UNAPEC

VICERRECTORÍA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Tesis para Optar por el Título de Maestría en Matemática Superior

TÍTULO:

Aplicaciones del Teorema del Punto Fijo de Banach al Análisis Matemático

Sustentante:

Pedro Santo Rodríguez

2006-2697

Asesor:

Dr. Ignacio de la Caridad Pérez Yzquierdo.

Santo Domingo, D.N.
República Dominicana

Diciembre, 2016.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS i

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO I

Elementos Básicos De La Teoría De Los Espacios Métricos 3

CAPÍTULO II

Espacios Métricos Completos.. 23

CAPÍTULO III

Aplicaciones Del Principio De Aplicaciones Contraídas O Teorema

Del Punto Fijo De Banach Al Análisis Matemático Y A Las

Ecuaciones Diferenciales 43

CONCLUSIÓN 55

BIBLIOGRAFÍA 56

AGRADECIMIENTOS

A mi Dios por bendecirme, colmándome de capacidad, salud y fortaleza para enfrentar y superar los óbices y lograr la culminación de este trabajo.

A las autoridades de la Universidad APEC, darme la oportunidad de realizar mis estudios superiores en este importante centro dedicado a la formación de profesionales competentes.

A los docentes del departamento de Posgrado, que impartieron sus conocimientos con paciencia e integridad, siempre exigiendo más para que nos formemos como profesionales capaces y responsables.

A mi Madre María (Luz) *en todo momento, por la motivación constante y los* valores cristianos que me inculcó y que me han permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.

A mi esposa Ángela Araujo, mujer incansable, cuya perseverancia y tenacidad me motivaron a seguir enriqueciendo mis conocimientos.

A mis hijos, Javier y Alba, mis tesoros.

A mis hermanos Frank, Morena y Yudith, que siempre confiaron en que podría lograr mis objetivos.

A Sor María del Carmen Domínguez, directora del IPCAS por su comprensión y apoyo en el tiempo que solicité para dedicarme a este trabajo.

Al Dr. Ignacio de la Caridad Pérez por dedicarse con tanta paciencia y espontaneidad.

INTRODUCCIÓN

Las nociones de convergencia y continuidad juegan un rol central en el Análisis Matemático.

Los espacios métricos permiten extender a un contexto abstracto las nociones y resultados fundamentales del Análisis Matemático clásico relativos a las nociones fundamentales de convergencia y continuidad.

En este trabajo de tesis centramos nuestra atención en el estudio de los espacios métricos completos, y en particular, algunas de las aplicaciones del Principio de Aplicaciones Contraídas. Lo que nos condujo a plantearnos el siguiente tema de investigación **"Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach al análisis matemático".** En el mismo nos planteamos dos objetivos:

1. Profundizar en el estudio de los espacios métricos completos.

2. Mostrar las aplicaciones al Análisis Matemático y a las Ecuaciones Diferenciales de uno de los resultados más relevantes que se tiene en estos espacios:

El Teorema del Punto Fijo de Banach o Principio de Aplicaciones Contraídas, como también se le conoce.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo general

Realizar un estudio de los espacios métricos completos y aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach.

Objetivos específicos:

En el mismo proponemos el estudio de los siguientes aspectos:

a. Conceptos y resultados fundamentales de la teoría de los espacios métricos.

b. Sucesiones de Cauchy.

c. Ejemplos de espacios métricos completos y de espacios que no lo son.

d. Extensión de una función uniformemente continua.

e. Completamiento de un espacio métrico.

f. Teorema del punto fijo de Banach.

g. Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach.

JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Con este trabajo pretendemos poner en manos de los estudiantes de la maestría en Matemática Superior de UNAPEC, así como de los estudiantes de maestría en Matemática Pura de otras universidades del país, un material de consulta para la asignatura de Topología que aparece en los programas de maestrías.

MARCO DE REFERENCIA

La tesis consta de tres capítulos. En el capítulo I damos algunos elementos básicos de la Teoría de los Espacios Métricos. En el capítulo II centramos nuestra atención en los espacios métricos completos. Finalmente, en el capítulo III se ven tres aplicaciones del Principio de Aplicaciones Contraídas al Análisis y a las Ecuaciones Diferenciales.

CAPÍTULO I

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS

DEFINICIÓN 1

Sea X un conjunto. Una función $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ se llama métrica o distancia sobre X, si verifica los axiomas siguientes: $si\ x, y, z \in X$.

(D_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(D_2) $d(x, y) = d(y, x)$

(D_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad Triangular).

Para $x, y \in X$, el número $d(x, y)$ se llama **distancia** entre $x\ e\ y$. Al par (X, d) se le llama **espacio métrico**, y a los elementos de X, puntos del espacio.

OBSERVACIÓN 1

En lo adelante hablaremos de una métrica d sobre X, cuando en realidad d es una función definida sobre el producto cartesiano $X \times X$.

EJEMPLO 1

Sea X un conjunto arbitrario, $X \neq \emptyset$. Entonces la función $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & si\ x \neq y \\ 0, & si\ x = y \end{cases}$$

es una métrica sobre X llamada **métrica discreta**. Todo conjunto puede proveerse de esta métrica.

A lo largo de este trabajo, $K = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$.

EJEMPLO 2

Sea $1 \leq p < +\infty$. Cada una de las funciones siguientes define una métrica sobre K^N :

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, 2, \dots N\},$$
$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p},$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in K^N$.

La métrica d_∞ se llama **distancia del supremo** o **distancia uniforme**, y d_2 es la **métrica euclideana**.

OBSERVACIÓN 2

(a) Nótese que para todo $1 \le p < +\infty$ y cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}^N$, se tienen las desigualdades

$$d_\infty(x,y) \le d_p(x,y) \le N^{1/p} d_\infty(x,y) \qquad (1)$$

(b) Cuando $N = 1$, las métricas d_∞ y d_p coinciden con la distancia usual en K:

$$d_\infty(x,y) = |x - y|,\ x, y \in K.$$

EJEMPLO 3

Sea X un conjunto arbitrario, $X \ne \phi$. En lo que sigue, $B(X,K)$ denota el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \to K$. La función

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,\ f, g \in B(X,K)$$

define una distancia sobre $B(X,K)$ llamada **distancia del supremo** o **distancia uniforme**.

En todo lo que sigue, supondremos a $B(X,K)$ provisto de la métrica d_∞.

OBSERVACIÓN 3

Con las operaciones usuales de adición de funciones y producto de una función por un escalar, $B(X,K)$es un espacio vectorial sobre K.

EJEMPLO 4

Sea $l_K^\infty = B(\mathbb{N},\ K)$, es decir, l_K^∞es el conjunto de todas las sucesiones acotadas en K. Luego, la función

$$d_\infty(x,\ y) = \sup_{k\in IN}|x_k - y_k|, \tag{2}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, \dots),\ y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l_K^\infty$, es una distancia sobre l_K^∞.

EJEMPLO 5

Sea $1 \le p < +\infty$. Denotemos por l_K^p el conjunto de todas las sucesiones $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in K$ tales que $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty$. La función

$$d_p(x,y)\left(\sum_{k=1}^N |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \tag{3}$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, \dots),\ y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l_K^\infty$, define una distancia sobre l_K^p. En lo adelante, consideramos a l_K^p provisto de la distancia (3).

EJEMPLO 6

Sea $1 \le p < +\infty$. Por $C([a,b],K)$ denotamos el conjunto de todas las funciones $f:[a,b]\to K$ continuas. La función

$$d_p(f,g)\left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx\right)^{1/p},\ f,\ g \in C([a,b],K),$$

define una distancia sobre$C([a,b],K)$. Denotaremos por $C_p([a,b],K)$ a $C([a,b],K)$ provisto de la métrica d_∞.

La definición siguiente nos provee de una gran variedad de espacios métricos a partir de otros ya dados.

DE FINICIÓN 2

Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$. Entonces la métrica

$$d_A\colon A \times A \to \mathbb{R}_+, d_A(x, y) = d(x, y)$$

se llama **métrica inducida** por d sobre el subconjunto A de X y (A, d_A) se llama **subespacio métrico** de X.

En lo que sigue denotaremos la métrica inducida sobre A por la misma letra d.

EJEMPLO 7

Sea $C([a,b],K) \subset B([a,b],K)$. Luego, provisto de la métrica inducida por la métrica del supremo, $C([a,b],K)$es un subespacio métrico de $B([a,b],K)$que denotaremos en lo adelante por $C_\infty([a,b],K)$.

EJEMPLO 8

Sea c_k el subconjunto de l_K^∞ constituido por todas las sucesiones convergentes en K. Es claro que $c_k \subset l_K^\infty$. Con la métrica inducida por (2) sobre c_k, este último es un subespacio métrico de l_K^∞.

EJEMPLO 9

Sea $c_{0,k}$ el subconjunto de c_k constituido por todas las sucesiones convergentes a cero. Es claro que $c_{0,k} \subset c_k$. Con la métrica que hereda de c_k, $c_{0,k}$es un subespacio métrico de c_k.

EJEMPLO 10

Sean $C(X_i, d_i), i=1,2,...N$, espacios métricos. En el producto cartesiano $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$, las funciones

$$d_2'(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i (x_i, y_i)^2 \right)^{1/2},$$
$$d_\infty'(x,y) = \sup\{ d_i(x_i, y_i) : i = 1, 2, 3, ..., N \},$$
$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N} d_i(x_i, y_i),$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, ...), y = (y_1, y_2, y_3, ...) \in X$, definen métricas sobre el producto cartesiano $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$ que generalizan las respectivas métricas d2, d_2, d_∞ y d_1 en $\mathbb{R}^N$ consideradas en el Ejemplo 2, al igual que ocurre en $\mathbb{R}^N$, en este caso se tienen las desigualdades:

$$d'_\infty \le d'_p \le N^{1/p} d'_\infty, \quad p = 1, 2$$

Una clase muy importante de espacios métricos la constituye la clase de los espacios normados.

DEFINICIÓN 3

Un espacio vectorial sobre K es un conjunto X, cuyos elementos se llaman vectores, y en el cual se han definido dos operaciones, adición:

$$X \times X \to X, (x, y) \to x + y,$$

y producto por un escalar:

$$K \times X \to X, (\lambda, x) \to \lambda x$$

que satisfacen las propiedades siguientes:

Para todo $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta, \lambda \in K$ se tiene:

(EV1) $x + y = y + x.$

(EV2) $x + (y + z) = (x + y) + z.$ x + (y + z) = (x + y) + z.

(EV3) X, contiene un vector 0, único, llamado vector nulo u origen de X, tal que $x+0=x.$

(EV4) A cada $x \in X$ le corresponde un único vector $-x$, el opuesto de x, tal que $x+(-x)=0.$

(EV5) $\lambda(x+y)\lambda x+\lambda y.$

(EV6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$

(EV7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x.$

(EV8) $1x=x.$

DEFINICIÓN 4

Sea X, un espacio vectorial sobre K. Una función $\|\cdot\| \to$ $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|$ se llama una norma si cumple:

(N1) $\|x\|=0 \Rightarrow x=0.$

(N2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|, \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in K.$

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|, \forall x,y \in X.$

El par $(X,\|\cdot\|)$ se llama **espacio normado**. El número real no negativo $\|x\|$ ||x|| se llama **norma** de x.

PROPOSICIÓN 1

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado. La función

$d: X \times X \to$ $\mathbb{R}_+$, $d(x,y)=\|x-y\|$, es una métrica sobre X que posee las propiedades siguientes:

(i) $d(x+z,\, y+z)=d(x,y), \quad \forall x,y \in X$ **(Invarianza por traslaciones)**.

(ii) $d(\lambda x, \lambda y)=|\lambda| d(x,y), \quad \forall x,y \in X, \quad \lambda \in K$ **(Homogeneidad por homotecias)**.

Observación 4

De acuerdo con la Proposición 1, una condición necesaria para que una métrica sobre un espacio vectorial provenga de una norma, es que satisfaga las propiedades de invarianza por traslaciones y de homogeneidad por homotecias. Como muestra la proposición siguiente, que la métrica satisfaga estas propiedades es también condición suficiente para que se obtenga de una norma.

PROPOSICIÓN 2

Sea X un espacio vectorial sobre K y d una métrica sobre X que satisface (i) y (ii) de la Proposición 1. Entonces la función $\|\cdot\| \to \mathbb{R}_+$ definida por $\|x\| = d(x,0)$, es una norma sobre X que cumple:

$$d(x,y) = d(x-y,0) = \|x-y\|, \forall x, y \in X.$$

OBSERVACIÓN 5

En los ejemplos del 2 al 9, los conjuntos dados, con las operaciones usuales de adición y producto escalar que en ellos se definen, tienen estructura de espacio vectorial y las distancias consideradas sobre ellos provienen de normas.

DEFINICIÓN 5

Sean $(X,d), (X',d')$ dos espacios métricos. Una función $f: X \to X'$ se llama una **inmersión isométrica** si cumple

$$d'(f(x), f(y)) = d(x,y), \forall x, y \in X.$$

Si además, f es sobreyectiva, entonces se dice que f es una **isometría** de X sobre X'. Dos espacios métricos se llaman **isométricos**, si existe una isometría de uno sobre el otro.

OBSERVACIÓN 6

Las isometrías son los isomorfismos de la estructura de espacio métrico. Dos espacios métricos isométricos son indistinguibles desde el punto de vista de las propiedades métricas.

DEFINICIÓN 6

Dos métricas $d \; y \; d'$ sobre un conjunto X se llaman **semejantes**, si existen números reales $k, k' > 0$ tales que para todo $x, y \in X$ se tiene

$$d(x, y) \leq k'd'(x, y), d'(x, y) \leq kd(x, y).$$

DEFINICIÓN 7

Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $0 < r < +\infty$. Se llama **bola abierta** de centro x y radio r, al conjunto

$$B(x, r) = \{y \in X: d(x, y) < r\}.$$

Se llama **bola cerrada** de centro x y radio r, al conjunto

$$B[x, y] = \{y \in X: d(x, y) \leq r\}.$$

El conjunto

$$E(x, r) = \{y \in X: d(x, y) = r\} = B[x, r] \setminus B(x, r),$$

se llama **esfera de centro** x y **radio** r.

OBSERVACIÓN 7

Como veremos, las bolas abiertas juegan un papel fundamental en la teoría de los espacios métricos.

DEFINICIÓN 8

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}$$

se llama **diámetro** de A si $A \neq \emptyset$ y $\delta(\emptyset) = 0$.

A se dice acotado si $\delta(A) < +\infty$.

OBSERVACIÓN 8

El concepto de conjunto acotado no depende tanto de la métrica particular d como puede parecer. En efecto, un subconjunto acotado en (X, d) es acotado respecto a toda métrica d' semejante a d.

DEFINICIÓN 7

Sea (X, d) un espacio métrico, $A, B \subset X$, $\mathrm{A}, B \neq \emptyset$. Entonces

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sup\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$$

se llama **distancia entre el conjunto** A **y el conjunto** B.

Si $x \in X$, se llama **distancia entre el punto** x **y el conjunto** $\boldsymbol{B}$, al valor

$d(x, B) = d(\{x\}, B) = \sup\{d(x, y) \colon y \in B\}$.

PROPOSICIÓN 3

Sea (X, d)un espacio métrico y $A \subset X$, $A \neq \phi$. Entonces, para todo $x, y \in X$ se tiene

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Demostración.

Para todo $z \in A$ se tiene

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z). \tag{4}$$

Tomando ínfimo en $z \in A$ se obtiene

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A),$$

o sea

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y). \tag{5}$$

Intercambiando x e y en (2) se obtiene

$$d(y,A)-d(x,A)\leq d(x,y). \tag{6}$$

De (5) y (6) se obtiene la desigualdad deseada.

OBSERVACIÓN 9

Si $z\in X$, de (4) se obtiene la desigualdad

$$d(y,z)-d(x,z)\leq d(x,y).$$

Luego, se tiene

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leq d(x,y), \quad \forall x,y,z\in X. \tag{7}$$

Pasemos a ver la extensión a espacios métricos de la primera de dos nociones fundamentales del análisis clásico que veremos: la de **convergencia**.

DEFINICIÓN 10

Sea (X,d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos en X . Se dice que $\{x_n\}$ converge a $x\in X$ si

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:$$

$$n\geq N\Rightarrow d(x,x_n)<\varepsilon.$$

En este caso, también se dice que la sucesión es **convergente** y que x es un **límite** de la sucesión $\{x_n\}$. Para indicar esto último, escribiremos

$$x_n\to x \qquad \text{o} \qquad \lim x_n = x.$$

PROPOSICIÓN 4

En un espacio métrico (X,d) una sucesión convergente posee un único límite.

Demostración.

Supongamos que $x', x'' \in X$ son tales que

$$\lim x_n = x' \text{ y } \lim x_n = x''.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ existen $N', N'' \in \mathbb{N}$ tales que

$$n \geq N' \Rightarrow d(x', x_n) < \varepsilon/2$$

$$n \geq N'' \Rightarrow d(x'', x_n) < \varepsilon/2 .$$

Sea $N = \max\{N', N''\}$. Entonces, para todo $n \geq N$ se tiene, aplicando la desigualdad triangular, que

$$d(x', x'') \leq d(x', x) + d(x, x'') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, se concluye que, $d(x', x'') = 0$. Luego $x' = x''$.

OBSERVACIÓN 10

(a) La métrica d permite reducir el problema de convergencia de puntos en un espacio métrico X a un problema de convergencia de **números reales**:

$$x_n \to x \text{ en } X \Leftrightarrow d(x, x_n) \to 0.$$

Mediante la distancia hemos subordinado el concepto abstracto de acercamiento entre dos puntos de X al, ya conocido, acercamiento entre dos números reales.

(b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en el espacio métrico (X, d) y $x \in X$. Que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x en (X, d) no depende tanto de la métrica particular d. En efecto, se tiene que $x_n \to x$ **respecto a toda métrica** d' **sobre** X **semejante a** d.

Consideremos ahora el segundo concepto fundamental del Análisis: **la continuidad**. Su definición para espacios métricos es una generalización directa de la definición para funciones reales de una variable real.

DEFINICIÓN 11

Sean $(X,d),(Y,d')$ espacios métricos. Una función $f:X\to Y$ se llama **continua en el punto** $a\in X$ si

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:$$
$$x\in X,\, d(x,a)<\delta\Rightarrow d'(f(x), f(a))<\varepsilon.$$

OBSERVACIÓN 11

(a) Toda inmersión isométrica, en particular toda isometría, es una función continua en todo punto del espacio de partida.

(b) La Proposición 1 muestra que para todo subconjunto no vacío A de un espacio métrico (X,d), la función $f:X\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x,A)$ es continua en todo punto $a\in X$.

La proposición siguiente es evidente. En ella se caracteriza la continuidad de una función en un punto en términos de bolas abiertas.

PROPOSICIÓN 5

Sean $((X,d),(Y,d')$ espacios métricos y $f:X\to Y$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es continua en el punto $a\in X$.

(ii) Para todo $\varepsilon>0$ existe un número real $\delta>0$ tal que la imagen directa de la bola $B(a,\delta)\subset X$ está contenida en la bola $B(f(a),\varepsilon)$, es decir,

$$f(B(a,\delta))\subset B(f(a),\varepsilon).$$

(iii) Para todo $\varepsilon>0$ existe un número real $\delta>0$ tal que la imagen recíproca por f de la bola $B(f(a),\varepsilon)\subset Y$ contiene a la bola $B(a,\delta)\subset X$, es decir, $f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))\supset B(a,\varepsilon)$.

La caracterización (iii) en la proposición 5 motiva la definición siguiente:

DEFINICIÓN 12

Sea (X,d)un espacio métrico y $a \in X$. Se dice que $V \subset X$ es una **vecindad** de a, o que a es un **punto interior** de V, si existe un número real $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \subset V$.

PROPOSICIÓN 6

Toda bola abierta $B(a,r)$ en un espacio métrico (X,d)es vecindad de cada uno de sus puntos.

Demostración.

Si $x \in B(a,r)$, entonces $d(x,a) < r$. Veamos que $B(x,\delta) \subset B(a,r)$ con $\delta = r - d(x,a) > 0$. En efecto, si $y \in B(x,\delta)$ se tiene

$d(y,a) \le d(y,x) + d(x.a) < r - d(x,a) + d(x,a) = r.$

En lo que sigue, por $V(a)$ denotamos el **sistema de vecindades** de un punto a. La proposición siguiente es evidente, en ella se dan las propiedades elementales de las vecindades en un espacio métrico.

PROPOSICIÓN 7

Sea (X,d) un espacio métrico y $a \in X$. Entonces se cumple:

(i) $V \in V(a) \Rightarrow a \in V.$

(ii) $V \in V(a)$ y $V' \supset V \Rightarrow V' \in V(a).$

(iii) $V, V' \in V(a) \Rightarrow V \cap V' \in V(a).$

(iv) $a,b \in X,\, a \ne b \Rightarrow \exists V \in V(a), \exists U \in V(b) : V \cap U = \phi.$

Con ayuda del concepto Vecindad, podemos simplificar la definición de una función continua en un punto. En efecto, se tiene:

PROPOSICIÓN 8

Sean $(X,d),(Y,d')$ espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es continua en el punto $a \in X$.

(ii) $f^{-1}(V) \in V(a)$ para toda $V \in V(f(a))$.

(iii) Para toda $V \in V(f(a))$ existe $U \in V(a)$ tal que $f(U) \subset V$.

OBSERVACIÓN 12

Nótese que estas caracterizaciones ya **no hacen referencia explícita** a las distancias d y d' sobre X e Y, respectivamente.

Vista la proposición anterior, nos preguntamos si podemos también caracterizar la noción de convergencia a través de vecindades. La respuesta es trivialmente afirmativa:

PROPOSICIÓN 9

Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $\{x_n\}$una sucesión en X y $x \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $x_n \to x$ en X .

(ii) Para toda $V \in V(x)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : x \geq N\} \subset V$.

(iii) Para toda $V \in V(x)$ el conjunto $\{N \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$ es finito.

La propiedad de $V \in (x)$ de contener **<u>a casi todos</u>** los términos de cada sucesión que converge al punto x caracteriza a las vecindades de x en el sentido siguiente:

PROPOSICIÓN 10

Sea (X,d)un espacio métrico, $x \in X$ y $V \subset X$. Entonces

$V \notin V(x) \Leftrightarrow \{existe \{x_n\}\ tal\ que\ x_n\ \in X \setminus V,\ \ para\ todo\ n \in \mathbb{N}\ y\ x_n \to x$

La estrecha vinculación entre las nociones de convergencia y continuidad se precisa en el teorema siguiente.

TEOREMA 1

Sean $(X,d),(Y,d')$espacios métricos y $f:X\to Y$una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es continua en el punto $a\in X$.

(ii) $f(x_n)\to f(a)$ en Y para toda sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n\to a$.

Hasta el momento solo hemos considerado la continuidad en un punto, no la continuidad global, la continuidad sobre todo el dominio.

DEFINICIÓN 13

Sean $(X,d),(Y,d')$ espacios métricos. Una función $f:X\to Y$ se llama **globalmente continua**, o simplemente **continua**, si es continua en todo punto $a\in X$.

Para caracterizar las funciones continuas el concepto de vecindad no es suficiente, debido a que se refiere a un punto en particular. Necesitamos el concepto de conjunto abierto.

DEFINICIÓN 14

Sea (X,d)un espacio métrico y $A\subset X$ .El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama el **interior** de A y se denota por A^0 .

Según la Proposición 6, toda bola abierta en un espacio métrico (X,d) es vecindad de cada uno de sus puntos, por lo que coincide con su interior. La colección de todos los subconjuntos de (X,d) con esta propiedad juega un papel fundamental en Topología General.

DEFINICIÓN 15

Sea (X,d)un espacio métrico. $A\subset X$ se llama **abierto**, si A es vecindad de cada uno de sus puntos.

La proposición siguiente nos ofrece una caracterización del interior de un conjunto.

PROPOSICIÓN 11

Sea (X,d)un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A^0 es el mayor abierto contenido en A.

Las vecindades pueden caracterizarse a partir de los abiertos de la manera siguiente:

PROPOSICIÓN 12

Sea (X,d)un espacio métrico. Sea $V \subset X$ y $x \in X$. Entonces V es vecindad de x si y solo si existe un abierto $A \subset X$ tal que $x \in A \subset V$.

A continuación se dan las propiedades fundamentales de los conjuntos abiertos.

TEOREMA 2

Sea (X,d)un espacio métrico. Entonces se cumple

(A1) ϕ, X son subconjuntos abiertos de (X,d).

(A2) Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son abiertos en (X,d), entonces $A_1 \cap A_2 \cap, ..., \cap A_n$ es abierto.

(A3) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos abiertos, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto.

La proposición siguiente ofrece una caracterización completa de los subconjuntos abiertos.

PROPOSICIÓN 13

Sea (X,d)un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es abierto si y solo si A puede representarse como unión de bolas abiertas.

La caracterización de las funciones continuas por abiertos es la siguiente:

TEOREMA 3

Sean $(X,d),(Y,d')$ espacios métricos y $f: X \to Y$ una función. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) f es continua.

(ii) La preimagen de cada abierto en Y es abierto en X .

DEFINICIÓN 16

Sean $(X,d),(Y,d')$ espacios métricos y $f:X\to Y$ una función. La función f se llama **uniformemente continua** si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para $x,y\in X$:

$$d(x,y)<\delta\Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

OBSERVACIÓN 13

Es claro que toda función uniformemente continua es continua. Se puede ver que, en general, el recíproco no es cierto.

EJEMPLO 11

En el inciso (b) de la Observación 11 se hizo notar que para todo subconjunto no vacío f de un espacio métrico (X,d), la función $f:X\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=d(x,A)$ es continua en todo punto $a\in X$. Nótese que en realidad, como consecuencia de la Proposición 3, se puede concluir que la función f es uniformemente continua.

DEFINICIÓN 17

Sea (X,d) un espacio métrico y $B\subset X$. B se dice **cerrado** si $B^c=X\setminus B$ es abierto.

OBSERVACIÓN 14

(a) Los conceptos conjunto abierto y conjunto cerrado no se excluyen mutuamente: existen conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. En un espacio discreto todo subconjunto es a la vez abierto y cerrado.

Tampoco estos dos conceptos son exhaustivos, pues pueden existir subconjuntos que no sean ni abiertos ni cerrados como muestran, por ejemplo, los intervalos semiabiertos en $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

(b) De la definición de conjunto cerrado se concluye que **existe una dualidad entre los abiertos y los cerrados** de un espacio métrico. De todo enunciado sobre conjuntos abiertos se deduce un enunciado dual sobre los conjuntos cerrados.

Veamos a continuación las propiedades fundamentales de los conjuntos cerrados.

TEOREMA 4

Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces se cumple:

(C1) ϕ, X son subconjuntos cerrados de (X,d).

(C2) Si $C_1, C_2, ..., C_n$ son cerrados en (X,d), entonces $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ es cerrado.

(C3) Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es cerrado.

El teorema siguiente nos da la caracterización de los conjuntos cerrados por sucesiones.

TEOREMA 5

Sea (X,d) un espacio métrico y $B \subset X$. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) B es cerrado en X .

(ii) Si $\{x_n\}$ es una sucesión en $B, x \in X$ y $x_n \to x$, entonces $x \in B$.

OBSERVACIÓN 15

La importancia de los conjuntos cerrados, el interés en ellos, no está en su dualidad con los conjuntos abiertos, sino como muestra el teorema anterior, en la propiedad de ser cerrados respecto a la operación de paso al límite.

PROPOSICIÓN 14

Las bolas cerradas en un espacio métrico (X,d) son conjuntos cerrados.

DEFINICIÓN 18

Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$, $A \neq \phi$. Diremos que x es un **punto exterior** de A si $x \in \left(A^c\right)^0$. El conjunto de puntos exteriores de A se denota por $Ext(A)$.

Diremos que x es un **punto frontera** de A si x no es un punto interior a A, ni un punto interior a A^c. El conjunto de puntos frontera de A se denota por ∂A o por $Fr(A)$.

Diremos que x es un **punto adherente** de A si x no es interior a A^c. El conjunto de puntos adherentes de A se denota por $\overline{A}$ y se llama **clausura** de A

OBSERVACIÓN 16

(a) Si $x \in A$, entonces x es un punto interior de A o un punto frontera de A.

(b) Se tiene la inclusión $A \subset \overline{A}$.

El resultado siguiente constituye una caracterización de la clausura de un conjunto.

PROPOSICIÓN 15

Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a A.

DEFINICIÓN 19

Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Diremos que A es **denso** en X si $\overline{A} = X$.

EJEMPLO 12

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$ provisto de la métrica usual.

DEFINICIÓN 20

Sea (X,d)un espacio métrico y $A \subset X$. Diremos que x es un **punto de acumulación** de A si para todo número real $r > 0$ se tiene

$$B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A' y se llama **conjunto derivado** de A.

Diremos que x es un **punto aislado** de A si x es un punto adherente de A y existe un número real $r > 0$ tal que

$$B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

OBSERVACIÓN 17

(a) Si x es un punto aislado de A, entonces $x \in A$.

(b) Si $x \in A$, entonces x es un punto aislado de A, o es un punto de acumulación de A.

CAPÍTULO II

ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS

DEFINICIÓN 21

Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{X_n\}$ en X se dice que es una **sucesión de Cauchy** si y solo si satisface la siguiente condición, conocida como **condición de Cauchy**:

$$\forall_{\varepsilon} > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$$

$$n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

PROPOSICIÓN 16

1. Toda sucesión convergente en (X, d)es de Cauchy.

2. Toda sucesión de Cauchy en (X, d) está acotada.

3. Si la sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en (X, d) tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a un punto $x \in X$, entonces $\{x_n\}$ también converge al punto x.

4. La imagen de una sucesión de Cauchy por una función uniformemente continua es una sucesión de Cauchy.

Demostración.

1. Sea $x = \lim x_n$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Si ahora $n, m \geq N$ entonces se tiene $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Por lo tanto, $\{x_n\}$es una sucesión de Cauchy.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon = 1$. Entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_N) < 1$.

Sea $M = \sup\{d(x_1, x_N), d(x_2, x_N)..., d(x_{N-1}, x_N), 1\}$. Luego, $d(x_n, x_N) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_m, x_N) \leq 2M, \forall n, m \in \mathbb{N}$. Se concluye que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada y su diámetro $\delta\{x_n\} \leq 2M$.

3. Supongamos que $x_{n_k} \to x$. Entonces

$$d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser $\{x_{n_k}\}$ convergente, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N_1 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$.

Por ser $\{x_{n_k}\}$ de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq k \geq N_2 \Rightarrow d(x_k, x_{n_k}) < \varepsilon/2$. Luego, si $k \geq N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow d(x_k, x) < \varepsilon$.

De la arbitrariedad de ε se concluye la convergencia de $\{x_n\}$ a x.

4. Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ uniformemente continua y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$. Existe también $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta$, y por tanto, $d'(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$.

Esto prueba que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d').

DEFINICIÓN 22

Un espacio métrico (X, d) se dice **completo**, si toda sucesión de Cauchy en (X, d) converge en (X, d).

El teorema siguiente, llamado con frecuencia Teorema de intersección de Cantor, proporciona una de las caracterizaciones de los espacios métricos completos más usadas en las aplicaciones. Su importancia en los espacios métricos completos es similar a la que tiene el teorema de los intervalos cerrados y encajados en el Análisis Matemático.

Teorema 1 **(Teorema de Intersección de Cantor)**

Un espacio métrico (X, d) es completo si, y solo si, toda sucesión decreciente F_n de subconjuntos cerrados no vacíos de X con diámetros $\delta(F_n) \to 0$ tiene intersección no vacía. Más exactamente, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es un conjunto unitario.

Demostración.

Necesidad $(\Rightarrow)$

Supongamos que (X, d) es completo y sea $\{F_n\}$ una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos de X que cumple:

(i) F_n es decreciente, es decir $F_{n+1} \subset F_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\delta(F_n) \to 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un elemento $x_n \in F_n$. La sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. En efecto, se tiene

$$d(x_m, x_n) \leq \delta\left(F_{\min\{m, n\}}\right),$$

por lo tanto,

$$m, n \to \infty \Rightarrow d(x_n, x_m) \to 0.$$

Por ser el espacio (X, d) completo, existe $\lim x_n = x \in X$.

Como $x_m \in F_n, \quad \forall m \geq n$ entonces $x \in \bar{F} = F$. De la arbitrariedad de n se concluye que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Esto prueba que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$.

Probemos ahora que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es un conjunto unitario.

Supongamos que $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Entonces $x, y \in F_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$d(x, y) \leq \delta(F_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Haciendo $n \to \infty$ en esta última desigualdad se obtiene que $d(x, y) = 0$. Luego, $x = y$.

Suficiencia $(\Leftarrow)$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Consideremos los conjuntos

$E_n = \{x_k : k \geq n\}$. Entonces $\overline{E_n}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\delta(\overline{E_n}) = \delta(E_n) \leq \varepsilon$. Por lo tanto $\delta(\overline{E_n}) \to 0$. Luego existe $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$. Como $d(x_n, x) \leq \delta(\overline{E_n})$, entonces $d(x_n, x) \to 0$. Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es convergente. Esto prueba que (X, d) es completo.

PROPOSICIÓN 17

Sean (X_i, d_i), $i = 1, 2, 3, ..., N$, espacios métricos. El producto cartesiano $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$, es completo si, y solo si, cada uno de los factores $X_1, X_2 ... X_N$ es un espacio métrico completo.

Recordemos que:

1. A menos que se diga lo contrario, siempre consideramos el producto $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$ provisto de una cualquiera de las tres métricas usuales:

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$d_\infty(x, y) = \sup\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, 2, ... N\}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{N} d_i(x_i, y_i),$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, $\quad y = (y_1, y_2, ..., y_N) \in X$

2. $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq N d_\infty$.

3. Si $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,N})$ es una sucesión en X y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X$, entonces $x_n \to x$ en $X \Leftrightarrow x_{n,i} \to x_i$ en X_i, $i = 1, 2, ..., N$.

Demostración. (De la proposición 17)

Denotemos por d una cualquiera de las tres métricas usuales en X .

$\underline{NECESIDAD\ (\Rightarrow)}$

Siendo X completo, supongamos que uno de los factores, digamos X_1 , no fuese completo. Entonces existe una sucesión de Cauchy $\{y_n\}$ que no converge en X_1 . Fijemos, arbitrariamente, puntos $z_2 \in X_2, ..., z_N \in X_N$. La sucesión de puntos $x_n = (y_n, z_2, ..., z_N), n \in \mathbb{N}$, es de Cauchy, pues $d(x_{n,} x_m) = d_1(y_n, y_m)$, pero no convergería en X , por lo que X no sería completo.

$\underline{SUFICIENCIA(\Leftarrow)}$

Si cada (X_i) es completo, dada una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en X, cada una de las sucesiones de coordenadas $\{x_{n,i}\}, n \in \mathbb{N}$ es de Cauchy en X_i, pues $0 \le di(x_m, i, x_n, i) \le d(x_m, x_n)$, y por tanto, convergente en X_i. Luego, la sucesión $\{x_n\}$ converge en X y, por tanto, X es completo.

Corolario 1 **(de la proposición 17)**

Los espacios euclidianos $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{C}^N$ son completos.

PROPOSICIÓN 18

Todo sub espacio cerrado de un espacio métrico completo es también completo. Recíprocamente, un sub espacio completo de cualquier espacio métrico es cerrado.

Demostración.

Sea X un espacio métrico completo y $Y \subset X$ un subespacio cerrado de X . Dada una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en Y , existe $\lim x_n = x \in X$. Como Y es cerrado en $X, x \in Y$. Luego, Y es completo. Recíprocamente, Si Z es un subespacio completo de X , y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de Z que converge a un punto $x \in X$, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en Z. Como Z es completo, existe $x' \in Z$ tal que $x' = \lim x_n$. Por la unicidad del límite, $x' = x$. Luego, $x \in Z$ y por tanto, Z es cerrado en X.

Corolario 2 (**de la Proposición 18**)

Sea X un espacio métrico completo e $Y \subset X$. Entonces el subespacio métrico Y es completo si, y solo si, Y es cerrado en X.

En los ejemplos que siguen a continuación se estudia la completitud de algunos de los espacios métricos introducidos en el Capítulo I.

En todo lo que sigue $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

EJEMPLO 13

Sea X un conjunto arbitrario, $X \neq \phi$. Probemos que $B(X, K)$ es un espacio métrico completo. Recordemos que $B(X, K)$ denota el conjunto de todas las funciones acotadas $f : X \to K$ provisto de la **distancia del supremo**

$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,\ f, g \in B(X, K)$.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $B(X, K)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}:$$
$$n, m \geq N \Rightarrow d_\infty(f_m, f_n) < \varepsilon .$$

Como

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq d_\infty(f_m, f_n),\ x \in X \qquad (8)$$

entonces $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en K para todo $x \in X$. Luego, para todo $x \in X$ existe $f(x) \in K$ tal que $f_n(x) \to f(x)$. De esta forma queda definida una función $f : X \to K$. Veamos que f está acotada. En efecto, tomando $\varepsilon = 1$ en la condición de Cauchy y usando (8) se obtiene

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq 1,\ x \in X,\ m \geq N.$$

Para cada $x \in X$, hagamos $m \to \infty$ en esta última desigualdad. Se obtiene

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 1,\ x \in X.$$

De esta desigualdad se concluye que

$$|f(x)| \leq M,\ x \in X$$

donde $M = 1 + \sup_{x \in X} |f_N(x)|$. Esto prueba que f está acotada.

Veamos que $f_n \to f$ en $(B(X, K), d_\infty)$. De la condición de Cauchy y de (8) se tiene que

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}::\ n, m \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$

En la desigualdad anterior fijemos $n \geq m$ y, para cada $x \in X$, hagamos tender m a infinito. Se obtiene que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}::\ n \geq N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in X,$ es decir,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}:\ n \geq N \Rightarrow d_\infty(f, f_n) \leq \varepsilon.$

Esto prueba que $f_n \to f$ en $B(X, K)$. Luego, $B(X, K)$ es completo.

EJEMPLO 14

Sea $\exists N \in \mathbb{N}$:. Entonces $K^N = B(\{1, 2, ..., N\}, K)$. Del ejemplo anterior se concluye que (K^N, d_∞) es completo. De esta forma, hemos obtenido otra demostración de la completitud de $\mathbb{R}^N\ y\ \mathbb{C}^N$.

EJEMPLO 15

Probemos que $C_\infty([a, b], K)$ es completo. Recordemos que $C_\infty([a, b], K) = (\mathrm{C([a, b], K), d_\infty})$, donde $C([a, b], K)$ es el conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to K$ continuas. Como $C([a, b], K) \subset B([a, b], K)$, de acuerdo con el COROLARIO 2, para probar la completitud de $C_\infty([a, b], K)$, basta probar que $C([a, b], K)$ es cerrado en $B(X, K)$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C([a, b], K)$ y $f \in B([a, b], K)$ tales que $f_n \to f$ en $B(X, K)$. Como la convergencia asociada a la métrica d_∞ es la convergencia uniforme sobre $[a, b]$, es bien conocido que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas sobre $[a, b]$ es una función continua sobre $[a,b]$. Luego, se concluye que $f \in C([a,b],K)$ y $C([a,b],K)$ es cerrado en $B(X,K)$.

EJEMPLO 16

Probemos que l_K^∞ es completo. Recordemos que $l_K^\infty = B(\mathbb{N},\ K)$, es el espacio métrico de todas las sucesiones acotadas en K, provisto de la métrica del supremo

$$d_\infty(x, y) = \sup_{k \in IN} |x_k - y_k|, \text{ donde } x = (x_1, x_2, x_3, \dots),\ y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l_K^\infty,$$

Del EJEMPLO 13 se concluye que l_K^∞ es completo.

EJEMPLO 17

Probemos que c_K es completo. Recordemos que c_K es el subespacio de l_K^∞ constituido por todas las sucesiones convergentes en K. De acuerdo con el

Corolario 2, basta probar que c_K es cerrado en l_K^∞.

Sea $\{x^n\}_{n=1}^\infty$, donde $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^\infty$, una sucesión en c_K y sea $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in l_K^\infty$, tal que $x^n \to x$ en l_K^∞. Debemos probar que $x \in c_K$, es decir, que x es una sucesión convergente en K. Veamos que x es de Cauchy en K.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Como $x^n \to x$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$ se tiene

$$|x_k - x_k^n| \leq \sup_{k \in N} |x_k - x_k^n| < \varepsilon/3.$$

Luego,

$$|x_k - x_k^n| < \varepsilon/3,\ \forall n \geq N_1,\ \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Fijemos $n \geq N_1$. Como $x^n \in c_K$, $\{x_k^n\}_{k=1}^\infty$ es de Cauchy en K, y para este $\varepsilon > 0$ prefijado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left| x_k^n - x_{k'}^n \right| < \varepsilon/3. \tag{10}$$

De (9) y (10) se concluye que, fijado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, k' \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned} &\left| x_k - x_{k'} \right| = \left| x_k - x_k^n + x_k^n - x_{k'}^n + x_{k'}^n - x_{k'} \right| \\ &\leq \left| x_k - x_k^n \right| + \left| x_k^n - x_{k'}^n \right| + \left| x_{k'}^n - x_{k'} \right| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 3. \end{aligned}$$

Luego, $X \in c_K$.

EJEMPLO 18

Probemos que $c_{0,K}$ es completo. Recordemos que $c_{0,K}$ es el sub espacio de c_K constituido por todas las sucesiones convergentes a cero. De acuerdo con el Corolario 2 y el Ejemplo 17, basta probar que $c_{0,K}$ es cerrado en c_K .

Sea $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, una sucesión en $c_{0,K}$ y sea $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_k$ tal que $x^n \to x$ en c_K. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$ se tiene

$$\left| x_k - x_k^n \right| < \varepsilon/2, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left| x_k \right| \leq \left| x_k - x_k^n \right| + \left| x_k^n \right| \tag{11}$$

Ahora fijemos un $n \geq N_1$ en (11). Como $X^n \in c_{0,K}$, para el $\varepsilon > 0$ prefijado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $\left| x_k^n \right| < \varepsilon/2$. Por lo tanto, habiendo fijado $n \geq N_1$ en (11), si $k \geq N$, se tiene que $\left| x_k \right| < \varepsilon$. Esto prueba que $X \in c_{0,K}$.

EJEMPLO 19

Sea $1 \le p < +\infty$. Probemos que l_K^p es completo. Recordemos que l_K^p denota el conjunto de todas las sucesiones $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in K$ tales que

$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, provisto de la distancia

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p},$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots),\ y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in l_K^p$. Además, usaremos la estructura de espacio vectorial de l_K^p.

Sea $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty}$, una sucesión en l_K^p. Como

$$|x_k^m - x_k^n| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^p \right)^{1/p} = d_p(x^m, x^n), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

la sucesión $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, es de Cauchy en K y, por consiguiente, converge en K para todo $K \in \mathbb{N}$.

Sea $x_k = \lim_{x \to \infty} x_k^n,\ K \in \mathbb{N}$. Veamos que $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_K^p$, y que $\lim_{n \to \infty} x^n = x$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \ge N$, se tiene

$$d_p(x^m, x^n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^m - x_i^n|^p \right)^{1/p} < \varepsilon .$$

En particular, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{r} |x_i^m - x_i^n|^p \right)^{1/p} < \varepsilon, \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Fijando $n \ge N$ y haciendo tender m a infinito en esta última desigualdad se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\left|x_i - x_i^n\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon, \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

Haciendo tender r a infinito en (13) se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\left|x_i - x_i^n\right|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

De esta última desigualdad se concluye que $x^n - x \in l_K^p, \forall n \geq N$. Luego, $x = x^n - (x^n - x) \in l_K^p$. De la misma desigualdad se deduce también que $\lim_{n\to\infty} x^n = x$.

El ejemplo siguiente muestra un espacio métrico que no es completo.

Ejemplo 20

Sea $1 \leq p < +\infty$. Probemos que $C_p([a, b], K)$ no es completo.

Recordemos que por $C_p([a, b], K)$ denotamos el conjunto $C([a, b], K)$ provisto de la métrica

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b \left|f(x) - g(x)\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Comenzaremos probando dos lemas.

Lema 1

Sean $f, g \in C_p([a, b], K)$. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión en $C_p([a, b], K)$. tal que

$$d_p(f_n, f) \to 0 \qquad \text{y} \qquad d_\infty(f_n, g) \to 0.$$

Entonces $f \equiv g$.

Demostración.

$$d_p(f_n, g) \leq (b-a)^{1/p} d_\infty(f_n, g) \to 0.$$

Luego, $f_n \to f$ y $f_n \to g$ en $C_p([a,b],K)$. Por la unicidad del límite, $f \equiv g$.

Lema 2

Sea $c \in]a,b[$. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión en $C_p([a,b],K)$ tal que:

$(i)\, 0 \le f_n \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

$(ii)\, \forall \varepsilon > 0,\quad f_n \rightrightarrows 0$ en $[a, c-\varepsilon]$ y $f_n \rightrightarrows 1$ en $[c+\varepsilon, b]$

Entonces $\{f_n\}$ es de Cauchy en $C_p([a,b],K)$.

Demostración.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Sea $\varepsilon' = \varepsilon^p \big/ 3 \cdot 2^{p+1}$. Entonces, para todo $n, m \ge \mathbb{N}$ se tiene

$$d_p^p(f_n, f_m) = \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^p dx$$

$$\le \int_a^{c-\varepsilon'} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \qquad (14)$$

Como $f_n \rightrightarrows 0$ en $[a, c-\varepsilon']$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \ge N'$ se tiene

$$\max_{x \in [a, c-\varepsilon']} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3^{1/p}(c - a - \varepsilon')^{1/p}}.$$

Entonces

$$\int_a^{c-\varepsilon'} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx < \frac{\varepsilon^p}{3}, \quad n, m \ge N'. \qquad (15)$$

Como $f_n \rightrightarrows 1$ en $[c+\varepsilon', b]$, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \ge N''$ se tiene

$$\max_{x \in [c+\varepsilon', b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3^{1/p}(b - c - \varepsilon')^{1/p}}.$$

Entonces

$$\int_{c+\varepsilon'}^{b} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx < \frac{\varepsilon^p}{3}, \quad n, m \ge N''. \qquad (16)$$

Como para todo $n, m \ge \mathbb{N}$ y para todo $x \in [c-\varepsilon', c+\varepsilon']$ se tiene

$$|f_n(x) - f_m(x)|^p \le \left(|f_n(x)| + |f_m(x)|\right)^p \le 2p,$$ entonces

$$\int_{c-\varepsilon'}^{c+\varepsilon'} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \leq 2^p \cdot 2\varepsilon' = 2^{p+1} \frac{\varepsilon^p}{3 \cdot 2^{p+1}} = \frac{\varepsilon^p}{3}. \qquad (17)$$

Sea ahora $N = \max\{N', N''\}$. Entonces, fijado $\varepsilon > 0$, de (14) – (17) se concluye que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ se tiene

$$d_p(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Luego, $\{f_n\}$ es de Cauchy en $C_p([a, b], K)$.

PROPOSICIÓN 19

$C_p([a, b], K)$ no es completo.

Demostración.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C_p([a, b], K)$ que verifica (i) y (ii) del Lema 2. Entonces $\{f_n\}$ es de Cauchy en $C_p([a, b], K)$. Supongamos ahora que $f \in C_p([a, b], K)$ es tal que $f_n \to f$ en $C_p([a, b], K)$. Entonces, por el Lema 1 se tiene

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in [a, c[\\ 1, & si\ x \in]a, c] \end{cases}.$$

Pero esto contradice el hecho de que $f \in C_p([a, b], K)$. Luego, $\{f_n\}$ no converge en $C_p([a, b], K)$.

DEFINICIÓN 23 (**Completamiento de un espacio métrico**)

Sea (X, d) un espacio métrico. Un **completamiento** de (X, d) es un par $((Y, d'), \Phi)$ con las propiedades siguientes:

(a) (Y, d') es un espacio métrico completo.

(b) $\Phi : X \to Y$ es una inmersión isométrica, es decir,

$$d'(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y), \forall x, y \in X.$$

(c) $\overline{\Phi(X)} = Y$.

TEOREMA 7 **(de completamiento)**

Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces (X, d) tiene un completamiento.

Demostración.

Consideremos el espacio $B(X, \mathbb{R})$. Fijemos un punto $x_0 \in X$. Dado $a \in X$, definamos

$$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0).$$

De la desigualdad

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \quad \forall x, y, z \in X,$$

se tiene que, para todo $x \in X$:

$$|\phi_a(x)| = |d(x, a) - d(x, x_0)| \leq d(a, x_0).$$

Luego, ϕ_a es una función acotada, es decir $\phi_a \in B(X, \mathbb{R})$.

Definamos $\Phi : X \to Y$ $(X, \mathbb{R})$ por $\Phi(a) = \phi_a$ Veamos que Φ es una inmersión isométrica de (X, d) en el espacio métrico completo $B\,(X, \mathbb{R})$, es decir, verifiquemos que

$$d_\infty(\phi_a, \phi_b) = d(a, b), \quad \forall a, b \in X.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} d_\infty(\phi_a, \phi_b) &= \sup_{x \in X} |\phi_a(x) - \phi_b(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |d(x, a) - d(x, b)| \\ &\leq d(a, b). \end{aligned}$$

Pero esta última desigualdad no puede ser estricta, pues cuando $x = a$ se tiene

$$|d(x - a) - d(x - b)| = d(a, b).$$

Como $B(X, \mathbb{R})$ es completo, de acuerdo con la PROPOSICIÓN 18, $\overline{\Phi(X)}$ es un espacio métrico completo. Entonces, basta tomar $Y = \overline{\Phi(X)}$.

TEOREMA 8 **(Unicidad del completamiento)**

Sea (X,d) un espacio métrico y $((Y_1,d_1),\Phi_1),((Y_2,d_2),\Phi_2)$ dos completamientos de (X,d). Entonces existe una isometría Φ de (Y_1,d_1) sobre (Y_2,d_2), única, tal que $\Phi\circ\Phi_1=\Phi_2$.

Demostración.

Comencemos definiendo Φ. Sea $x\in Y_1$. Como $\Phi_1(X)$ es denso en Y_1, existe una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x=\lim\Phi_1(x_n)$. Es claro que $\{\Phi_1(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y_1. Luego, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X. Por lo tanto, $\{\Phi_2(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y_2 y por consiguiente, convergente en Y_2. Sea

$$\Phi(x)=\lim\Phi_2(x_n).$$

Probemos que Φ está bien definida, es decir, que $\Phi(x)$ no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$. Para probar esto, sea $\{x'_n\}$ otra sucesión en X tal que $x=\lim\Phi_1(x_n)$. Se tiene que

$d(x_n,x'_n)=d_1(\Phi_1(x_n),\Phi_1(x'_n))\le d_1(\Phi_1(x_n,),x)+d_1(x,\Phi_1(x'_n))\to 0,$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}d_2(\Phi_2(x'_n),\Phi(x_n))&\le d_2(\Phi_2(x'_n),\Phi_2(x_n))+d_2(\Phi_2(x_n),\Phi(x))\\&=d(x'_n,x_n)+d_2(\Phi_2(x_n),\Phi(x))\to 0.\end{aligned}$$

Luego, $\Phi(x)=\lim\Phi_2(x'_n)$, por lo que Φ está bien definida.

Probemos ahora que Φ es una isometría. Sean $x,y\in Y_1$ y sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ las correspondientes sucesiones en X usadas para definir $\Phi(x)$ y $\Phi(y)$, respectivamente. De

$$\begin{aligned}d_2(\Phi(x),\Phi(y))&=\lim d_2(\Phi_2(x_n),\Phi_2(y_n))\\&=\lim d(x_n,y_n)\\&=\lim d_1(\Phi_1(x_n),\Phi_1(y_n))\\&=d_1(x,y),\end{aligned}$$

se concluye que Φ es una isometría. Esto prueba también que Φ es inyectiva. Es claro que $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$. En efecto, si $x \in X$, se tiene que $\Phi_1(x) = \lim \Phi_1(x_n)$, con $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$(\Phi \circ \Phi_1)(x) = \Phi(\Phi_1(x)) = \lim \Phi_2(x_n) = \Phi_2(x).$$

La igualdad $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$ implica que $\Phi_2(x) = \Phi(\Phi_1(X)) \subset \Phi(Y_1)$. Luego, $Y_2 = \overline{\Phi_2(X)} \subset \overline{\Phi(Y_1)} \subset Y_2$, es decir, $\Phi(Y_1)$ es denso en Y_2. Si probamos que $\Phi(Y_1)$ es un subespacio completo de Y_2, de acuerdo con la Proposición 18, esto implica que $\Phi(Y_1)$ es cerrado en Y_2 y, por consiguiente, que $\Phi(Y_1) = Y_2$. Con esto quedaría probado que Φ es una isometría de Y_1 sobre Y_2.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en Y_1 tal que $\{\Phi(x_n)\}$ es de Cauchy en Y_2. Como Φ es una inmersión isométrica, $\{x_n\}$ es también de Cauchy en Y_1 y, por lo tanto, es convergente a un punto $x \in Y_1$. Nuevamente, como Φ es una inmersión isométrica, se tiene que $\lim \Phi(x_n) = \Phi(x)$ en Y_2.

Probemos ahora la unicidad de Φ. Sea $\Phi' : Y_1 \to Y_2$ tal que $\Phi' \circ \Phi_1 = \Phi_2$. Sea $x \in Y_1$. Luego, existe una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $\lim \Phi_1(x_n) = x$. Entonces

$$\Phi(x) = \lim \Phi(\Phi_1(x_n)) = \lim \Phi_2(x_n) = \lim \Phi'(\Phi_1(x_n)) = \Phi'(x).$$

Como $x \in Y_1$ es arbitrario, esto prueba que $\Phi' = \Phi$.

OBSERVACIÓN 18

Nótese que

$$\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2 \text{ sobre } X \Leftrightarrow \Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} \text{ sobre } \Phi_1(X).$$

DEFINICIÓN 24 (**Punto fijo**)

Sea X un conjunto no vacío y $f : X \to X$ una función. Un punto $x \in X$ se llama un punto fijo para f si $f(x) = x$.

DEFINICIÓN 25 (**Contracción**)

Sea (X, d) un espacio métrico y $f : (X, d) \to (X, d)$ una función. Se dice que f es una contracción, si existe $c, 0 \leq c < 1$ (llamada **constante** o **módulo de contracción**) tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \forall x \in X .$$

TEOREMA 9 (**Principio de aplicaciones contraídas o Teorema del punto fijo de Banach**)

Sea (X, d)un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción. Entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración. Sea $x_1 \in X$ un punto arbitrario. Si $f(x_1) = x_1$, encontramos lo que buscábamos. Luego, asumamos que $f(x_1) \neq x_1$.

Definamos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ por $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$.

Entonces, para todo $p \in \mathbb{N}, p > 1$, se tiene

$$d(x_{p+1}, x_p) \leq d\left(f(x_p), f(x_{p-1})\right) \leq cd\,(x_p, x_{p-1}).$$

Luego, se tiene

$$\begin{aligned} d(x_{p+1}, x_p) = d\left(f(x_p), f(x_{p-1})\right) &\leq cd\,(x_p, x_{p-1}) \\ &= cd\left(f(x_{p-1}), f(x_{p-2})\right) \\ &\leq c^2 d(x_{p-1}, x_{p-2}) \\ &= c^2 d\left(f(x_{p-2}), f(x_{p-3})\right) \end{aligned}$$

$$\leq c^3 d(x_{p-2}, x_{p-3})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\leq c^{p-1} d(x_2, x_1), \text{ es decir,}$$

$$d(x_{p+1}, x_p) \leq c^{p-1} d(x_2, x_1),\ p \geq 1$$

Entonces, para todo $m > n$ se tiene (por la desigualdad triangular)

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_{n,}\ x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_m)$$

$$\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1,}\ x_{n-2}) + d(x_{n-2}, x_m)$$

$$\leq d(x_n, x_{n-1}) \leq d(x_{n-1,}\ x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m)$$

$$\leq (c^{n-2} + c^{n-3} + \ldots c^{m-1})\ d(x_2, x_1)$$

$$\leq \left(\sum_{k=m-1}^{\infty} c^k \right) d(x_2, x_1)$$

$$= c^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c^k \right) d(x_2, x_1)$$

$$= \frac{c^{m-1}}{1-c} d(x_2, x_1).$$

Luego,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{c^{m-1}}{1-c} d(x_2, x_1).$$

De esta última desigualdad se concluye que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. De la igualdad

$x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$, y la continuidad de la función f, se concluye que $f(x) = x$. Para probar la unicidad, notemos que si $f(x) = x$ y $f(y) = y$, entonces

$$d(x, y) = d\big(f(x),\ f(y)\big) \leq c d(x, y).$$

Luego, $d(x, y) = 0\ y\ x = y.$

COROLARIO 3

Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f:X\to X$ una contracción. Si C es un subconjunto cerrado no vacío de X que es $f-$ invariante, es decir, tal que $f(C)\subset C,$ entonces el único punto fijo de f pertenece a $f(C)$.

Demostración.

Es claro que $f:(C,d\to(C,d))$ es una contracción. Como C es cerrado, (C,d)es un espacio métrico completo. Por el Principio de Aplicaciones Contraídas, existe $x\in C$ tal que $f(x)=x.$ Como x es el único punto de f, se concluye que $x=f(x)\in f(C).$

COROLARIO 4

Sea (X,d)un espacio métrico completo. Si para algún $k\in\mathbb{N}$, la $k-$ésima iterada $f^k:X\to X$ es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración.

Supongamos que para algún k y algún $0\le c<1,$ se tiene

$$d\left(f^k(x),\ f^k(y)\right)\le cd(x,y)\quad \forall x,y\in X.$$

Por el Principio de Aplicaciones Contraídas, existe un único punto fijo x de f^k.

De:

$$d(f(x),x)=d\left(f\left(f^k(x)\right),\ f^k(x)\right)=d\left(f^k(f(x)),\ f^k(x)\right)\le cd(f(x),x),$$

se obtiene que $0\le(1-c)d\left(f(x),x\right)\le 0.$ Por lo tanto, $d\left(f(x),x\right)=0,$ de donde $f(x)=x.$ Luego, x es también un punto fijo de f .

En las aplicaciones es frecuente el caso en que la contracción depende también de otras variables o parámetros. Si esta dependencia es continua, entonces el punto fijo también dependerá continuamente de los parámetros. Esto es lo que afirma el teorema siguiente:

TEOREMA 10

Sean (Λ, ρ) un espacio métrico y (X, d) un espacio métrico completo y sea

$$f : \Lambda \times X \to X$$

una familia de contracciones con módulo de contracción uniforme, es decir,

$d\big(f(\lambda, x), f(\lambda, y)\big) \le cd(x, y), \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad \forall x, y \in X.$

Además, supongamos que para cada $x \in X$ la aplicación

$$\lambda \to f(\lambda, x)$$

es una función continua de Λ en X. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda,\ f(\lambda, \cdot)$ tiene un único punto fijo $x(\lambda) \in X$, y la función

$$\lambda \to x(\lambda),$$

es una función continua de Λ en X.

Demostración.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ podemos aplicar el Principio de Aplicaciones Contraídas, por lo que la función $\lambda \to x(\lambda)$, está bien definida. Para $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, se tiene

$$\begin{aligned} d(x(\lambda_1), x(\lambda_2)) &= d\big(f(\lambda_1, x(\lambda_1)), f(\lambda_2, x(\lambda_2))\big) \\ &\le d\big(f(\lambda_1, x(\lambda_1)), f(\lambda_2, x(\lambda_1))\big) + d\big(f(\lambda_2, x(\lambda_1)), f(\lambda_2, x(\lambda_2))\big) \\ &\le d\big(f(\lambda_1, x(\lambda_1)), f(\lambda_2, x(\lambda_1))\big) + cd(x(\lambda_1), x(\lambda_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(1-c)d(x(\lambda_1), x(\lambda_2)) \le d\big(f(\lambda_1, x(\lambda_1)), f(\lambda_2, x(\lambda_1))\big).$$

El resultado sigue ahora de la continuidad de f respecto a λ para cada x fijo.

CAPÍTULO III

APLICACIONES DEL PRINCIPIO DE APLICACIONES CONTRAÍDAS O TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH AL ANÁLISIS MATEMÁTICO Y A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

Se tienen dos aplicaciones clásicas del Principio de Aplicaciones Contraídas en el Análisis. Estas son: la demostración del Teorema de la Función Implícita y la otra es la demostración de la existencia y unicidad de solución de un problema con valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria.

Comenzaremos viendo esta otra aplicación en la que también haremos uso del TEOREMA 10.

TEOREMA 11

Sea $\psi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq \lambda |x - y|, x, y \in \mathbb{C}$$

(18) donde $\lambda < 1$. Entonces la función $\theta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

$$\theta(x) = x + \psi(x)$$

es un homeomorfismo sobre $\mathbb{C}$.

Demostración.

La desigualdad (18) implica que ψ es continua y, por lo tanto, también lo es θ. Además, la igualdad $\theta(x) = \theta(y)$ implica que $x - y = \psi(y) - \psi(x)$. Por consiguiente, $|\psi(x) - \psi(y)| = |x - y|$. Por lo tanto, $|x - y| = 0$ y $x = y$. Luego, θ es inyectiva.

Consideremos la función $f: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x, y) = y - \psi(x)$.

Para cada y fijo, el Principio de Aplicaciones Contraídas afirma que $x \to f(x, y)$ tiene un único punto fijo $\varphi(y)$. Este cumple que

$\varphi(y) = y - \psi\left(\varphi(y)\right)$ o $\theta\big(\varphi(y)\big) = y$, lo cual prueba que θ es sobreyectiva con inversa por la derecha φ. Como θ es inyectiva, φ es su inversa. Ahora, el TEOREMA 10 nos dice que φ es continua.

TEOREMA 12 **(Teorema de la función implícita)**

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f: U \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en U. Supongamos que $(x_0, y_0) \in U$ es tal que $f(x_0, y_0) = 0$ y que $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) \neq 0.$

Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una función $g:]x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ tal que cumple:

1. $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in]x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon[$.x ∈]x0 −ε,x0 + ε[.
2. g es diferenciable sobre $]x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon[$ con

$$g'(x) = -\frac{\left(\partial f / \partial x\right)(x, g(x))}{\left(\partial f / \partial y\right)(x, g(x))}.$$

Demostración.

Sea

$$F(x, y) = y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} f(x, y).$$

Entonces

$$F(x_0, y_0) = y_0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y}$ es continua en (x_0, y_0),entonces $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x, y)$ es un valor muy cercano a cero para (x, y) suficientemente cercano a (x_0, y_0).

Tomemos $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que si $|x - x_0| < \delta_1$ y $|y - y_0| < \delta_2$, entonces,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Podemos asumir, tomando $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeño, que

$$|F(x, y_0) - y_0| \leq \frac{\delta_2}{2}$$

para todo x con $|x - x_0| < \delta_1$.

Sea X el conjunto de todas las funciones reales g continuas sobre

$\mathrm{I} = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ tales que:

(a) $g(x_0) = y_0$.

(b) $|g(x) - y_0| \leq \delta_2$ si $|x - x_0| \leq \delta_1$.

Sea

$$d_\infty(g_1, g_2) = \sup_{x \in \mathrm{I}} |g_1(x) - g_2(x)|.$$

Entonces es fácil verificar que (X, d) es un espacio métrico completo.

Para $g \in X$, definamos $T[g](x) = F(x, g(x))$. Entonces $T[g](x_0) = y_0$ y

$$\begin{aligned}
|T[g](x) - y_0| &= |F(x, g(x)) - y_0| \\
&\leq |F(x, g(x)) - F(x, y_0)| + |F(x, y_0) - y_0| \\
&\leq \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta)\right| |g(x) - y_0| + \frac{\delta_2}{2} \\
&\leq \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_2}{2} = \delta_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(X) \subset X$, es decir, transforma X en sí mismo. Probemos que T es una contracción:

$$|T[g](x) - T[h](x)| = |F(x, g(x)) - F(x, h(x))|$$

$$= \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta)\right| |g(x) - h(x)|$$

$$\leq \frac{1}{2} |g(x) - h(x)|.$$

Sea $g(x_0) = y_0$, $x \in \mathrm{I} = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$. Definamos $g_{n+1} = T[g_n]$. Entonces $\{g_n\}$ es una sucesión de Cauchy sobre X y por lo tanto converge a una función continua g. También se tiene

$$F(x, g(x)) = \lim_{n\to\infty} F(x, g_n(x)) = \lim_{n\to\infty} g_{n+1}(x) = g(x), \quad x \in \mathrm{I}.$$

Por lo tanto, g es un punto fijo de T, es decir, $F(x, g(x)) = g(x)$ y, por consiguiente, $f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}.$

Veamos ahora que g es diferenciable y calculemos su derivada. Por hipótesis $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $(x, g(x))$. Sea x_1 tal que $|x_1 - x_0| < \delta_1$. Entonces $f(x, g(x)) = 0$ y $f(x_1, g(x_1)) = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, g(x_1)) - f(x, g(x)) \\ &= f(x_1, g(x_1)) - f(x_1, g(x)) + f(x_1, g(x)) - f(x, g(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \eta)(g(x_1) - g(x)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, g(x))(x_1 - x), \text{ para algún } \xi \end{aligned}$$

entre x y x_1 y para algún η entre $g(x)$ y $g(x_1)$. Luego,

$$\frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} = -\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, g(x))\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \eta)\right)^{-1}.$$

Por lo tanto, por la continuidad de las derivadas parciales se tiene que

$$g'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1}.$$

Con esto finaliza la demostración del teorema.

DEFINICIÓN 26 (**Problema con valores iniciales**)

Por un **Problema con valores iniciales** de n – ésimo orden (PVI) (o simplemente ***Problema con valores iniciales***) para la ED

$$F(t, x, x',..., x^{(n)} = 0, \qquad (19)$$ se

debe entender:

Hallar una solución de la ED (19) en un intervalo I que satisfaga en x_0 las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0 \\ &x'(t_0) = x_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x^{n-1}(t_0) = x_{n-1} \end{aligned}$$

donde $t_0 \in \mathrm{I}$ *y* $x_0, x_1,..., x_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias dadas.

OBSERVACIÓN 19

(i) La terminología condiciones iniciales proviene de la física, más exactamente, de la Mecánica, donde la variable independiente t es el tiempo y donde $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = x_1$ representan la posición y la velocidad inicial, respectivamente, de un objeto en el instante de tiempo inicial t_0 .

(ii) Los PVI de primer orden

$$\begin{aligned} &x' = f(t, x) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \qquad (20)$$

y de segundo orden
$$\begin{aligned} &x'' = f(t, x, x') \\ &x(t_0) = x_0 \\ &x'(t_0) = x_1 \end{aligned} \qquad (21)$$

admiten las siguientes interpretaciones geométricas. Para el problema (20) estamos buscando una solución de la ED en un intervalo I que contenga a t_0, tal que su gráfico pase por el punto (t_0, x_0). Para el problema (21) queremos determinar una solución $x(t)$ de la ED $x'' = f(t, x, x')$ en un intervalo I que contenga a t_0 de tal forma que su gráfico no solo pase por el punto (t_0, x_0), sino que también la pendiente de la recta tangente al gráfico en ese punto sea el número x_1.

Al considerar un PVI surgen dos preguntas importantes:

- ¿Existe solución del problema?
- Si existe solución, ¿es única?

Ejemplo 21

1) Cada una de las funciones $x = 0 \quad y \quad x = \frac{1}{16}t^4$ es una solución del PVI

$$\begin{cases} x' = tx^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

2. Toda función de la forma $x(t) = \begin{cases} 0, & si\ t \in \left]-\infty, C\right[\\ (t-C)^2, & si\ t \in \left]C, +\infty\right[\end{cases}$

Con $C > t_0$ y la función $x \equiv 0$ son soluciones del PVI

$$\begin{cases} x' = |x|^{1/2} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

3. El PVI $\begin{cases} x' = x - t \\ x(1) = \pi \end{cases}$

tiene como única solución a la función $x(t) = 1 + t + (\pi - 2)^{t-1}$.

El siguiente teorema da condiciones suficientes que garantizan la existencia y unicidad de una solución de un PVI de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{22}$$

TEOREMA 13 (**Teorema de existencia y unicidad de Picard**)

Sean f y $\frac{\partial f}{\partial x}$ funciones continuas en el rectángulo

$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : a < t < b, c < x < d\}$ que contiene al punto (t_0, x_0). Entonces existe un intervalo $\mathrm{I} = [t_0 - h, t_0 + h], \quad h > 0,$ contenido en $]a, b[$, y una función $x(t)$ definida en I, única, que es solución del PVI (22).

Para la demostración del teorema de existencia y unicidad de Picard, necesitamos los siguientes dos resultados.

La ecuación diferencial en (22) puede transformarse en una ecuación integral de la forma

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds. \tag{23}$$

DEFINICIÓN 27

Sea f una función real definida y continua en un dominio D en $\mathbb{R}^2$. Una función real ϕ definida en un intervalo I que contiene al punto x_0 se dice **solución de la ecuación integral** (23) en I si

$$\begin{cases} 1)\ \big(t, \phi(t)\big) \in D,\ \forall t \in I. \\ 2)\ \phi \text{ es continua en } I. \\ 3)\ \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \phi(s)\big) ds,\ \forall t \in I. \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 20

Sea f una función real definida y continua en un dominio D en $\mathbb{R}^2$, sea I un intervalo, sean $x_0 \in \mathrm{I}$ y ϕ una función real definida en I. Entonces ϕ es una solución del PVI (22) en I si y sólo si ϕ es una solución de la ecuación integral (23) en I.

<u>Demostración</u>.

<u>NECESIDAD</u>:

Supongamos que ϕ es una solución del PVI (22) en I. Entonces ϕ es derivable en I y, por consiguiente, continua en I. Además, como

$\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \forall t \in I$ se tiene

$$\phi(t) - x_0 = \phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \phi'(s)\, ds = \int_{x_t}^{t} f((s, \phi(s))\, ds, \forall t \in I$$

Luego, ϕ es una solución de la ecuación integral (23) en I.

<u>SUFICIENCIA</u>:

Supongamos que ϕ es una solución de la ecuación integral (23) en *I*. Entonces ϕ es continua en I y $\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds, \forall t \in I$

Luego, $\phi(t_0) = x_0$, ϕ es derivable en I y $\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \forall t \in I$, es decir, ϕ es una solución del PVI (22) en I .

Recordemos que si $[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, por $C_\infty([a,b], \mathbb{R})$ denotamos el espacio métrico completo $(C([a,b], \mathbb{R}), d_\infty)$ donde $C([a,b], \mathbb{R})$ denota el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de todas las funciones reales definidas y continuas sobre el intervalo $[a, b]$, y d_∞ denota la métrica del supremo:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \; f, g \in C([a, b], IR).$$

PROPOSICIÓN 21

Sean $\alpha > 0,\ x_0 \in C([a, b], IR)$ y $E_{]a,b[,\alpha}$ el subespacio de $C_\infty([a, b], IR)$ de todas las funciones que están a una distancia de x_0 menor o igual que α: $E_{]a,b[,\alpha} = \{g \in C_\infty([a,b], IR) : d_\infty(x_0, g) \leq \alpha\}$.

Entonces $E_{]a,b[,\alpha}$ es completo.

Demostración.

Basta probar que $E_{]a,b[,\alpha}$ es cerrado en $C_\infty([a, b], IR)$. Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_{]a,b[,\alpha}$ tal que $g_n \to g$ en $C_\infty([a, b], IR)$. Probemos que $g \in E_{]a,b[,\alpha}$:

Para todo $t \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|g(t) - g_n(t)| \leq d_\infty(g, g_n).$$

Entonces, para todo $t \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$-d_\infty(g, g_n) \leq g(t) - g_n(t) \leq d_\infty(g, g_n),$$
$$g_n(t) - d_\infty(g, g_n) \leq g(t) \leq d_\infty(g, g_n) + g_n(t),$$

$$-\alpha + x_0(t) - d_\infty(g, g_n) \leq g(t) \leq d_\infty(f, g_n) + x_0(t) + \alpha \qquad (24)$$

Ahora, para cada $t \in [a,b]$, tomando límite en cada miembro de (24) cuando $n \to \infty$, se obtiene $-\alpha + x_0(t) \leq g(t) \leq x_0(t) + \alpha.$

Luego,

$$|g(t) - x_0(t)| \leq \alpha, \quad \forall t \in [a,b],$$

es decir,

$$d_\infty(g, x_0) \leq \alpha .$$

Se concluye que

$$g \in E\,]a,b[,\, \alpha .$$

Demostración (del teorema de existencia y unicidad de Picard)

Probemos que existe un intervalo $I = [t_0 - h,\, t_0 + h],\, h > 0,$ contenido en $]a,b[,$ y una constante $\alpha > 0,$ tal que el operador $T : E_{I,\alpha} \to C_\infty(I,\, IR)$

$$T[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$

cumple que:

1. $T(E_{I,\alpha}) \subset E_{I,\alpha}$

2. T es una contracción.

Escojamos constantes positivas h_1 y α_1 tales que el rectángulo cerrado

$$R_1 = \{(t,\, x) \in IR^2 : |t - t_0| \leq h_1, |x - x_0| \leq \alpha_1\} \subset R.$$

Como R_1 es un intervalo cerrado y f y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ son continuas en R_1, existen constantes $M > 0$ y $L > 0$ tales que

$$|f(t,\, x)| \leq M,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq L,\ \forall (t,\, x) \in R_1.$$

Sea g una función continua en $I_1 = [t_0 - h_1,\, t_0 + h_1]$ que cumple $|g(t) - x_0| \leq \alpha_1,$ para todo $t \in I_1$. Para una tal g se tiene

$T[g](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))\, ds.$ Luego para $|t - t_0| \leq h_1$ se tiene

$$\left|T[g](t)-x_0\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f\left(s,g(s)\right)ds\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} \left|f\left(s,g(s)\right)\right| ds\right| \le M\left|\int_{t_0}^{t} ds\right| = M(t-t_o)$$

Se concluye que para toda $g \in C(I_1, IR)$ que cumple que $\left|g(t)-x_0\right| \le \alpha_1$, se tiene que $\left|T[g](t)-x_0\right| \le M\left|t-t_0\right|, \ \ \forall t \in I_1 = [t_0 - h_1, t_0 + h_1]$.

La interpretación geométrica de la desigualdad anterior es que el gráfico de la función $T[g](t)$ en el intervalo I_1 se encuentra situado en el sector limitado por las rectas $x = x_0 \pm M(t-t_0)$. De la última desigualdad obtenida se concluye que si tomamos $h_2 < mín\left\{h_1, \frac{\alpha}{M}\right\}$, Entonces el gráfico de T[g] se encuentra en el rectángulo $[t_0 - h_2, t_0 + h_2] \times [x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1] \subset R_1$ cosa que no podemos garantizar en el rectángulo R_1. En breve veremos que para que el operador *T* sea una contracción, se requiere que $h < \frac{1}{L}$, por lo que debemos tomar h tal que

$$0 < h < \min\left\{h_1, \frac{\alpha}{M}, \frac{1}{L}\right\} \qquad (25)$$

Concluyendo: si tomamos h como en (25) y $\alpha = \alpha_1$, si

$$I = [t_0 - h_0], \quad E_{I,\alpha_1} = \left\{g \in C_\infty(I,R) : d_\infty(x_0, g) \le \alpha_1\right\}$$

Entonces $T(E_{I,\alpha}) \subset E_{I,\alpha_1}$. En efecto, $si \ g \in E_{I,\alpha_1}$

$\left|T[g](t)-x_0\right| \le M\left|t-t_0\right| \le Mh < M\left(\frac{\alpha_1}{M}\right) = \alpha_1$, es decir, $T[g] \in E_{I,\alpha_1}$.

Probemos que T es una contracción:

Sean $u, v \in E_{I,\alpha_1}$. Recordemos que sobre R_1 se tiene que

$$\left| \partial f \big/ \partial x \right| \leq L, \quad \forall (t, x) \in R_1.$$

$$|T[u](t) - T[v](t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds \right|$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, z(s))[u(s) - v(s)]ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |u(s) - v(s)| ds \right|$$

$$\leq L d_\infty(u, v) |t - t_0| = L h d_\infty(u, v).$$

Por (25) $Lh < 1$. Luego, T es una contracción.

CONCLUSIÓN

No es esta la culminación del presente trabajo, pues al profundizar en la importancia del tema de investigación desarrollado en el mismo nace el compromiso de seguir enriqueciéndolo. Sabiendo que la topología se va incorporando y tomando cada vez más importancia en la educación superior de nuestro país, se debe seguir profundizando en estos aspectos.

BIBLIOGRAFÍA

1. GLEASON, ANDREW M., Fundamental of Abstract Analysis, Addison-Wesley, 1966.

2. HINRICHSEN D., FERNÁNDEZ MUÑIZ, J. L., FRAGUELA C., A., Topología General, 2da. Edición, 2002.

3. KUMARESAN S., Topology of Metric Spaces, Alpha Science International Ltd., Harrow, U. K., 2005.

4. NAGLE, R. K., SAFF, E. B., SNIDER, A. D., Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems, 6th Edition, Addison-Weley, 2012.