aprendizaje por descubrimiento:** este aprendizaje se fundamenta en la psicología cognitiva, partiendo del conocimiento y la experiencia de los alumnos(as) favoreciendo una elaboración autónoma del nuevo conocimiento.

Según Szczurek (1989), considera que *“las estrategias de aprendizaje están conformadas por un conjunto de técnicas, actividades, organización de secuencia, de grupos, tiempo y ambiente que intervienen en el aprendizaje”*.

Integral definida: es uno de los conceptos mas analizados del análisis matemático real, es un proceso de convergencia y geométrico a través del área bajo una curva.

En el aprendizaje del concepto de Integral, al igual que en el área, los alumnos ponen de manifiesto tres imágenes mentales: “primitiva, operativa y descriptiva” Turégano (1994, p. 248). En la primitiva hacen referencia a la Integral asociada a una fórmula que les permite calcular áreas de figuras irregulares, aquí los alumnos no tienen una imagen específica ni de área ni de Integral, la operativa corresponde a una imagen de Integral como sinónimo de área, donde el alumno no ha logrado integrar todos los elementos subyacentes al concepto de Integral en un sólo concepto y la imagen descriptiva es la articulación geométrica y numérica del concepto, porque logran el paso al límite tanto a nivel de percepción visual como numérico y pueden transferirla a otros contextos.

Generalmente los estudiantes cometen el error de identificar la integral definida, como una primitiva y la desarrollan a través de la regla de Barrow. Inclusive si no se puede resolver por esta manera.

Es el caso de los resultados encontrados por Mundy (1984), donde un porcentaje alto de estudiantes no supo responder a la pregunta: ¿Por qué

$$\int_{-1}^1 x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{-1}^1 = (-1) - (1) = -2$$

, es incorrecto?

Esto pone en evidencia que el estudiante no sólo desconoce las condiciones para poder aplicar la regla de Barrow, sino que además muestra una desconexión entre la definición del concepto de Integral Definida y la imagen particular que tiene de este concepto matemático.

1.4 MARCO CONCEPTUAL:

Existen un conjunto de conceptos que deben ser dominados para comprender los diferentes métodos de integración numérica, como son:

1.4.1. Notación sigma

Empezamos introduciendo una notación para las sumas, que se denomina notación sigma y se simboliza por la letra griega Σ .

Definición notación sigma:

La suma de n términos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se escribe

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

donde i es el índice de suma, a_i es el i -ésimo término de la suma, y los límites inferior y superior de la suma son 1 y n .

Propiedades de la notación sigma se derivan de las leyes asociativa y conmutativa de la suma y la distributiva de la suma respecto de la multiplicación:

$$1) \sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i$$

$$2) \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

Teorema: Fórmula de suma

$$1. \sum_{i=1}^n c = cn$$

$$2. \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$3. \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$4. \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Ejemplo de evaluación de una suma:

Calcular $\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{n^2}$ para $n = 10, 100, 1000$ y 10000

Aplicando el teorema observamos que

$$\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i+1) \quad \text{Sacamos fuera de la suma el factor constante } \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) \quad \text{Escribir como dos sumas}$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \quad \text{Aplicar el teorema}$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2 + 3n}{2} \right)$$

$$= \frac{n+3}{2n} \quad \text{Simplificar}$$

Ahora sustituyendo los valores de n obtenemos.

| n | $\sum_{i=1}^n \frac{i+1}{n^2} = \frac{n+3}{2n}$ |
|-------|---|
| 10 | 0.65000 |
| 100 | 0.51500 |
| 1000 | 0.50150 |
| 10000 | 0.50015 |

Así para el límite de $\frac{n+3}{2n}$ cuando n tiende a infinito, se puede escribir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2}$$

1.4.2. Áreas

Se desea obtener el área de una región A acotada por la curva $Y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo $f(x)$ continua en $[a, b]$.

Por lo tanto dividimos dicho intervalo en n intervalos definidos por $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Los puntos extremos de los intervalos obtenidos son:

$$\overbrace{a}^{x_0} < \overbrace{a+\Delta x}^{x_1} < \overbrace{a+2\Delta x}^{x_2} < \dots < \overbrace{a+n\Delta x}^{x_n=b}$$

por ser f continua, el teorema de los valores extremos asegura la existencia de un mínimo y de un máximo de $f(x)$ en cada sub intervalo.

$f(m_i)$ = Valor mínimo de $f(x)$ en el i -ésimo subintervalo

$f(M_i)$ = Valor máximo de $f(x)$ en el i -ésimo subintervalo

Se puede definir que la suma de las áreas de los rectángulos inscritos se llama una **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se llama **suma superior**.

$$\text{suma inferior} = s(n) = \sum_{i=1}^n f(m_i)\Delta x \quad \text{Área de rectángulos inscritos}$$

$$\text{suma superior} = S(n) = \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x \quad \text{Área de rectángulos circunscritos}$$

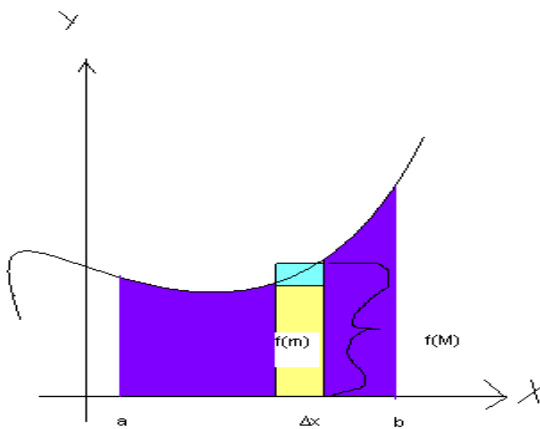


Figura (3). Fuente: autor

Se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área de la región está comprendida entre estas dos sumas.

$$s(n) \leq \text{área de la región} \leq S(n)$$

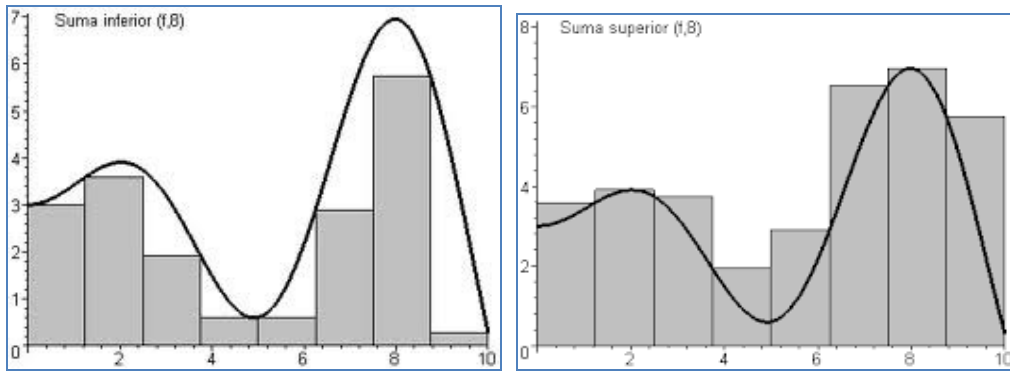


Figura (4). Fuente: lemat.unique.es

1.4.3. Sumas de Riemann e integral definida.

Aunque la integral definida se había utilizado con anterioridad, fue Riemann quien generalizó el concepto para cubrir una categoría más amplia de funciones.

La suma de Riemann consiste en trazar un número finito de rectángulos debajo de una curva, calcular el área de cada rectángulo y sumarlos. El problema es que si la curva es muy pronunciada podría dar un margen de error muy grande su cálculo.

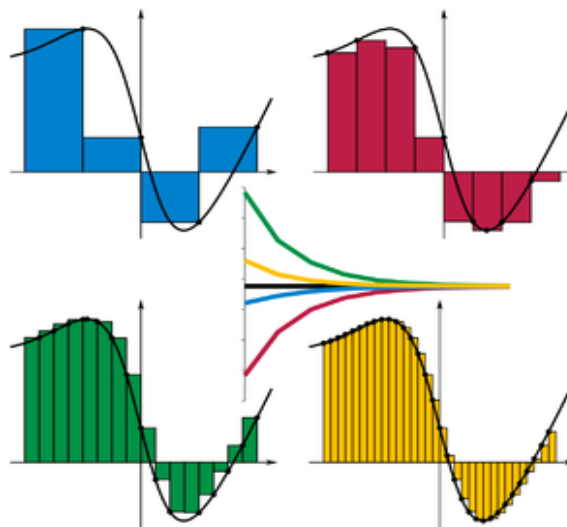


Figura (5). Fuente Wikimedia.org

1.4.3.1. Definición de una suma de Riemann

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

donde Δx_i es la longitud del i -ésimo subintervalo. Si c_i es cualquier punto del i -ésimo subintervalo, la suma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

es la suma de Riemann de f asociada a la partición Δ .

La longitud del subintervalo mas grande de una partición Δ se llama norma de la partición y se denota por $\|\Delta\|$. Si todos los subintervalos son de igual longitud, se dice que la partición es regular y la norma se denota por,

$$\|\Delta\| = \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (\text{Partición regular})$$

1.4.3.2. Integral definida

Si f esta definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y existe el límite

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

entonces f es integrable en $[a, b]$ y el límite se denota

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Ese límite se llama la integral definida de f entre a y b . El número a se llama límite inferior de integración y el b límite superior de integración.

Ejemplo: Calcular la integral definida como límite

$$\int_{-2}^1 2x \, dx$$

La función es integrable en el intervalo $[-2,1]$, por ser continua. Elegimos una partición de igual longitud.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n}$$

Elegiendo como c_i el punto terminal derecho de cada subintervalo, se tiene

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + i\left(\frac{3}{n}\right) = -2 + \frac{3i}{n}$$

Por lo tanto, la integral definida viene dada por

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 2x \, dx &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \left(\frac{3}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n \left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} \left\{ -2n + \frac{3}{n} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n} \right) = -3 \end{aligned}$$

como la integral es negativa no representa el área de la región.

1.4.3.3. Funciones Riemann-Integrables

- Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable.
- Toda función continua y acotada en un intervalo cerrado y acotado, excepto en una cantidad numerable de puntos, es Riemann-Integrable.
- Recíprocamente, si una función acotada definida en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable, entonces es continua en ese intervalo excepto como mucho en una cantidad numerable de puntos.
- Toda función monótona y acotada en un intervalo cerrado y acotado es Riemann-Integrable

1.4.3.4. Propiedades de la integral de Riemann

Sean f, g funciones integrables Riemann definidas en el intervalo $[a, b]$.
Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Propiedades de linealidad:*

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

- Si c es un número real, entonces $c f(x)$ es integrable en $[a, b]$, y se cumple:

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$$

- La función $(f + g)(x)$ es integrable en $[a, b]$, y se cumple:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

2. Propiedad de aditividad respecto del intervalo:

- Si $a < c < b$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. Propiedades de monotonía:

- Se cumple que $|f|$ es integrable y:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- Si g es otra función definida en $[a, b]$ tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

1.4.4. Primitivas e integración indefinida.

Se define que F es la **primitiva o antiderivada** de una función f , en un intervalo (a, b) si $F'(x) = f(x)$ para todo x en dicho intervalo.

Entonces la función F es una antiderivada de f .

Se puede observar que $F(x) = x^5, F(x) = x^5 + 3$ y $F(x) = x^5 - 154$ son todas primitivas de $f(x) = 5x^4$. Por lo tanto, no importa la magnitud del termino independiente que contenga, la función primitiva general es $F(x) = x^5 + C$; siendo C una constante arbitraria.

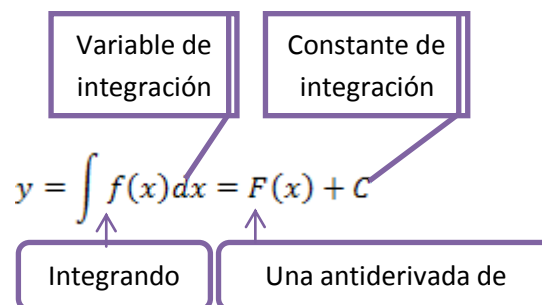
1.4.4.1. Notaciones para antiderivadas o primitivas

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

siendo conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente, despejando dy de la ecuación anterior.

$$dy = f(x) dx$$

Las soluciones de esta ecuación se denominan *antiderivación* o *integración definida* y se denota mediante la simbología de Leibniz,



A partir de ésto es que se define la integración, como la inversa de la derivación.

Esta ecuación permite obtener fórmulas de integración a partir de fórmulas de derivación como se muestra en el anexo.

Ejemplos: integración de funciones

a) $\int dx = x + c$

b) $\int (x - 3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$

1.4.5. El teorema fundamental del cálculo.

Si G es cualquier antiderivada de f , entonces $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Demostración:

Por hipótesis $G'(x) = f(x)$. Así, $F'(x) - G'(x) = 0$, y por tanto, $F(x) - G(x) = C$ donde C es una constante, o $F(x) = G(x) + C$ para todo x .

En particular,

$$F(b) = G(a) + C$$

$$F(a) = G(a) + C$$

Pero $F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ (entre $x=a$ y $x=a$, no hay área alguna contenida)

Por lo tanto (2) nos da $0 = G(a) + C$ o $C = -G(a)$. Sustituyendo esto en (1),

tenemos $F(b) = G(b) - G(a)$. Pero $F(b) = \int_a^b f(x)dx$

1.4.5.1. Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

- a) Conocida una primitiva de f , disponemos de una forma de calcular integrales definidas que no requiere hallar el límite de una suma.
- b) Al aplicar el teorema fundamental del Cálculo, es conveniente la siguiente notación.

$$\int_a^b f(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

por ejemplo para calcular $\int_1^2 x^2 dx$ podemos escribir

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{(4)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

- c) No es necesario incluir una constante de integración C en la primitiva.

CAPÍTULO II: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Como se ha observado en el capítulo anterior el cálculo integral de una función definida continua se hace mediante la aplicación del teorema fundamental del cálculo. Es decir, sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, entonces;

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Sin embargo, no siempre es posible aplicar el método de Barrow o el teorema fundamental del cálculo para resolver integrales que sean combinaciones de funciones algebraicas trascendentes y logarítmicas o la función gamma Euler, etc. Por ejemplo:

$$\int_{-1}^2 e^x \arcsen x dx, \quad \int \frac{\text{sen } x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx,$$

Ninguna de estas es posible resolver aplicando operaciones elementales del cálculo integral conocidas; este inconveniente se supera haciendo uso de la **integración numérica**, haciendo aproximaciones.

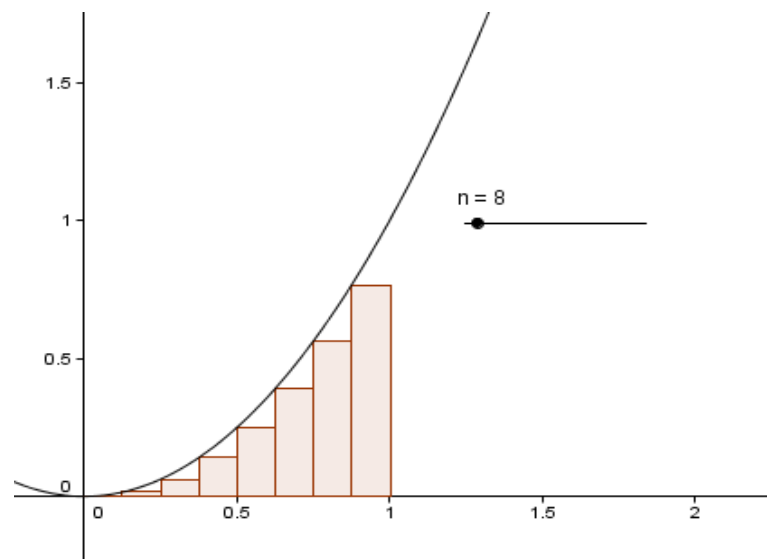
La **integración numérica** es el cálculo aproximado de una integral utilizando técnicas numéricas. Existen una amplia gama de métodos disponibles, siendo uno de los más usados las **fórmulas de Newton-Cotes**, que aproximan una función tabulada en una secuencia de intervalos equidistantes, con polinomios de distintos grados. Si los extremos son tabulados, entonces las fórmulas de 2 y 3 puntos son la **regla del Trapecio y Simpson**. La fórmula de 5 puntos se llama **Regla de Boole**. Una generalización de la regla del Trapecio es la **integración de Romberg**.

Existen dos maneras de utilizar las formulas de Newton – Cotes, cuando los intervalos son cerrados y abiertos. Las fórmulas cerradas se usan cuando se conocen los puntos al inicio y final de los límites de integración y las fórmulas abiertas cuando se tienen los límites de integración extendidos más allá del rango. Este ultimo caso no se utiliza en la integración definida, pero si se utiliza ampliamente en la solución de ecuaciones diferenciales.

2.1. MÉTODO DE RECTANGULOS (RIEMANN)

Antes de que la integración fuese desarrollada, el área bajo la curva se calculaba dividiendo en rectángulos el espacio bajo la curva, sumando el área de estos, y aproximando el resultado.

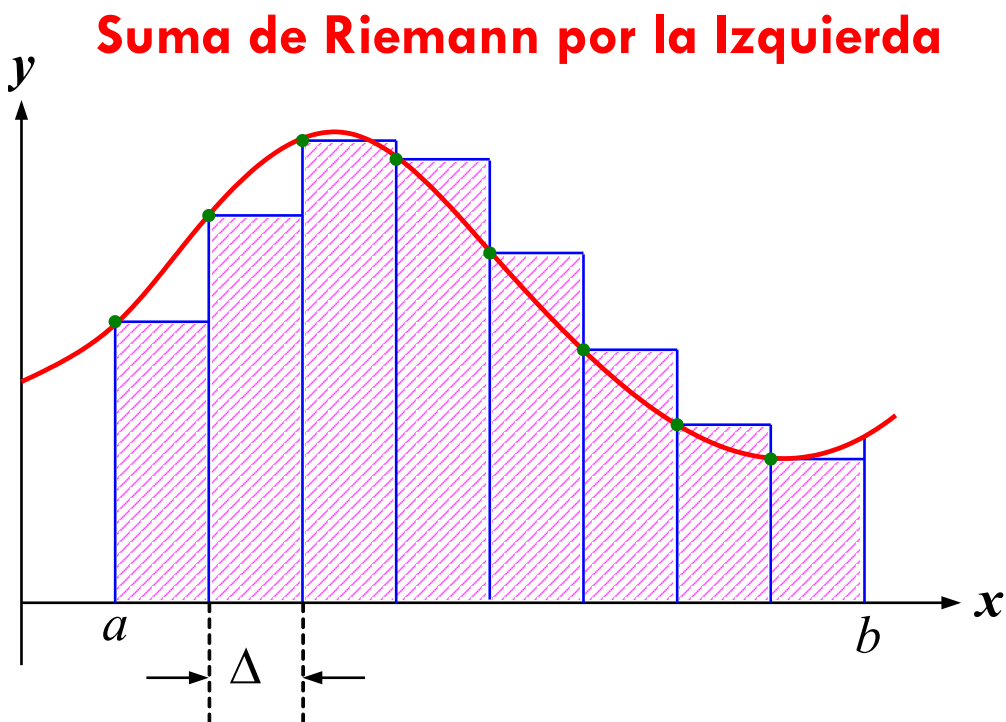
A medida que aumentaba el número de rectángulos (n), se llegaba a una aproximación más exacta del área.



Existen dos maneras de calcular la integral definida a través del método de los rectángulos (Riemann).

2.1.1. SUMA DE RIEMANN POR LA IZQUIERDA

En la suma de Riemann por la izquierda, se toma el extremo izquierdo de la función, para la altura de cada rectángulo.



Donde el área la podemos representar como una suma de la altura de cada rectángulo por la izquierda ($f(x)$), multiplicada por el ancho de cada rectángulo (Δx).

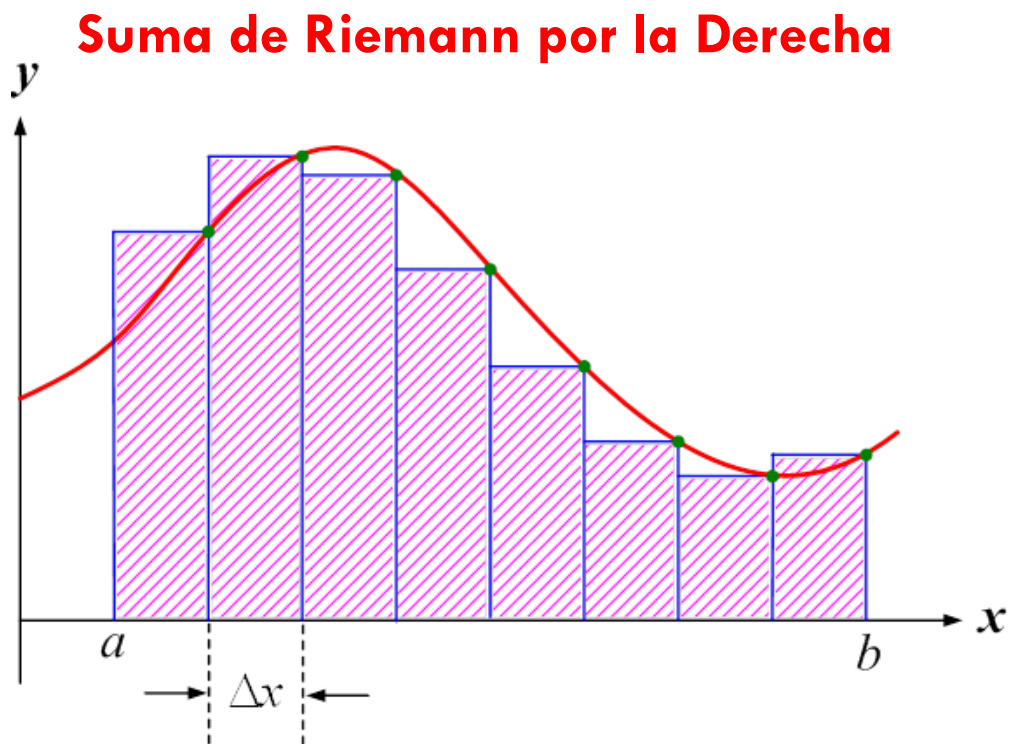
$$A = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})]$$

Por lo tanto, se deduce la siguiente fórmula:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_{i-1}) \Delta x$$

2.1.2. SUMA DE RIEMANN POR LA DERECHA

En la suma de Riemann por la derecha, se toma el extremo derecho de la función, para la altura de cada rectángulo.



Donde el área la podemos representar como una suma de la altura de cada rectángulo por la izquierda ($f(x)$), multiplicada por el ancho de cada rectángulo (Δx).

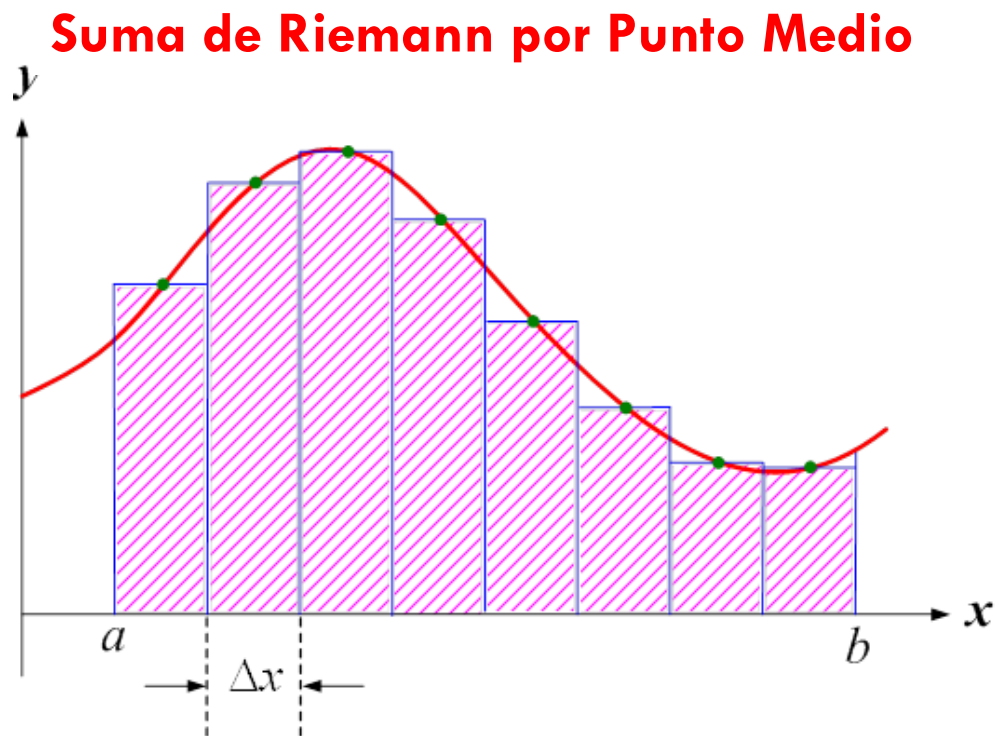
$$A = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)]$$

Por lo tanto, se deduce la siguiente formula:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

2.1.3. SUMA DE RIEMANN POR PUNTO MEDIO

En la suma de Riemann por el punto medio, se toma el valor medio de la función, para la altura de cada rectángulo.



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right]$$

Donde podemos deducir la fórmula general,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \left[\frac{b-a}{n}\right]$$

Es bueno aclarar que el área total de los rectángulos difiere cuando la función es creciente o decreciente.

Cuando f es creciente,

Suma por la izquierda \leq **Área total desde** \leq Suma por la derecha

$$a \leq x \leq b$$

Cuando f es decreciente,

Suma por la derecha \leq **Área total desde** \leq Suma por la izquierda

$$a \leq x \leq b$$

En definitiva **la integral definida** de $f(x)$ desde a hasta b

$$\int_a^b f(x) dx$$

Es igual al límite de las sumas de Riemann por la izquierda, derecha y punto medio cuando $n \rightarrow \infty$. Esto es,

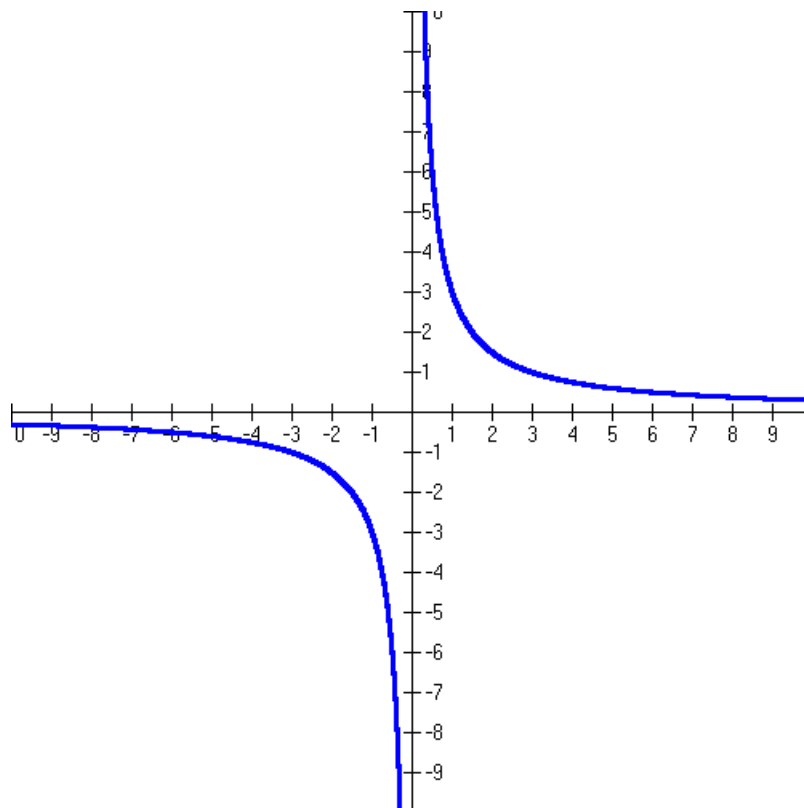
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

Límite por la izquierda = límite por punto medio = límite por la izquierda

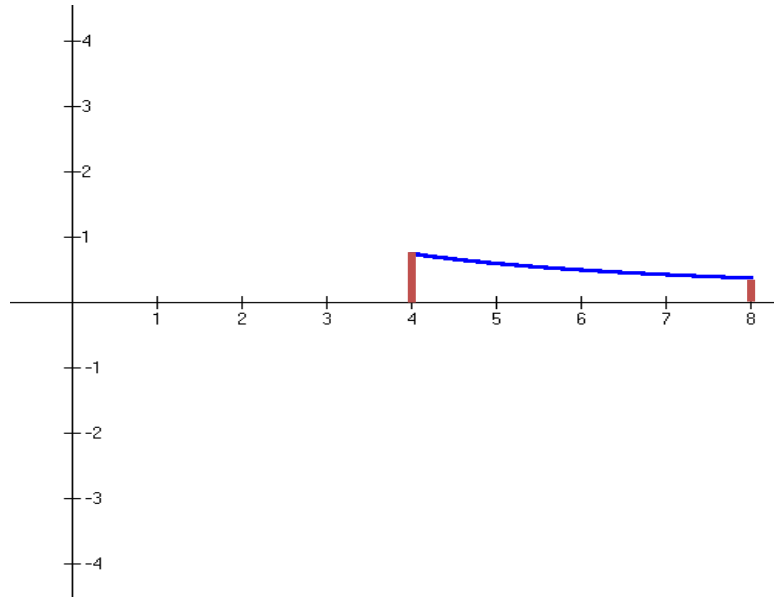
Ejemplo: Representa el área entre la curva $3/x$ y el eje x desde $x = 4$ hasta $x = 8$ por el método de los rectángulos.

se representa por $\int_4^8 \frac{3}{x} dx$

Gráficamente tenemos:



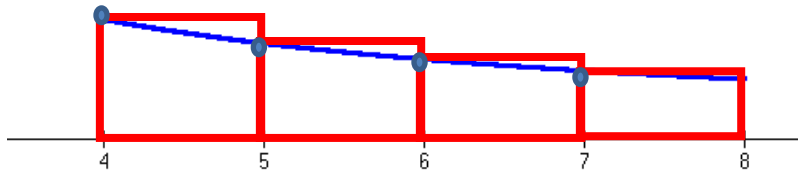
El intervalo de integración $[4,8]$ es:



Solución: a través de este método podemos aproximarnos por la izquierda, derecha y punto medio.

Aproximando utilizando sumas por la izquierda de $n = 4$

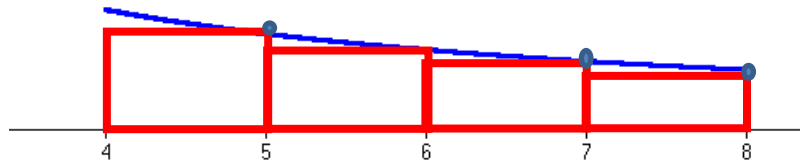
$$\int_4^8 \frac{3}{x} dx = \frac{8-4}{2} [0.75 + 0.60 + 0.50 + 0.42857] = 1[2.279] = 2.279$$



| x | F(x) |
|---|---------|
| 4 | 0.75 |
| 5 | 0.60 |
| 6 | 0.50 |
| 7 | 0.42857 |

Aproximando utilizando sumas por la derecha de $n = 4$

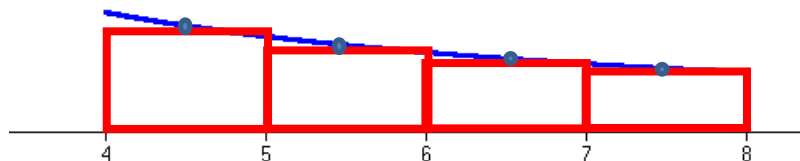
$$\int_4^8 \frac{3}{x} dx = \frac{8-4}{2} [0.60 + 0.50 + 0.42857 + 0.375] = 1[1.904] = \mathbf{1.904}$$



| x | F(x) |
|---|---------|
| 5 | 0.60 |
| 6 | 0.50 |
| 7 | 0.42857 |
| 8 | 0.375 |

Aproximando utilizando punto medio de $n = 4$

$$\int_4^8 \frac{3}{x} dx = \frac{8-4}{2} [0.66667 + 0.54545 + 0.46154 + 0.4] = 1[2.074] = \mathbf{2.074}$$



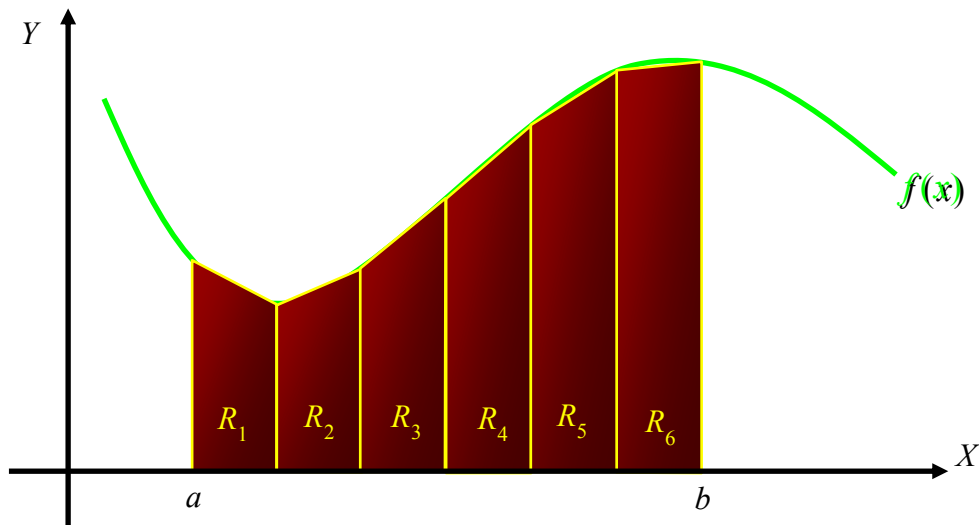
| x | F(x) |
|-----|---------|
| 4.5 | 0.66667 |
| 5.5 | 0.54545 |
| 6.5 | 0.46154 |
| 7.5 | 0.4 |

Como la función es decreciente,

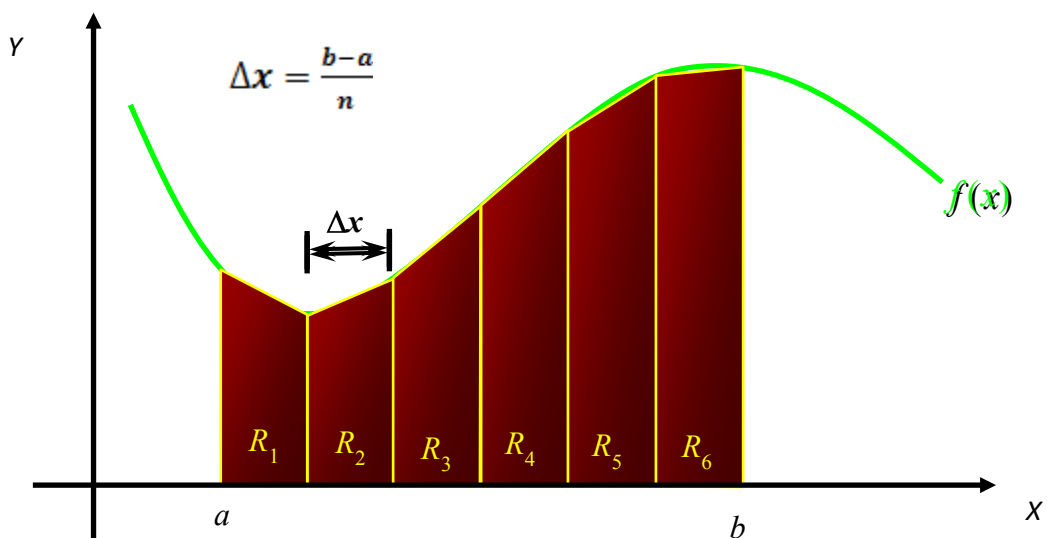
Suma por la derecha \leq **Area total** \leq Suma por la izquierda

2.2. MÉTODO DEL TRAPEZIO

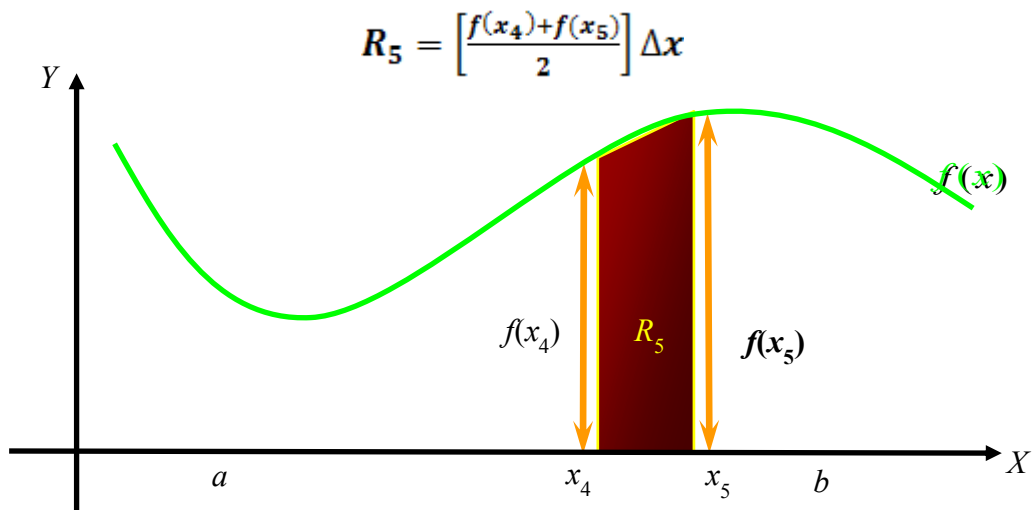
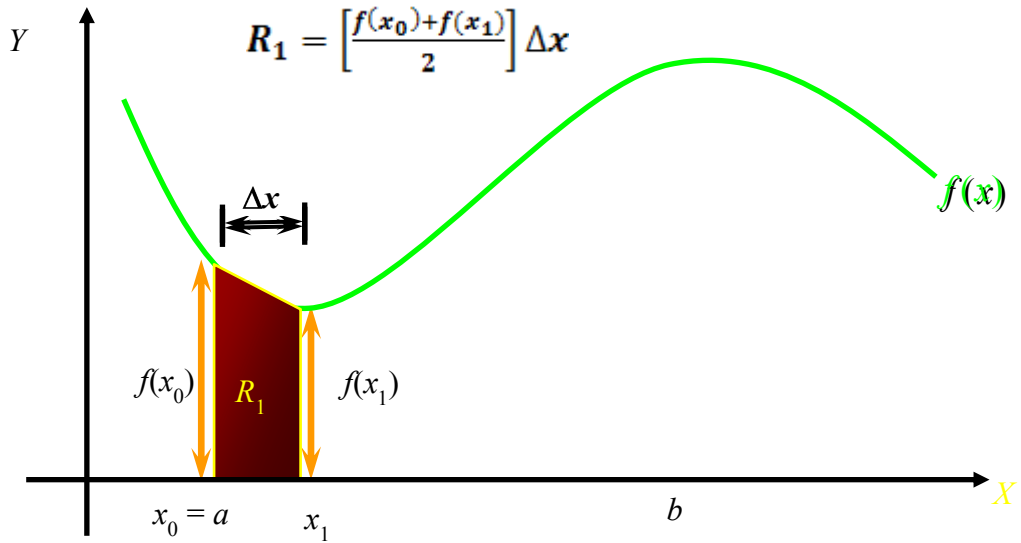
Consiste en aproximar el área debajo de la curva con trapecios, como se ilustra en las figuras. Cada trapezoide posee un área proporcional al promedio de la altura de los lados multiplicados por la base (espesor).



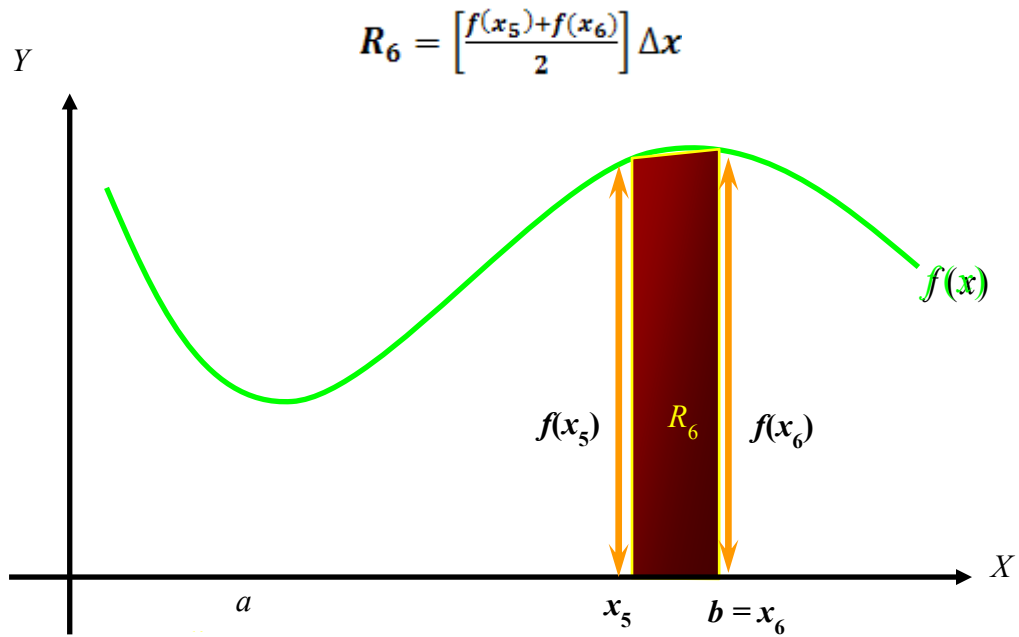
Los incrementos Δx usados para cada trapecio se obtienen de dividir el intervalo en n segmentos iguales (en este ejemplo $n = 6$):



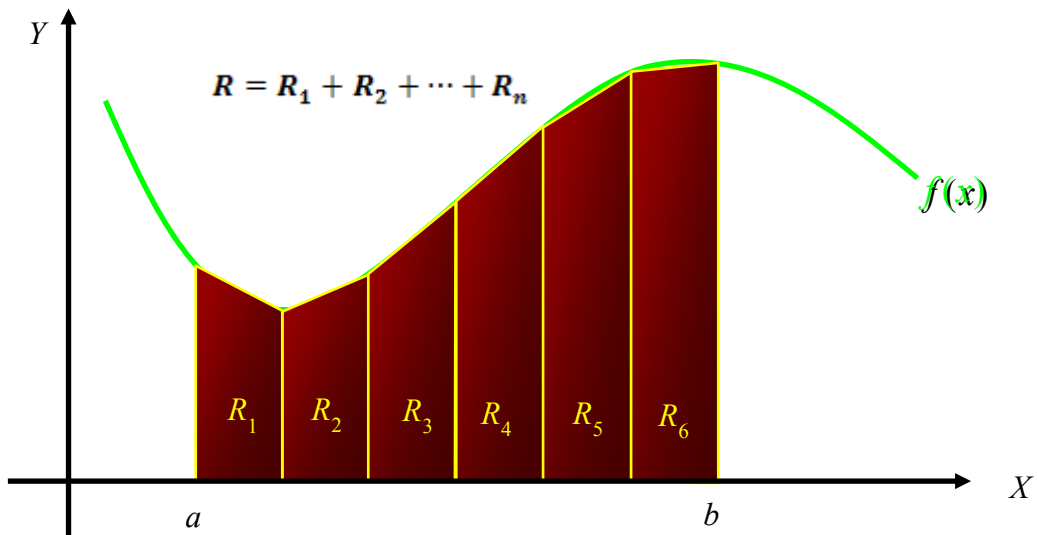
El área de cada trapecio se calcula multiplicando su base Δx , por el promedio de la altura:



Se continúa sucesivamente hasta obtener el área del último rectángulo como indica la figura siguiente.



Al sumar las áreas R_1 hasta R_n ($n = 6$ en este caso) de los trapecios, ésto nos da una aproximación del área deseada de la región R :



Demostración:

El método del trapecio se puede ampliar si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, todos de la misma longitud.

Sea $P = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ la partición que se forma al hacer dicha subdivisión. Usando propiedad de la integral tenemos que:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

Aplicando la regla del trapecio en cada una de las integrales, obtenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (x_1 - x_0) \left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \right] + \dots + (x_n - x_{n-1}) \left[\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right]$$

Deduciéndose la fórmula del método del trapecio:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Donde

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b - a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Ejemplo:

Primero resolver el valor de la integral dada por el método analítico y luego aproximarla con $n=4$ y $n=10$.

1) Resolviendo la integral por el método analítico:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right] = -\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \approx 0.5$$

2) Aproximar el valor de $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ usando la regla del trapecio con $n=4$.

Datos:

$$a=1$$

$$b=2$$

$$n=4$$

- Primero hallamos el ancho promedio Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

- Evaluamos la función desde **a** hasta **b** sumándole el ancho sucesivamente:

$$f(a) = f(1) = \frac{1}{(1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f\left(1 + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{25}{16}} = \frac{16}{25}$$

$$f\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{6}{4}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$$

$$f\left(\frac{6}{4} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{49}{16}} = \frac{16}{49}$$

$$f(b) = f\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{8}{4}\right) = f(2) = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4}$$

- Usando la formula de la regla del trapecio,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx &= \frac{1}{2} \left[f(1) + 2f\left(\frac{5}{4}\right) + 2f\left(\frac{6}{4}\right) + 2f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) \right] \\ &= \frac{1}{8} [1 + 2(0.64) + 2(0.4444) + 2(0.3265) + 0.25] \\ &= \frac{1}{8} [1 + 1.28 + 0.8889 + 0.6531 + 0.25] = \frac{1}{8} [4.0720] = \mathbf{0.5090} \end{aligned}$$

3) Aproximar el valor de $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ usando la regla del trapecio con n=10.

Datos:

a=1

b=2

n=10

- Primero hallamos el ancho promedio Δx

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 1}{10} = \frac{1}{10}$$

- Evaluamos la función desde **a** hasta **b** sumándole el ancho sucesivamente:

$$f(a) = f(1) = \frac{1}{(1)^2} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$

$$f\left(1 + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{11}{10}\right) = \frac{1}{\left(\frac{11}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{121}{100}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{121}}$$

$$f\left(\frac{11}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{12}{10}\right) = f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{\left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{36}{25}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{36}}$$

$$f\left(\frac{12}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{13}{10}\right) = \frac{1}{\left(\frac{13}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{169}{100}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{169}}$$

$$f\left(\frac{13}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{14}{10}\right) = f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{\left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{49}{25}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{49}}$$

$$f\left(\frac{14}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{15}{10}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}$$

$$f\left(\frac{15}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{16}{10}\right) = f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{1}{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{64}{25}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{64}}$$

$$f\left(\frac{16}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{17}{10}\right) = \frac{1}{\left(\frac{17}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{289}{100}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{289}}$$

$$f\left(\frac{17}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{18}{10}\right) = f\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{1}{\left(\frac{9}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{81}{25}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{81}}$$

$$f\left(\frac{18}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{19}{10}\right) = \frac{1}{\left(\frac{19}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{361}{100}} = \frac{100}{361}$$

$$f(b) = f\left(\frac{19}{10} + \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{20}{10}\right) = f(2) = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4}$$

- Usando la fórmula de la regla del trapecio,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{20} \left[f(1) + 2f\left(\frac{11}{10}\right) + 2f\left(\frac{12}{10}\right) + 2f\left(\frac{13}{10}\right) + 2f\left(\frac{14}{10}\right) + 2f\left(\frac{15}{10}\right) \right. \\ \left. + 2f\left(\frac{16}{10}\right) + 2f\left(\frac{17}{10}\right) + 2f\left(\frac{18}{10}\right) + 2f\left(\frac{19}{10}\right) + f(2) \right]$$

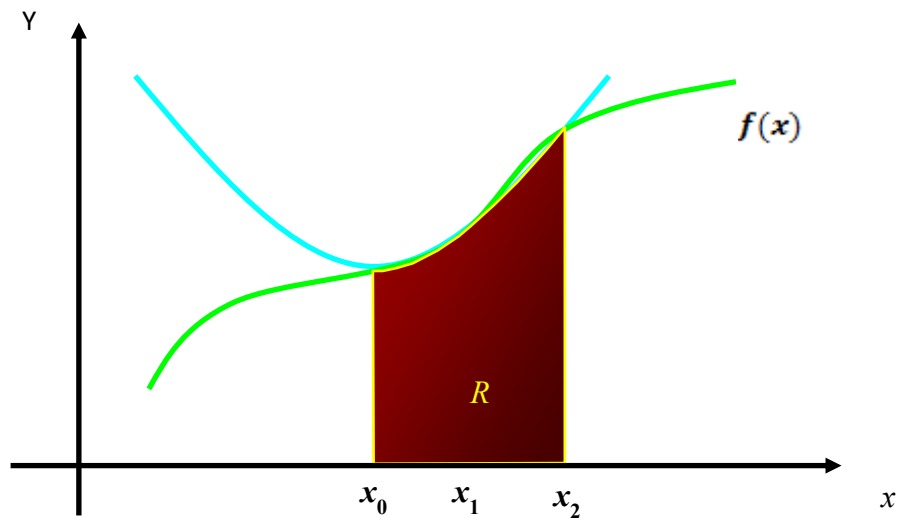
$$= \frac{1}{20} [1 + 2(0.8264) + 2(0.1389) + 2(0.5917) + 2(0.5102) + 2(0.4444) \\ + 2(0.3906) + 2(0.3460) + 2(0.3086) + 2(0.2770) + 0.25]$$

$$= \frac{1}{20} [1 + 1.6528 + 0.2778 + 1.1834 + 1.0204 + 0.8888 + 0.7812 + 0.6920 \\ + 0.6172 + 0.554 + 0.25] = \frac{1}{20} [8.9176]$$

$$= \mathbf{0.4459}$$

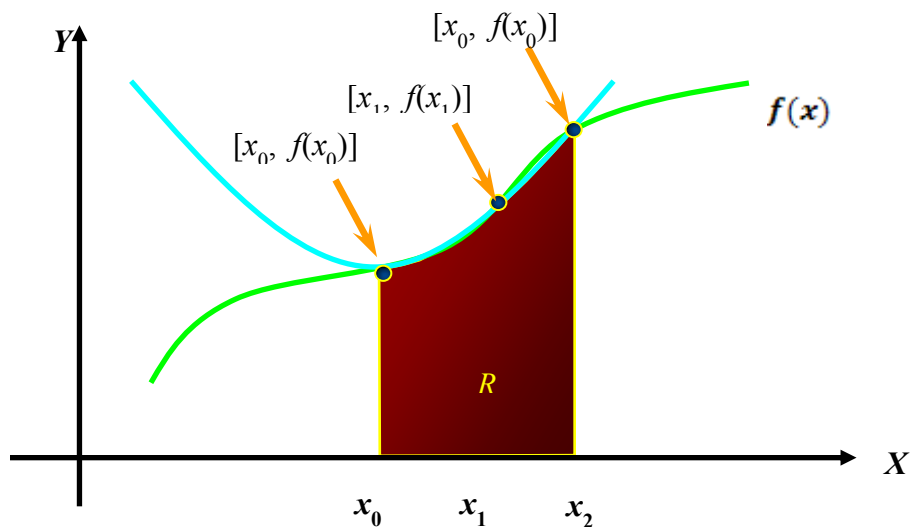
2.3. MÉTODO DE SIMPSON

El método de Simpson mejora la aproximación que se obtiene mediante el método del trapecio porque aproxima el área bajo la curva mediante el área bajo una parábola, en vez de usar líneas rectas:



Este método recibe este nombre en honor del matemático inglés Thomas Simpson (1710- 1761).

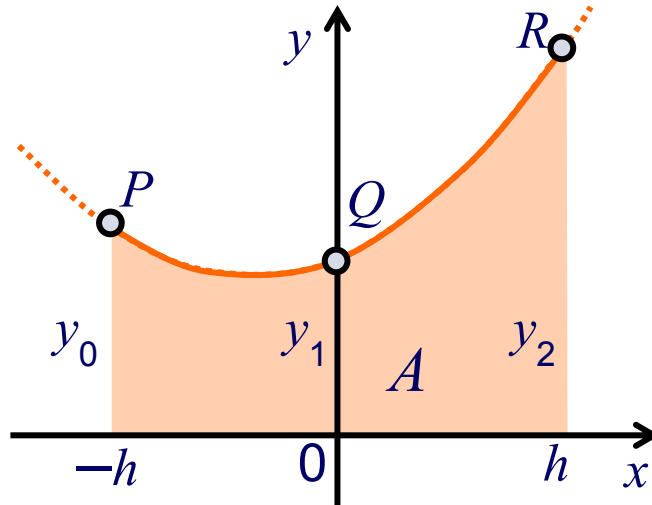
Podemos aproximar la función $f(x)$ en $[x_0, x_2]$ con una función cuadrática cuya gráfica contiene tres puntos no colineales:



Siendo la ecuación estándar de una curva parabólica $y = ax^2 + bx + c$

Demostración de la fórmula del método de Simpson:

Consideremos la siguiente parábola que pasa por tres puntos P , Q y R con coordenadas $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) . Como se muestra en la figura.



Podemos usar estos puntos para definir el área, A , dividida por las ordenadas y_0 , y_1 y y_2 , en dos regiones de igual ancho, h .

Si tomamos la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, el área, A , de las dos regiones, desde $-h$ a h quedará definida por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left[\frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} bx^2 + cx \right]_{-h}^h \\ &= \left(\frac{1}{3} ah^3 + \frac{1}{2} bh^2 + ch \right) - \left(-\frac{1}{3} ah^3 + \frac{1}{2} bh^2 - ch \right) = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch \end{aligned}$$

Donde factorizando esta expresión tenemos,

$$A = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c)$$

Podemos encontrar a y c usando los puntos, $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) en la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$:

$$\text{Para } y = y_0 \text{ y } x = -h \quad \therefore y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c \rightarrow y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$\text{Para } y = y_1 \text{ y } x = 0 \quad \therefore y_1 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow y_1 = c$$

$$\text{Para } y = y_2 \text{ y } x = h \quad \therefore y_2 = a(h)^2 + b(h) + c \rightarrow y_2 = ah^2 + bh + c$$

Sumando la primera y la tercera ecuación tendremos:

$$y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c$$

Pero como $y_1 = c$, tenemos:

$$y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2y_1$$

Despejando tendremos, $2ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1$

La cual nos permite escribir la expresión que representa nuestra área, A , en función de las ordenadas y_0, y_1 e y_2 :

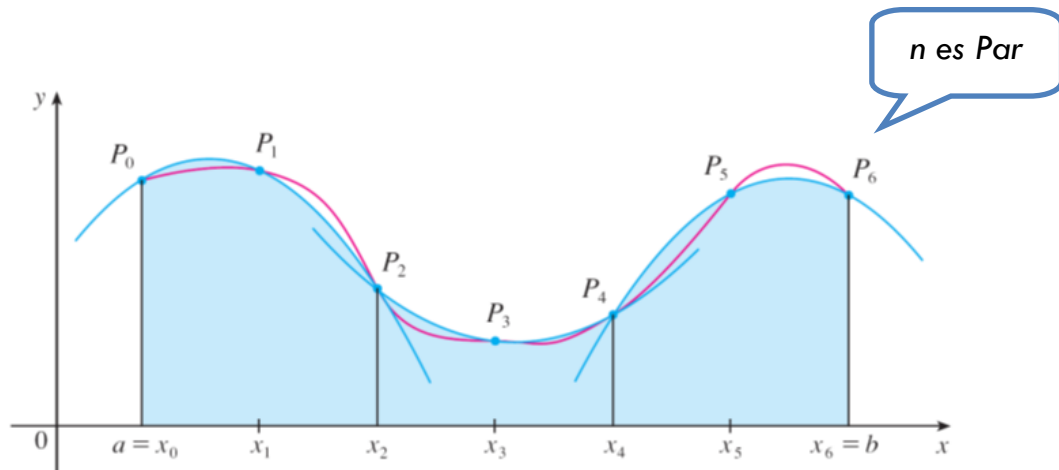
$$A = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{1}{3}h(y_0 + y_2 - 2y_1 + 6y_1) = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

En general, el área debajo de una función cuadrática $f(x)$, dividida en dos regiones iguales desde $x = a$ hasta $x = b$ está dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{Donde } h = \frac{b - a}{2}$$

Si trasladamos esta parábola horizontalmente el área debajo de ella no cambia, lo cual significa que el área bajo la parábola que pasa a través de los puntos P_0, P_1 y P_2 de $x = x_0$ hasta $x = x_2$ en la siguiente figura es:

$$A = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



De forma similar, el área bajo la parábola que pasa por P_2, P_3 y P_4 de $x = x_2$ hasta $x = x_4$ es

$$A = \frac{1}{3}h(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Si se calcula las áreas bajo todas las parábolas de esta manera y sumamos los resultados, obtendremos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Reescribiendo y agrupando los términos semejantes tenemos,

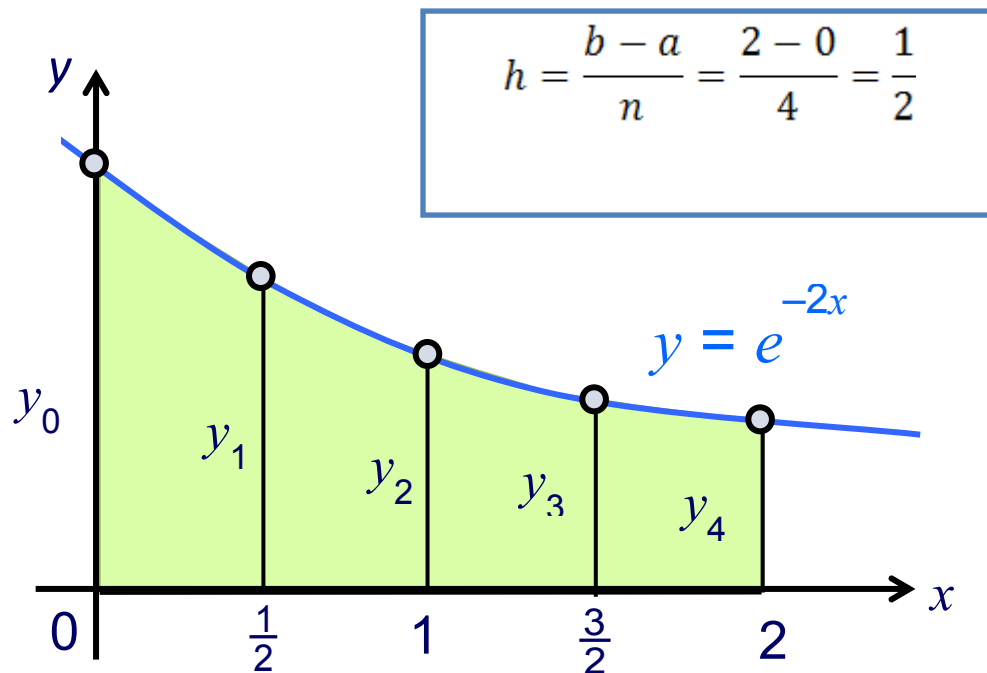
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$$

donde, n es par y $h = \frac{b-a}{n}$

Ejemplo: Aproximar el área bajo la curva $y = e^{-2x}$ y el eje x entre el intervalo $[0,2]$.

Solución:

Dividimos el área en 4 regiones con abscisas equidistantes. Estos cinco puntos que pertenecen a la curva definen dos parábolas sobre cada par de regiones.



La siguiente tabla muestra los valores de coordenadas del grafico anterior:

| | | | | | |
|----------------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| x | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 |
| y = e ^{-2x} | 1 | e ⁻¹ | e ⁻² | e ⁻³ | e ⁻⁴ |

Aplicando el **Método de Simpson**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$$

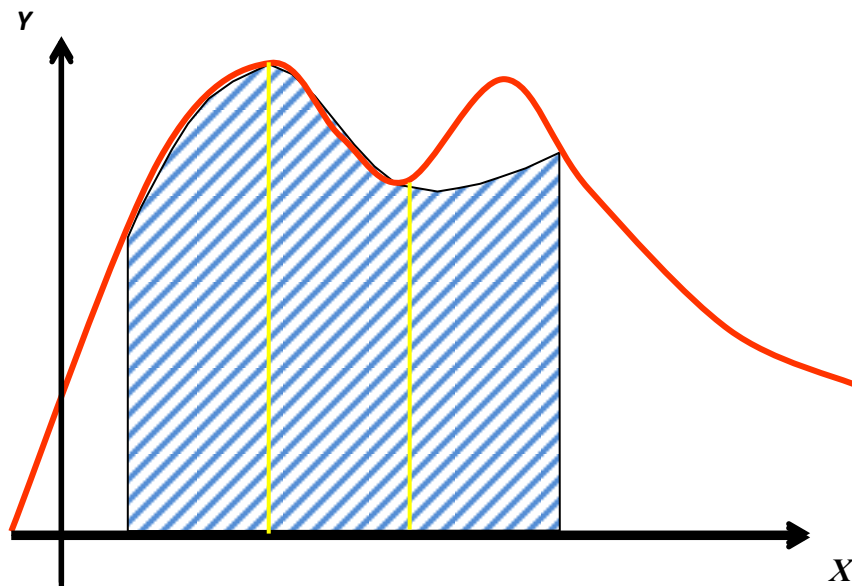
$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^2 e^{-2x} dx = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) [1 + 4(e^{-1} + e^{-3}) + 2(e^{-2}) + e^{-4}]$$

$$= \frac{1}{6} [1 + 4(e^{-1} + e^{-3}) + 2e^{-2} + e^{-4}]$$

$$= \mathbf{0.493}$$

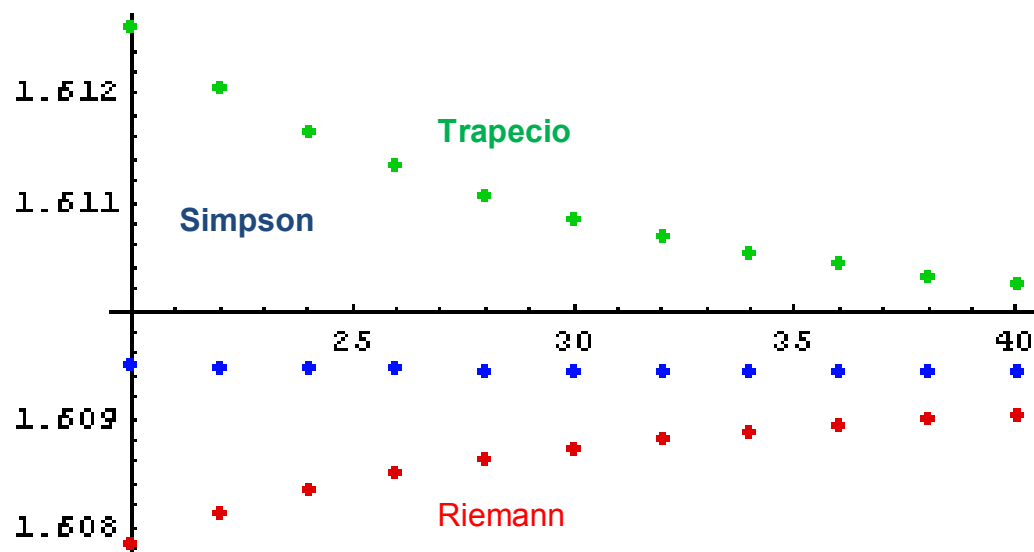
2.4. MÉTODO DE SIMPSON 3/8



Fórmula:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

2.5. COMPARACION GRÀFICA DE LOS TRES MÉTODOS



En esta gráfica el autor pretende comparar los tres métodos de Newton – Cotes, donde se puede visualizar que la que más se aproxima al eje x es la de Simpson, por tanto es la más ventajosa con respecto a los demás métodos planteados.

2.6. ESTIMACION DEL ERROR

En cualquier uso práctico de los métodos de aproximación, necesitamos tener alguna idea del tamaño del error incluido. Los métodos trabajados tienen fórmulas de error sencillas, siempre que el integrando tenga un número suficiente de derivadas.

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Aproximacion con base en } n \text{ intervalos} + E_n$$

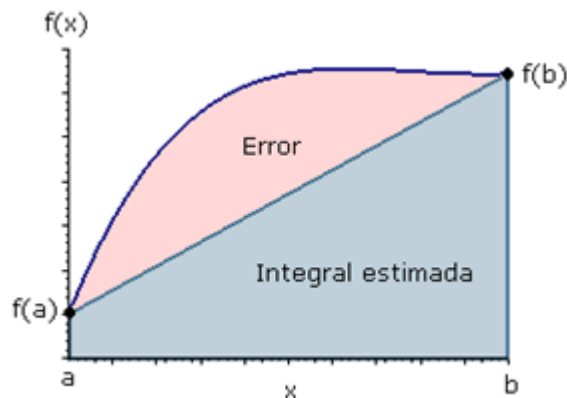


Figura: estimación del error en el trapecio. Fuente: autor

Suponiendo que existen las derivadas necesarias en el intervalo $[a, b]$, los errores para la suma de Riemann del punto izquierdo, la suma de Riemann del punto derecho, la suma de Riemann del punto medio, el método del trapecio y el método de Simpson son:

- **Suma de Riemann del punto izquierdo:**

$$E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} |f'(c)|$$

Para algunos c en $[a, b]$

- **Suma de Riemann del punto derecho:**

$$E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} |f'(c)|$$

Para algunos c en $[a, b]$

- **Suma de Riemann del punto medio:**

$$E_n = -\frac{(b-a)^3}{24n^2} |f''(c)|$$

Para algunos c en $[a, b]$

- **Método del trapecio:**

$$E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} |f''(c)|$$

Para algunos c en $[a, b]$

- **Método de Simpson:**

$$E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} |f^{IV}(c)|$$

Para algunos c en $[a, b]$

Una de las cosas importantes que podemos observar en estas fórmulas de errores es la posición de n , en el número subintervalos.

En todos los casos la n aparece elevada a alguna potencia en el denominador. Por lo tanto **cuando n aumenta, el error disminuye**. Además entre mas grande sea el exponente en n , el término de error se aproximará más rápido a cero.

Ejemplo del análisis del error:

¿Qué tan grande debe de ser n para garantizar que el valor absoluto del error se menor que 0.00001? cuando utilizamos. a) La suma de Riemann, b) El método del trapecio y c) El método de Simpson para estimar.

$$\int_1^4 \frac{1}{1+x} dx$$

- Las derivadas del integrando anterior son:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

$$f^{(IV)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

- a) El valor absoluto del término del error para la suma de Riemann del punto derecho es:**

$$|E_n| = \left| -\frac{(4-1)^2}{2n} f'(c) \right| = \frac{3^2}{2n} \left| -\frac{1}{(1+c)^2} \right| \leq \frac{9}{2n} \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{9}{8n}$$

Se quiere que

$$|E_n| \leq 0.00001$$

Por lo tanto

$$\frac{9}{8n} \leq 0.00001$$
$$n \geq \frac{9}{(8)(0.00001)} = 112,500$$
$$n \geq 112,500$$

Nota: n tiene que ser mayor a 112,500 para que el error sea menor a 0.00001.

b) El valor absoluto del término del error para la regla del trapecio tenemos:

$$|E_n| = \left| -\frac{(4-1)^3}{12n^2} f''(c) \right| = \frac{3^3}{12n^2} \left| \frac{2}{(1+c)^3} \right| \leq \frac{27}{12n^2} \left[\frac{2}{(1+1)^3} \right] = \frac{9}{16n^2}$$

Se quiere que $|E_n| \leq 0.00001$

Por lo tanto $\frac{9}{16n^2} \leq 0.00001$

$$n^2 \geq \frac{9}{(16)(0.00001)} = 56,250$$

$$n \geq \sqrt{56,250}$$

$$n \geq 237.17 \approx \mathbf{238}$$

c) El valor absoluto del término del error para la regla de Simpson:

$$|E_n| = \left| -\frac{(4-1)^5}{180n^4} f^{(IV)}(c) \right| = \frac{3^5}{180n^4} \left| \frac{24}{(1+c)^5} \right| \leq \frac{243}{180n^4} \left[\frac{24}{(1+1)^5} \right]$$
$$= \frac{81}{80n^4}$$

Se quiere que

$$|E_n| \leq 0.00001$$

Por lo tanto

$$\frac{81}{80n^4} \leq 0.00001$$

$$n^4 \geq \frac{80}{(81)(0.00001)} = 101,250$$

$$n \geq \sqrt[4]{101,250}$$

$$n \geq 17.8 \approx 18 \text{ "n debe ser par"}$$

Nota:

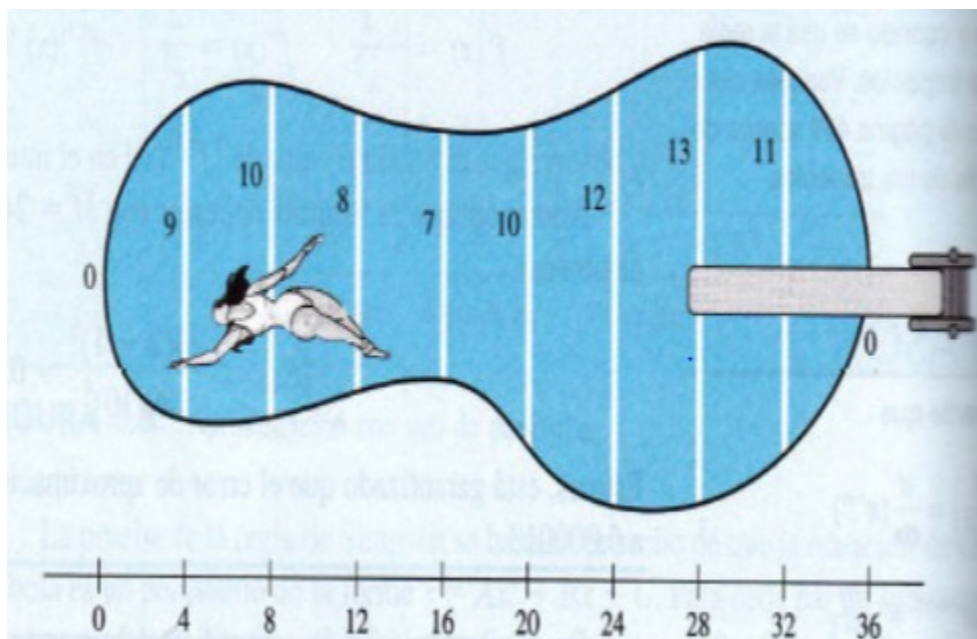
Siempre es bueno saber el valor de n , pero sino es posible con la estimación del error se obtendría el valor de n para que este sea lo mas próximo a cero y el valor obtenido se acerque lo mas posible al valor real. También, se visualiza en el ejemplo anterior del análisis del error que se necesita menor valor de n para obtener una aproximación más eficiente en la regla de Simpson que cualquier otra de Newton – Cotes; por lo tanto se puede deducir que es la más ventajosa con respecto a los otros métodos.

CAPÍTULO III: APLICACIONES DE LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

En este capítulo el autor pretende desarrollar unos cuantos ejemplos de la vida real donde se aplica los métodos mas usados de integración numérica, como son el trapecio, Simpson.

3.1. Aplicación: Área de piscina irregular

José necesita saber el área de su piscina para comprarle una cubierta, pero esto es difícil debido a la forma irregular de la piscina. Supongamos que Jack hace las mediciones que se ilustran en la figura. A intervalos de 4 pies a lo largo de la base de la piscina (todas las medidas son en pies). ¿Cómo puede usar el método del trapecio para estimar el área?



Solución:

Si se pudiera hallar una función que represente a $f(x)$ para el borde superior de la piscina y otra función que represente a $g(x)$ para el borde inferior, entonces el área se expresará por la integral definida:

$$A = \int_0^{36} [f(x) - g(x)] dx$$

La forma en que se presenta esta integral hace imposible o impráctico, hallar fórmulas para a $f(x)$ y $g(x)$ pero las medidas que presenta la imagen dice que:

| | |
|----------------------|---------------------|
| $f(0) - g(0) = 0$ | $f(20) - g(20) = 0$ |
| $f(4) - g(4) = 2$ | $f(24) - g(24) = 2$ |
| $f(8) - g(8) = 0$ | $f(28) - g(28) = 3$ |
| $f(12) - g(12) = 7$ | $f(32) - g(32) = 1$ |
| $f(16) - g(16) = 10$ | $f(36) - g(36) = 0$ |

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{36-0}{9} = 4$$

Aplicando la regla del trapecio con estos datos tenemos que:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{36} [f(x) - g(x)] dx \\ &= \frac{4}{2} [0 + 2(9) + 2(10) + 2(8) + 2(7) + 2(10) + 2(12) + 2(13) + 2(11) + 0] \\ &= 2(160) = 320 \text{ pies}^2 \end{aligned}$$

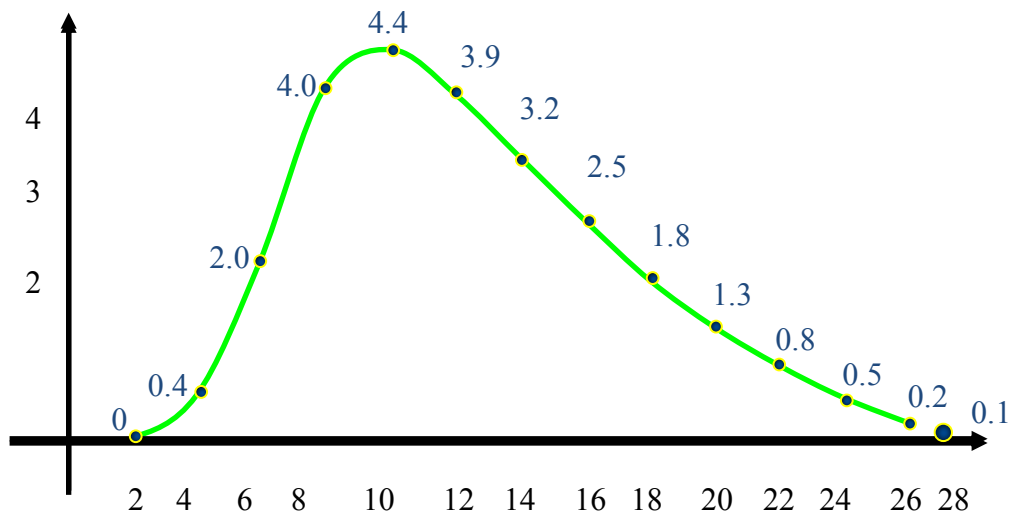
Se estima que el área de la piscina es **aproximadamente 320 pies²**.

3.2. Aplicación: Gasto Cardíaco

Un método para medir el Gasto Cardíaco (*la cantidad de sangre que es bombeada por el corazón hacia la aorta cada minuto*) es inyectar de 5 a 10 mg de un colorante en una vena que va al corazón.

Después de hacer el recorrido a través de los pulmones, el colorante vuelve al corazón y es bombeado hacia la aorta, donde su concentración es medida en intervalos iguales de tiempo.

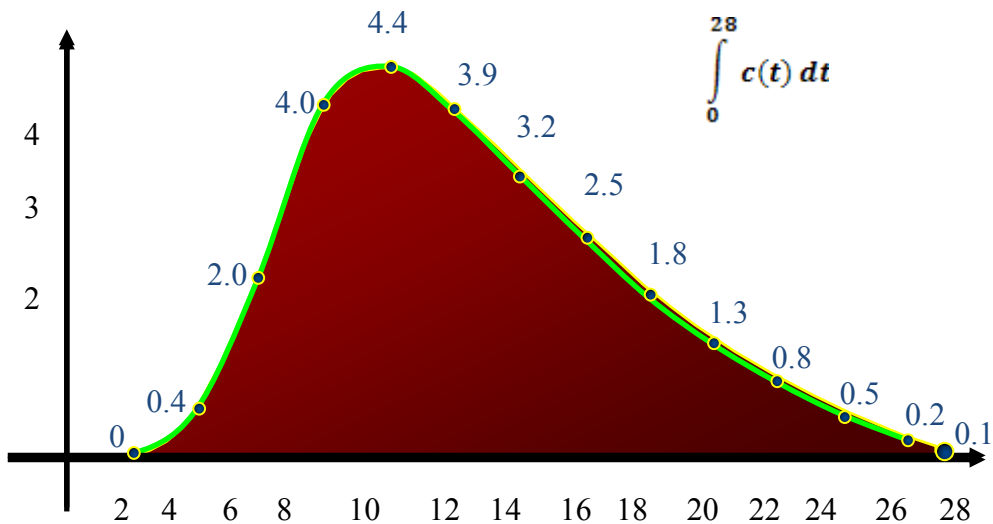
La gráfica $c(t)$ muestra la concentración de colorante en la aorta de una persona, medida en intervalos de 2 segundos luego de que 5 mg de colorante hayan sido inyectados:



El Gasto Cardíaco de una persona, en litros por minuto (L/min) se calcula mediante la siguiente fórmula, donde D es la cantidad de colorante inyectada.

$$R = \frac{60D}{\int_0^{28} c(t) dt}$$

Donde el área bajo la curva esta dada por la integral



Se puede usar la Regla de Simpson con $n = 14$ para evaluar la integral y determinar el gasto cardiaco, de una persona.

Tenemos $a = 0, b = 28, n = 14, y h = 2$, donde

$$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 6, \dots, t_{14} = 28.$$

Aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned} \int_0^{28} c(t) dt &\approx \frac{2}{3} [C(0) + 4C(2) + 2C(4) + 4C(6) + \dots + 4C(26) + C(28)] \\ &\approx \frac{2}{3} [0 + 4(0.4) + 2(2) + 4(2) + 2(4) + 4(4.4) + 2(3.9) + 4(3.2) + 2(2.5) \\ &\quad + 4(1.8) + 2(1.3) + 4(0.8) + 2(0.5) + 4(0.2) + 0.1] \approx 49.9 \end{aligned}$$

Por tanto, el gasto cardiaco de la persona es

$$R = \frac{60D}{\int_0^{28} c(t)dt} = \frac{60(5)}{49.9} = 6$$

Aproximadamente 6 L/min.

3.3. Aplicación: Integración para determinar la cantidad total de calor.

La determinación de la cantidad de calor requerido para elevar la temperatura de un material a menudo se ve en la ingeniería química y en la bioingeniería. La característica necesaria para llevar a cabo este cálculo es la capacidad calorífica c . Este parámetro representa la cantidad de calor requerida para elevar una unidad de temperatura en una unidad de masa. Si c es constante en el intervalo de temperaturas que se examinan el calor requerido ΔH (en calorías) se calcula mediante

$$\Delta H = mc\Delta T \quad ec (1)$$

Donde c esta en $cal/(g.^{\circ}C)$, m = masa (g) y ΔT =cambio de temperatura ($^{\circ}C$). Por ejemplo, la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 20 gramos de agua desde 5 hasta $10^{\circ}C$ es igual a:

$$\Delta H = 20(1)(10 - 5) = 100 \text{ cal} \quad ec (2)$$

Donde la capacidad calorífica del agua es aproximadamente $1 \text{ cal}/(g.^{\circ}C)$. Este cálculo es adecuado cuando ΔT es pequeño. Sin embargo, para grandes cambios de temperatura, la capacidad calorífica no es constante y de hecho, varía en función de la temperatura.

Por ejemplo, la capacidad calorífica de un material podría aumentar con la temperatura de acuerdo con una relación tal como:

$$c(T) = 0.132 + 1.56 \times 10^{-4}T + 2.64 \times 10^{-7}T^2$$

En este caso se pide por ejemplo calcular el calor necesario para elevar la temperatura de 1000 gramos de este material desde -100 hasta 200°C

Solución: una manera para calcular el valor promedio $c(T)$ es:

$$\bar{c}(T) = \frac{\int_{T_1}^{T_2} c(T) dT}{T_2 - T_1}$$

que se sustituye en la ecuación (1), para dar:

$$\Delta H = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT \quad \text{ec (2)}$$

donde $\Delta T = T_2 - T_1$ entonces $\Delta H = 42732 \text{ cal}$. Pudiéndose obtener de manera analítica. Es útil e instructivo comparar este resultado con los métodos numéricos desarrollados en el capítulo anterior. Para esto es necesario generar una tabla de valores de c para distintos valores de T :

| $T, ^\circ\text{C}$ | $c, \text{cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$ |
|---------------------|---|
| -100 | 0.11904 |
| -50 | 0.12486 |
| 0 | 0.13200 |
| 50 | 0.14046 |
| 100 | 0.15024 |
| 150 | 0.16134 |
| 200 | 0.17376 |

Resultados usando el método del trapecio con varios tamaños de paso.

| Tamaño de paso, °C | ΔH | ε_t (%) |
|--------------------|-------------|---------------------|
| 300 | 96048 | 125 |
| 150 | 43029 | 0.7 |
| 100 | 42864 | 0.3 |
| 50 | 42765 | 0.07 |
| 25 | 42740 | 0.018 |
| 10 | 42733.3 | <0.01 |
| 5 | 42732.3 | <0.01 |
| 1 | 42732.01 | <0.01 |
| 0.05 | 42732.00003 | <0.01 |

Estos puntos se utilizan junto con Simpson $1/3$ con seis segmentos calculándose una estimación de la integral de 42732, este resultado se sustituye en la ecuación (2), para obtener un valor de $\Delta H = 42732 \text{ cal}$ el cual concuerda exactamente con la solución analítica. Esta concordancia exacta ocurriría sin importar cuantos segmentos se utilicen. Se espera esta concordancia debido a que la función c es cuadrática y Simpson es exacta para cualquier función de grado menor o igual a 3. Con el Trapecio se pudo obtener en la tabla anterior pero nos da el resultado para pasos pequeños ($< 10^\circ\text{C}$).

CONCLUSIÓN

La integración numérica es una técnica que emplea algoritmos para el cálculo del valor numérico de una integral definida.

Las aproximaciones son útiles si la función no puede ser integrada o cuando se desconoce la función.

Las aproximaciones de Riemann por la izquierda y derecha son muy inexactas, es mejor tomar la del punto medio.

La aproximación trapezoidal es mucho más exacta que las de Riemann por la izquierda y derecha, pero existen mejores aproximaciones (Ej: regla de Simpson). Aunque pueda parecer ineficiente la regla del trapecio, resulta bastante apropiada para las funciones periódicas y para las funciones analíticas que convergen a cero rápidamente, como las llamadas funciones exponenciales dobles.

Por esto se propone una estrategia que permita al estudiante identificar cuando aplicar los métodos de integración numérica:

- a) Identificar si la integral no puede ser resuelta por el teorema fundamental del cálculo, entonces se puede aplicar la fórmula de Newton – Cotes.
- b) Verificar si el dominio de la función no la vuelve impropia, para estos fines se podría utilizar la fórmula del punto medio de Riemann que es más exacta que la de la izquierda y derecha.
- c) Cualquier método de aproximación es válido, pero el método del trapecio o Simpson son los más usados en la ingeniería por su mayor aproximación al valor real.
- d) Dividir el intervalo de integración en n partes iguales mientras mayor sea n es mejor, recordar que para el método de Simpson n debe de ser par.

- e) Si no nos dan el valor de n y nos dan el error permitido se usan las fórmulas de error para verificar cual valor de n es menor y resolver por este método con ese valor de n .
- f) Luego tabular todas las evaluaciones de estos intervalos, si es posible usar un software que permita suprimir cualquier error práctico en las evaluaciones.
- g) Aplicar las fórmulas a utilizar, ya sea la de Riemann, trapecio o Simpson, para obtener su aproximación.

RECOMENDACIONES

Existe una gran cantidad de métodos de integración numérica que no son nada más las fórmulas de Newton – Cotes, por lo que recomendamos su análisis y comparación con los métodos anteriormente descritos en este trabajo de investigación.

También se revisó buscando algún software libre que permitan el cálculo rápidamente de una integral definida existe Wolfram, MATLAB, EUREKA, SOLVER, TOOLKIT; pero existe un software llamado integraLAB que si fue diseñado para resolver integrales definidas por el método numéricos.

En este caso se recomienda que se elabore un software con los alumnos de ingeniería de la universidad APEC que permita la aproximación de integrales definidas, para utilizarlo como herramienta que refuerce el aprendizaje para así evitar errores en el cálculo numérico y dejar el análisis para la interpretación de los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, M., Guerra, A., LAU. R. (2003). Matemática numérica. Segunda edición. Editorial Félix Varela

Álvarez, M. A. (s.f.). Ecured. Recuperado el 01 de octubre de 2014, de http://www.ecured.cu/index.php/Integraci%C3%B3n_num%C3%A9rica

Apaza, I. A. (2009). Recuperado el 27 de septiembre de 2014, de http://www.academia.edu/6822670/Calculo_Numerico_Programacion_Aplicada_2009

Chapra, Steven; Canale, Raymond (1992) Métodos numéricos para ingenieros. México: Mc Graw Hill

Hoffmann, L. D., Bradley. G. L. (1995). Cálculo: aplicado para administración, economía, contaduría y ciencias sociales. Quinta edición, reimpressa. México: McGraw-Hill.

Larson, R.H., (2011). Cálculo esencial. México: Cengage Learning

Martinez, L. A.-A. (s.f.). Recuperado el 01 de septiembre de 2014

Purcell, J. E., Rigdon, S. E., Varberg, D. E. (2007). Cálculo. Pearson Education.

Semerari, F. (2011). Análisis matemático real. Santo Domingo: Impresora Todo cómputo.

Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable. Sexta edición. México: Cengage Learning.

UNAPEC. (2005). Estatutos generales de la universidad APEC. Santo Domingo: listín diario.