VICERRECTORÍA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Trabajo Final para optar por el título de:

Maestría en Matemática Superior.

Título:

"Estrategia Didáctica para Favorecer el Aprendizaje de la Solución de Ecuaciones Trigonométricas en los Estudiantes de Cuarto de Bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara"

Postulante:

Lic.Natanael Almánzar Liriano. Matrícula: 2015-0287

Tutor:

Dr. Ignacio De La Caridad Pérez Yzquierdo

Santo Domingo

Diciembre, 2016

ÍNDICE DE CONTENIDO

DEDICATORIAS

A mi esposa Alexandra Torres.

Por ser la persona más importante de mi vida por estar ahí en todos momentos que hemos pasados juntos, por ser mi soporte y ayuda. Por eso te amo.

A María Altagracia Liriano, mi querida y amada madre…

Por ser una mujer luchadora, que siempre me enseño el valor del trabajo duro y la responsabilidad, porque siempre he contado con su apoyo, inspiración y amor incondicional.

A mis hijos: Nathalie, Alexa y Nataniel Almanzar Torres.

Quienes representan la mayor razón de mi esfuerzo y mi trabajo. Ustedes me motivan a dar lo mejor de mí, para que aprendan por el ejemplo y no por las palabras.

AGRADECIMIENTOS

A Dios,

Gracias mi Dios por ser mi guía y ayudador y porque todas las cosas que puedo alcanzar es por tu amor y misericordia.

A mi Padre José Almánzar.

Por ser mi mejor ejemplo a seguir, por tu cariño, apoyo y respaldo en toda mi vida. Gracias porque siempre ha estado conmigo.

A mi esposa Alexandra Torrez.

Por ser la mejor esposa que un hombre puede tener, por soportarme y ayudarme y siempre estar dispuesta a darme ánimo y fuerza. Tú eres mi mayor fuente de inspiración.

A mis hijos.

Nathalie, Alexa y Nataniel ustedes son la razón mi esfuerzo, mi trabajo y dedicación.

A mis compañeras de estudio: Ceballos, Yesenia, Carlos, Pedro, Neyla, Martha.

Por conformar un grupo de estudio exitoso y comprometido con el buen logro de nuestros objetivos y metas educativas a lo largo de toda esta maestría. Gracias también a todos los demás compañeros que de una forma u otra aportaron o ayudaron en la consecución de esta meta.

A mi asesor Dr. Ignacio De La Caridad Pérez

Por proveer las herramientas para hacer de esta investigación una experiencia enriquecedora y forjadora de nuevos conocimientos.

Gracias……

INTRODUCCIÓN.

La sociedad actual requiere de un acelerado desarrollo de las ciencias, ella está inmersa en una búsqueda constante de soluciones a los problemas que enfrenta, la puesta en práctica de vías más efectivas con el fin de formar profesionales capaces de interpretar y transformar la realidad que les toque vivir y brindar soluciones creadoras a los problemas que se les presentan, esto es uno de los grandes retos de las Instituciones de Educación del presente siglo. Los constantes cambios, determinados por la influencia de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), la Robótica, la Genética, inventos inimaginables, presuponen nuevas relaciones de convivencia humana, cultural, política, científica, etc. Todo lo anterior exige al ser humano de hoy, nuevas condiciones y dimensiones en su formación. El perfeccionamiento de la enseñanza en República Dominicana desde hace algunos años se ha convertido en el centro de atención del ministerio de Educación, en correspondencia con la política educacional que ha trazado el Estado Dominicano. El logro de una enseñanza capaz de proporcionarles a los estudiantes la posibilidad de aprender a aprender adquiere una importancia de primer orden. Se requiere cada vez más que los estudiantes logren desarrollar las capacidades necesarias como futuros trabajadores en lo que respecta, fundamentalmente, a su independencia y a la solución creadora de los problemas no rutinarios y profesionales que se presenten. Lo planteado anteriormente pone de manifiesto la importancia de que, en las Instituciones Educativas se produzcan cambios, específicamente en los docentes, como gestores del proceso de Enseñanza-Aprendizaje, diseñen e implementen estrategias didácticas, que contribuyan favorablemente a ello, la enseñanza de la Matemática no está ajena a estos cambios.

A partir de la experiencia del autor del presente estudio como docente del área de Matemática, en la observación y análisis de trabajos individuales o grupales que implican la aplicación por parte del estudiante de habilidades en la solución de ecuaciones trigonométricas fueron detectadas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, dificultades al momento de:

- Identificar una ecuación trigonométrica.
- Recordar las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.
- Aplicar el Teorema de Pitágoras.
- Memorizar los ángulos notables en un triángulo rectángulo y sus razones trigonométricas.
- Memorizar las identidades trigonométricas y su aplicación en la simplificación de expresiones trigonométricas.
- Despejar la incógnita.

Las dificultades antes relacionadas, constituyen situaciones problémicas genésicas de la presente investigación, que se fundamenta en los resultados de las evaluaciones obtenidas por los estudiantes antes mencionados y en la observación sistemática del docente.

Posteriormente a través de la aplicación de las diferentes técnicas de investigación tales como: observación a docentes de Matemática en su práctica dentro del aula con sus estudiantes, entrevista a docentes del área y a estudiantes de cuarto de bachillerato, revisión documental y bibliográfica, se constató lo siguiente:

- Escasa motivación y toma de conciencia por parte de los docentes en relación a la importancia de implementar estrategias didácticas que contribuyan al aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes.

- En la generalidad de los casos, no se realiza un trabajo sistémico, sistemático e integrado del colectivo de profesores que imparten la asignatura, en función de la creación de estrategias comunes para el desarrollo de una cultura en torno a la solución de ecuaciones trigonométricas.
- En el Diseño Curricular del Segundo Ciclo del Nivel Medio Modalidad General, Segundo Grado, en su versión anterior, pues la actual está aún en marcha, no se explicitan estrategias para la solución de ecuaciones trigonométricas.

Por otra parte, la Matemática en el currículo de las carreras de las Instituciones de Educación Superior requiere que el estudiante que ingresa, cuente con conocimientos previos, entre otros, en relación a la solución de ecuaciones trigonométricas, lo cual facilita su desempeño en el proceso de enseñanza-aprendizaje al que deberá enfrentarse.

Es necesario mencionar que en la planificación y ejecución del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, no siempre se tienen en cuenta fundamentos científicos de su didáctica en sus concepciones más avanzadas, lo cual, ocurre en ocasiones, por desconocimiento de los docentes de esta rama o por la complejidad que entraña llevar a la práctica dichas concepciones teóricas.

Lo anterior pone de manifiesto que a la solución de ecuaciones trigonométricas desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática no se le presta la atención que ello requiere, puesto que la labor en este sentido queda básicamente en la espontaneidad del accionar de los docentes.

Problema Científico: La concepción didáctica para solucionar ecuaciones trigonométricas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática de cuarto de Bachillerato.

Objeto de la Investigación: El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara.

Objetivo de la investigación: Diseñar una estrategia didáctica para favorecer el aprendizaje en la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara.

Objetivos Específicos:

- Fundamentar gnoseológicamente los enfoques didácticos actuales del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en general, de la trigonometría y de la solución de ecuaciones trigonométricas en particular.
- Caracterizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, en función del aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.
- Diseñar los objetivos, requerimientos, acciones de la estrategia y elaboración de las tareas, que contribuyan al aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara.

Métodos y técnicas:

- **Revisión bibliográfica y análisis documental** para la Fundamentación teórica de los enfoques didácticos actuales del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en general y de la trigonometría en particular.
- **Observación** a estudiantes en la ejecución de tareas para diagnosticar las insuficiencias presentadas en el proceso de solución de ecuaciones

trigonométricas y la observación a clases de los docentes que imparten la misma materia para la **c**aracterización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, en función del aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

- **Entrevista a docentes** para la caracterización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, en función del aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

Novedad Científica:

Estrategia Didáctica para Favorecer el Aprendizaje en la Resolución de Ecuaciones Trigonométricas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara.

Significación práctica:

Está dada por la contribución de la estrategia al aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas, una vez que la misma se implemente en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara y comprobada su efectividad, pudiera ser incluida como estrategias en el diseño curricular nacional, como una manera de hacerse extensiva su aplicación al resto de los Centros Educativos y como consecuencia, contribuir al perfeccionamiento del proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática en República Dominicana.

Base metodológica de la investigación:

Se sustenta en el enfoque de L. Vygotsky (1960,1967), en lo relacionado con que la estructuración y el desarrollo de la personalidad se producen a partir de la socialización, a través de su integración al medio social a partir de las potencialidades de la persona y de la cultura acumulada por la humanidad. Además, en cuanto a la conceptualización de la Trigonometría se fundamenta esencialmente en un conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación, elaborado por un colectivo de especialistas del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Ministerio de Educación de Cuba.

La tesis cuenta con una introducción, dos capítulos, conclusiones, recomendaciones bibliografía y anexos.

En el capítulo I se abordan: la fundamentación gnoseológica de los enfoques didácticos actuales del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en general, de la trigonometría y de la solución de ecuaciones trigonométricas en particular, además, se caracteriza el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, en función del aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

En el capítulo II se muestran: los objetivos y tareas específicas que conforman la estrategia, así como los requerimientos para su implementación de manera que contribuyan al aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara.

CAPÍTULO I

LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LOS ESTUDIANTES DE CUARTO DE BACHILLERATO DEL LICEO VESPERTINO ARGENTINA MATEO LARA.

En este capítulo se describen los principales enfoques didácticos del proceso docente-educativo de la Matemática, los antecedentes y caracterización epistemológica de la trigonometría y la solución de ecuaciones trigonométricas, los antecedentes y caracterización actual del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, en función del aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

1.1. Fundamentación gnoseológica de los enfoques didácticos actuales del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en general, de la trigonometría y de la solución de ecuaciones trigonométricas en particular.

1.1.1.Principales enfoques didácticos del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

El estudio científico de los problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas surge en el siglo XX, aproximadamente a finales de la década de los años cincuenta en Europa Occidental y Norteamérica. El problema del aprendizaje de la matemática constituye en la actualidad uno de los mayores retos para la didáctica de esta ciencia; varios son los factores que inciden en ello y de ahí su complejidad a la hora de abordar propuestas que luego deben concretarse en el aula. Constituyen antecedentes importantes los estudios psicológicos del siglo XX y los trabajos de diversos matemáticos y educadores sobre la enseñanza de la matemática que a continuación se reseñan.

La Didáctica de la Matemática, en sentido general, ha estado influenciada por diferentes corrientes de la Psicología Educativa como el conductismo, cognitivismo, constructivismo y el enfoque histórico cultural.

Las corrientes cognitivas y constructivistas del aprendizaje han tenido también gran influencia en la didáctica de la matemática. En las últimas décadas se ha mostrado una atención creciente por el papel de la cognición en el aprendizaje humano; se ha hecho hincapié en procesos tales como: la atención, la memoria, la percepción, las pautas de reconocimiento y el uso del lenguaje en el proceso del aprendizaje de la matemática. Se reconocen las aportaciones de (D. Ausubel, 2002; J. Bruner, 1969; J. Piaget, 1968, 1990) entre otros, los cuales han contribuido de manera indiscutible con sus estudios al enriquecimiento de la didáctica de la Matemática.

Por ejemplo, el aprendizaje por descubrimiento de J. Bruner (1988) situó la resolución de problemas como meta y eje del aprender en matemática; el aprendizaje significativo de D. Ausubel (2002) propone como uno de los factores que más influye en el aprendizaje los conocimientos previos del alumno sobre los nuevos que van a enseñarle pues, el nuevo conocimiento se asentará sobre el viejo.

En resumen, estas corrientes ponen el énfasis en la construcción personal y mental del sujeto con la intención de resaltar el papel activo que posee la persona en todo este proceso, pero sin considerar la influencia de lo ambiental, lo social y lo cultural.

El enfoque histórico cultural de L. Vygotsky (1960, 1979, 1984, 1998) con sus aportaciones más significativas entre las que se destaca la importancia que ejerce el medio social en el aprendizaje, la integración de los factores sociales y personales, su visión de la educación como fuente del desarrollo y el concepto sobre la zona de desarrollo próximo, categoría de suma importancia que permitió revelar la dialéctica entre las posibilidades o potencialidades del sujeto y su desarrollo. Desde esta perspectiva el conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura.

1.2. La trigonometría. Antecedentes y desarrollo histórico.

La palabra trigonometría proviene del griego "trigonos" (triángulo) y "metros" (metria). Hace más de 3.000 años los babilonios y los egipcios ya empleaban los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para realizar medidas en agricultura y en la construcción de las pirámides. En Grecia, donde se destacó el matemático y astrónomo Hiparco de Nicea en el S.II a.C, siendo uno de los principales desarrolladores de la trigonometría, construyó las tablas de “cuerdas” para la resolución de triángulos planos, que fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad. En ellas iba relacionando las medidas angulares con las lineales. Para confeccionar dichas tablas fue recorriendo una circunferencia de radio r desde los 0º hasta los 180º e iba apuntando en la tabla la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central y la circunferencia a la que corta. Esa tabla es similar a la moderna tabla del seno. No se sabe con certeza el valor que usó Hiparco para el radio r de esa circunferencia, pero sí se conoce que 300 años más tarde el astrónomo Alejandrino Tolomeo utilizó un radio r = 60, ya que los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios. Tolomeo incorporó también en su gran libro de astronomía “El Almagesto” una tabla de cuerdas con un error menor que 1/3.600 de unidad. Junto a ella explicaba su método para compilarla, y a lo largo del libro daba bastantes ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. Además de eso Tolomeo enunció el llamado “teorema de Menelao”, utilizado para resolver triángulos esféricos, y aplicó sus teorías trigonométricas en la construcción de astrolabios y relojes de sol. La trigonometría de Tolomeo se empleó durante muchos siglos como introducción básica para los astrónomos.

Al mismo tiempo que los griegos, los astrónomos de la India desarrollaron también un sistema trigonométrico, pero basado en la función seno en vez de en cuerdas. Aunque, al contrario que el seno utilizado en la actualidad, esta función no era una proporción, sino la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para esa función seno en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes continuaron con los estudios de trigonometría heredados de los pueblos de Grecia y de la India, pero prefirieron trabajar con la función seno. De esta forma, a finales del siglo X ya habían completado tanto la función seno como las otras cinco funciones trigonométricas: coseno tangente, cotangente, secante y cosecante. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos, donde incorporaron el triángulo polar. Estos matemáticos árabes fueron quienes sugirieron el uso del valor r = 1 en vez de r = 60, lo que dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas. Todos estos descubrimientos los fueron aplicando a la astronomía, logrando medir el tiempo astronómico, e incluso los utilizaron para encontrar la dirección de la Meca, tan fundamental a la hora de realizar las cinco oraciones diarias requeridas por la ley islámica orientados en esa dirección. Los científicos árabes también compilaron tablas de gran exactitud. Por ejemplo, las tablas del seno y de la tangente, construidas con intervalos de 1/60 de grado (1 minuto) tenían un error menor que 1 dividido por 700 millones. Además, el primer estudio de las trigonometría plana y esférica como ciencias matemáticas independientes lo realizó el gran astrónomo Nasir al-Din al-Tusi en su obra “Libro de la figura transversal”.

La trigonometría se introdujo en occidente sobre el siglo XII a través de traducciones de libros de astronomía arábigos. En Europa fue el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, más conocido como Regiomontano, quien realizó el primer trabajo importante en esta materia, llamado “De Triangulus”. Durante el siguiente siglo otro astrónomo alemán, Georges Joachim, conocido como Retico, introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones en vez de como longitudes de ciertas líneas. Ya en el S.XVI el matemático francés François Viete incorporó en su libro “Canon matemáticas” el triángulo polar en la trigonometría esférica, y encontró fórmulas para expresar las funciones de ángulos múltiples en función de potencias de las funciones de los ángulos simples. Desde entonces, la trigonometría como estudio de las líneas circulares, y el álgebra de los polinomios, se prestan mucho apoyo.

A principios del S.XVII se produjo un gran avance en los cálculos trigonométricos gracias al matemático escocés John Napier, que fue el inventor de los logaritmos. También encontró reglas nemotécnicas para resolver triángulos esféricos, y algunas proporciones para resolver triángulos esféricos oblicuos, llamadas analogías de Napier. Medio siglo después, el genial Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral, logrando así representar muchas funciones matemáticas mediante el uso de series infinitas de potencias de la variable x. En la rama de trigonometría, Newton encontró la serie para el sen x, y series similares para el cos x y la tg x. Con la invención del Cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas al Análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Por último, en el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler fue quien verdaderamente fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos. De hecho, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

El importante desarrollo que Francois Vieta (1540-1603) ha logrado con el Álgebra Simbólica le permite aplicar esta de modo sistemático a la trigonometría y llega así a obtener, por procedimientos algebraicos, casi todas las identidades fundamentales de la actual trigonometría, dando de este modo el paso definitivo hacia la actual trigonometría elemental y es la que constituye el objeto de aprendizaje de los estudiantes del nivel medio.

1.2.1. Didáctica de la Trigonometría.

Se han realizado pocas investigaciones sobre el aprendizaje de la Trigonometría, comparado con el Álgebra, sin embargo, se han podido localizar algunas, de autores como: de Kee y otros, s.f.; Shama,1998; Delice y Monaghan,2003; Balckett y Tall, 1991, ellos fundamentalmente se limitan a relacionar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en algunos de los conceptos y procedimientos de la trigonometría, sin embargo, aún no se ha logrado la construcción de un modelo para el razonamiento trigonométrico, tal y como se ha hecho con el Álgebra.

En cuanto a la conceptualización de la Trigonometría el autor de este estudio se fundamenta esencialmente en un conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación, elaborado por un colectivo de especialistas del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Ministerio de Educación de Cuba.

A continuación, como resultado de una revisión documental y el análisis crítico-reflexivo, se relaciona una secuencia lógica del abordaje de los conceptos de trigonometría que de manera generalizada aparecen en las fuentes consultadas, la cual se ha limitado al contexto del proceso de enseñanza aprendizaje del nivel medio, específicamente de cuarto de bachillerato.

- La semejanza entre figuras planas.
- Las relaciones en el triángulo rectángulo.
- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en el triángulo rectángulo.
- Las Identidades trigonométricas fundamentales.
- Las razones trigonométricas de los ángulos notables.
- Obtención del valor de las razones trigonométricas con la calculadora.
- Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera en la circunferencia unidad.
- Sistema Circular de medida de ángulos.
- Generalización del concepto de ángulo.
- Funciones trigonométricas. Caracterización.
- Fórmulas de: adición de dos ángulos, ángulo duplo, semiángulo y la fórmula del coseno del ángulo duplo para bajar potencias de senos y cosenos de potencias pares.
- Identidades trigonométricas. Procedimientos para la demostración.
- Ecuaciones Trigonométricas.

Semejanza de triángulos.

Si tenemos dos triángulos ABC y A'B'C' cuyos ángulos son respectivamente iguales < A= < A', < B = < B' y < C = < C' entonces decimos que los lados opuestos a los ángulos respectivamente iguales son lados homólogos, en este caso son: a y a', b y b', c y c'

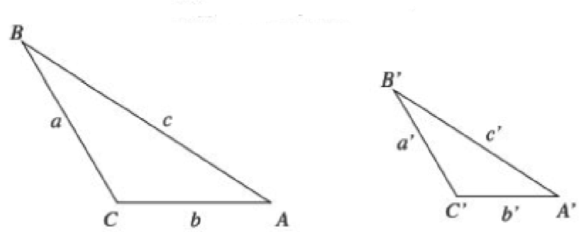


Figura 1

Definición 1

Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

Teorema 1. Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados (o con sus prolongaciones) otro triangulo que es semejante al triangulo dado.

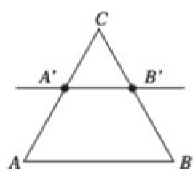


Figura 2

Tomando en cuenta la figura 3 donde $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$

Premisas:

Δ ABC Triangulo dado.

$\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$

Δ A'B'C' Triángulo formado al cortar la recta A'B' a los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$

Tesis:

Δ ABC$\sim$ Δ A'B'C'

Casos Generales de Semejanza de triángulos.

En este apartado solo nos limitaremos solo a mencionar los teoremas de semejanza de triángulos

Teorema 2 (Teorema de semejanza de triángulo a, a)

Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, entonces son semejantes.

Figura 3

Si < C = < c’ y < A = < A’ entonces Δ ABC ~ Δ A’B’ C’

Teorema 3 (Teorema de semejanza de triángulo p,a,p)

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente proporcionales e iguales el ángulo comprendido entre dichos lados, entonces estos triángulos son semejantes.

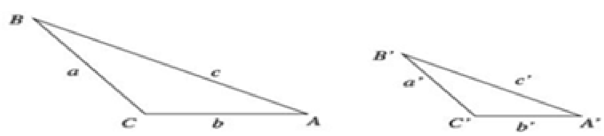


Figura 4

< C = < C’ y   a/a’ = b/b’ entonces Δ ABC ~ Δ A’B’C’

Teorema 4. (Teorema de semejanza de triángulo p,p,p)

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, entonces son semejantes.

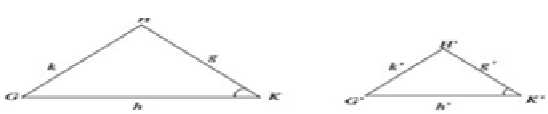


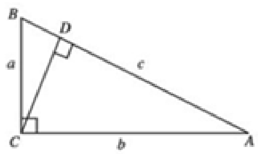
Figura 5

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ entonces Δ ABC ~ Δ A’B’C’

Relaciones en el triángulo rectángulo.

Grupo de teoremas de Pitágoras.

Si en un triángulo rectángulo ABC, donde <C = 90^0 (fig.6), se traza la altura relativa a la hipotenusa, se obtienen dos triángulos semejantes al triangulo ABC que son que son el Δ ADC y < Δ BDC.



Fiura 6

Efectivamente:

Δ ACD~ Δ ABC , < A es común y < ADC = < ACB = 90^0 por lo tanto:

Δ ABC ~ Δ ADC~ ΔBDC por carácter transitivo.

De algunas proporciones que se pueden establecer entre los lados homólogos de los tres triángulos semejantes de la figura 6, podemos deducir tres teoremas que tienen lugar en triángulos rectángulos cualesquiera.

Teorema 1. (Teorema de las alturas)

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de los segmentos que la altura determina sobre la hipotenusa.

Según el teorema, en la figura 6 se cumple que $h^2 = \overline{CD}.\overline{DB}$.

Teorema 2 (Teorema de los catetos)

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud del segmento de hipotenusa correspondiente al cateto.

Según el teorema, en la figura 6 se cumple que:

$\overline{AC^2} = \overline{CD}.\overline{CB}$ y $\overline{AB^2} = \overline{CB}.\overline{DB}$.

Efectivamente,

de ΔACD ~ Δ ABC tenemos: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ por lo que: $\overline{AC^2} = \overline{CD}\,.\overline{CB}$

de Δ BDC ~ ΔABC tenemos: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{AB}}$ por lo que: $\overline{AB^2} = \overline{CB}\,.\,\overline{DB}$

Teorema 3 (Teorema de Pitágoras)

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

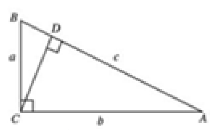


Figura 7

Vamos a deducir el teorema de Pitágoras aplicando el teorema de los catetos y basándonos en la figura 7

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \overline{BD}\,.\overline{AB} \\ b^2 &= \overline{AD}\,.\overline{AB} \end{aligned}\right\}$$ Teorema de los catetos.

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades, obtenemos:

$a^2 + b^2 = \overline{BD}\,.\overline{AB} + \overline{AD}\,.\overline{AB}$

$a^2 + b^2 = \overline{AB}(\overline{BD} + \overline{AD})$ (1) Aplicamos la propiedad distributiva.

Pero $c = \overline{AD} + \overline{BD}$ (2) Por suma de segmentos.

Sustituyendo (2) en (1) tenemos que: $a^2 + b^2 = c^2$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

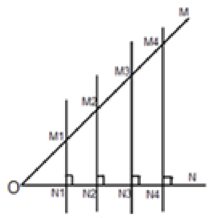


Figura 8

En la figura 8 tenemos el ángulo agudo MON y se han trazado n rectas perpendiculares al lado ON que intersecan al otro lado en el puntos M1,M2,M3,M4, etc. Las rectas trazadas son paralelas, ya que son perpendiculares a una misma recta. De esta manera se forman n triángulos rectángulos que son semejantes entre sí por tener dos ángulos iguales (él $R\angle O$ y el ángulo recto).

Como los triángulos son semejantes se pueden plantear las series de razones iguales siguientes:

$$\frac{\overline{N1M1}}{OM1} = \frac{\overline{N2M2}}{OM2} = \frac{\overline{N3M3}}{OM3} = \frac{\overline{N4M4}}{OM4} = \;....K1$$

$$\frac{\overline{ON1}}{OM1} = \frac{\overline{ON2}}{OM2} = \frac{\overline{ON3}}{OM3} = \frac{\overline{ON4}}{OM4} = \;............K2$$

$$\frac{\overline{N1M1}}{OM1} = \frac{\overline{N2M2}}{OM2} = \frac{\overline{N3M3}}{OM3} = \frac{\overline{N4M4}}{OM4} = \;............K3$$

Donde *k1, k2, k3* son constantes.

(Se pueden plantear otras tres series de razones iguales formadas por las razones recíprocas de las anteriores).

Para el mismo ángulo agudo MON y la razón entre dos lados de uno de los triángulos rectángulo formados y las razones de sus lados sus lados homólogos en los otros, son iguales (permanecen constante). Esto quiere decir que su valor no depende de las longitudes de los lados de los triángulos.

Sin embargo, si varia la amplitud del $\angle MON$ y hacemos el mismo análisis, comprobaremos que las razones trigonométricas son desiguales.

Efectivamente, si < M'ON ≠ < MON (fig.9), entonces ∆ OM' N' y el ∆OMN no son semejantes y las razones consideradas son desiguales.

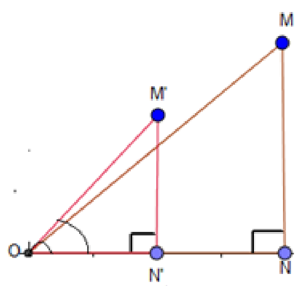


Figura 9

Entonces el valor de las razones de los lados de un triángulo rectángulo depende sólo de las amplitudes de los lados de los ángulos agudos, y para cada valor de ángulo diferente hay un valor de razón diferente. A estas razones se le da el nombre de razones trigonométricas de un triángulo rectángulo o funciones trigonométricas de un ángulo agudo.

En un triángulo rectángulo llamaremos cateto opuesto a un ángulo agudo, al cateto que queda al frente de dicho ángulo y al otro cateto lo llamaremos cateto adyacente, por ser el que le queda al lado.

Definiciones de las Razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

Definición 1

Seno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

Definición 2

Coseno de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

Definición 3

Tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo.

Por ejemplo, en el Δ ABC de la figura 13 donde < C = 90^0 tenemos que:

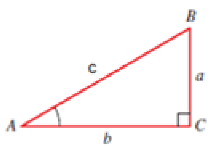


Figura 10

Seno del < A = a/c

Coseno del < A = b/c

Tangente de <A = a/b

Para designar el seno, el coseno y la tangente de un ángulo A utilizaremos la siguiente notación: sen A, cos A y tan A

Las razones trigonométricas definidas no dependen del triángulo rectángulo elegido, son la misma para todos los ángulos agudos con la misma amplitud.

Razones trigonométricas de ángulos notables.

Existen ciertos ángulos cuyas razones trigonométricas son sencillas, pues se pueden calcular fácilmente y aparecen con mucha frecuencia en la práctica. Estos son llamados **ángulos notables** y sus razones trigonométricas se calculan en los siguientes teoremas.

Teorema 1

Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo agudo de 30^0 el cateto opuesto a ese ángulo es la mitad de la hipotenusa.

Teorema 2

A en grados	Sen A	Cos A	Tan A
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
90^0	1	0	-

Se puede comprobar que en la tabla anterior se cumple lo siguiente:

$\text{Cos A} = \text{sen}(90^0 - A)$	$\text{sen A} = \cos(90^0 - A)$
$0 \le \text{sen A} \le 1$	$0 \le \cos A \le 1$

Sólo se debe memorizar el valor del seno porque el coseno de un ángulo es el seno del ángulo complementario y la tangente, el cociente del seno entre el coseno.

El valor de las razones trigonométricas con la calculadora.

No siempre se trata con los valores de los ángulos notables y sus razones, en ocasiones es necesario la utilización de valores de ángulos con los cuales los procedimientos de cálculo se vuelven muy engorrosos e inexactos, es por ello que en la actualidad esta situación queda satisfecha con el uso de la calculadora. Las calculadoras científicas actuales nos dan directamente el valor del seno, del coseno y de la tangente de cualquier ángulo. También nos permite calcular el ángulo del que conocemos el valor de una las razones trigonométricas antes mencionadas, como: sen^{-1}, cos^{-1} y tan^{-1}, o sea, para determinar la solución de una ecuación trigonométrica sencilla. Sin embargo, debido a la diversidad en los modelos de las calculadoras, no se hace pertinente en este acápite establecer un procedimiento para su utilización.

Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera en la circunferencia unidad.

Hasta ahora se ha visto el cálculo de las razones trigonométricas de ángulos agudos, sin embargo, también es posible definir las razones trigonométricas de ángulos que no son agudos. Para llevar a la práctica esta idea, consideremos un sistema de coordenadas y una circunferencia con centro en el origen; todo ángulo puede ser colocado (y de una sola manera) de forma que su vértice coincida con el origen de coordenadas, uno de sus lados llamado (lado inicial) coincida con la semirrecta positiva OX y que el otro lado (llamado lado terminal) quede ubicado (a partir del lado inicial) en la zona barrida en sentido contrario a las manecillas del reloj (figura 11)

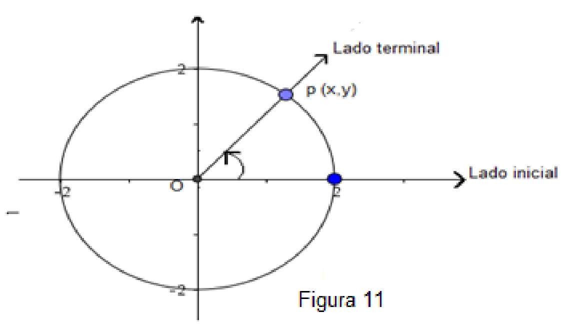


Figura 11

De esta forma, el lado terminal de cada ángulo interseca en un único punto a la circunferencia y podemos asociar al ángulo ese punto de una manera unívoca. Esto nos permite definir las razones trigonométricas utilizando las coordenadas de eso puntos.

Una circunferencia como la que se ha descrito recibe el nombre de circunferencia trigonométrica.

Definición 1

Sean $\propto$ un ángulo y $p(x,y)$ el punto que le corresponde en la circunferencia trigonométrica de radio r, entonces $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y definimos:

$$sen\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}, (\alpha \neq 90^0; \alpha \neq 270^0)$$

El seno es positivo donde lo es "y", en los cuadrantes I y II.
El coseno es positivo donde lo es "x", en los cuadrantes I y IV.
La tangente es positiva donde ambas coordenadas tengan el mismo signo, en lo cuadrantes I y III.

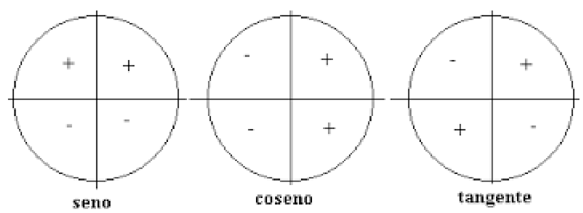


Figura 12

Con la definición las razones trigonométricas pueden ser negativas, pero el seno y el coseno, en módulo, no pueden ser mayor que 1:

$-1 \leq sen \propto \leq 1$ y $-1 \leq cos \propto \leq 1$

Fórmulas de reducción.

Teorema 1

Si $\propto$ es un ángulo agudo, se cumple:

a) Sen $(180^0 - \alpha)$ = sen α
b) Cos $(180^0 - \alpha)$ = - cos α
c) Tan$(180^0 - \alpha)$ = - tan α

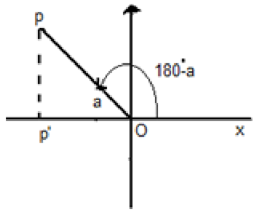


Figura 13

Se observa que por ser a un ángulo agudo 180^0 - α es un ángulo del II cuadrante.

En la práctica, para calcular las razones trigonométricas de un ángulo de II cuadrante, se resta de 180^0 y se toman las razones del ángulo obtenido con el signo que le corresponde en el segundo cuadrante.

Teorema 2.

Si α es un ángulo agudo, se cumple: $\text{sen}\,(180^0 + \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$ $\cos\,(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$ $\tan\,(180^0 + \alpha) = \tan\alpha$

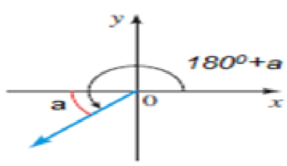


Figura 14

Teorema 3.

Si α es un ángulo agudo, se cumple: $\text{sen}\,(360^0 - \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$ $\cos\,(360^0 - \alpha) = \cos\alpha$ $\tan\,(360^0 - \alpha) = -\tan\alpha$

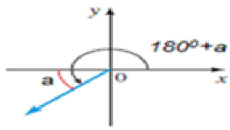


Figura 15

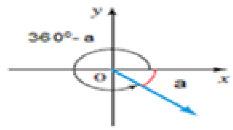


Figura 16

En resumen para calcular las razones trigonométricas de un ángulo mayor de 90^0 hallamos su diferencia con el más próximo entre los valores $180^0 y\ 360^0$; las razones trigonométricas coincidirán en módulo con la diferencia y tendrán el signo que corresponde al cuadrante. Para esto es conveniente esbozar la gráfica del ángulo en un sistema de coordenadas tal como se ha hecho para enunciar cada teorema anterior.

Sistema Circular de medida de ángulos.

El sistema sexagesimal de medidas de ángulos es el que se emplea normalmente en la escuela primaria, pero este sistema de medidas de ángulos tiene ciertas limitaciones. En matemática se usa con mucha frecuencia otro sistema: el sistema circular. Este sistema se utiliza, para medir el ángulo, la razón entre la longitud del arco de una circunferencia, interceptada por el ángulo y el radio de dicha circunferencia.

Esta razón puede utilizarse para medir el ángulo porque es constante para un mismo ángulo, cualquiera sea el radio de la circunferencia empleada.

Recordemos que la longitud de un arco de una circunferencia es proporcional al radio, si denotamos por l la longitud del arco de la circunferencia, por $\propto^0$ la amplitud del ángulo en el sistema sexagesimal por r el radio de la circunferencia tenemos:

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi\alpha^0}{180^0}$$

Y esto significa que dicha razón depende solamente de la amplitud del ángulo

(Figura 17)

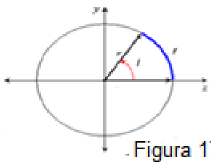


Figura 17

Definición 1

Si fijamos una circunferencia con centro en el origen y radio r un radian (en símbolos 1 rad) es la amplitud de un ángulo en el que la longitud del arco es igual al radio. (Figura 18)

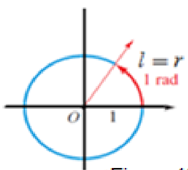


Figura 18

La definición anterior establece la unidad del sistema circular de medida de ángulos y significa que para calcular la medida de un ángulo en este sistema se calcula la razón entre la longitud del arco y el radio $\frac{l}{r}$. Los razonamientos anteriores pueden ser utilizados para convertir la medida de los ángulos de un sistema a otro; si denotamos por α_{rad} la medida en el sistema circular de ángulo y por α^0 a su medida en sexagesimal, tendremos que:

$$\alpha_{rad} = \frac{\pi\alpha^0}{180^0} \qquad \alpha^0 = \frac{\alpha_{rad} \times 180^0}{\pi}$$

Observe que cuando es posible, la medida en el sistema circular se expresa como una parte fraccionaria sencilla de π. La medida de un ángulo en el sistema circular no tiene dimensiones, porque es el cociente de dos longitudes. Esta observación nos permite calcular las razones trigonométricas de un número si se considera que es la medida de un ángulo en el sistema circular.

Generalización del concepto de ángulo.

El concepto geométrico de las medidas de los ángulos es el que hasta ahora hemos utilizados; con este concepto la medida de los ángulos tienen todos el mismo signo y toman valores entre 0^0 y 360^0. Este concepto es suficiente para resolver todos los problemas que se plantean en la Geometría, sin embargo, en la práctica se necesita trabajar con las razones trigonométricas de valores mayores o que son negativos.

Ángulo:

Es la abertura comprendida entre dos semirrectas con un punto común llamado vértice. (Aguilar Márquez, Arturo 2009)

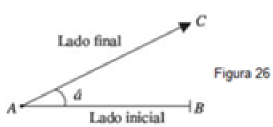


Figura 19

Ángulo Positivo:

Un ángulo es positivo si su rotación es en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj. (Stewart, James 2012). (Aguilar Márquez, Arturo 2009)

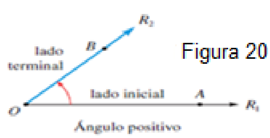


Figura 20

Ángulo negativo:

Un ángulo es negativo si su rotación es en el mismo sentido de giro de las manecillas de un reloj. (Stewart, James 2012). (Aguilar Márquez, Arturo 2009)

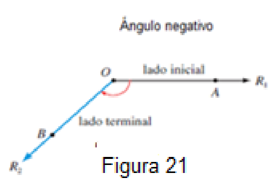


Figura 21

Ángulos en posición normal:

Un ángulo está en posición normal si esta trazado en el plano cartesiano con su vértice en el origen y su lado inicial está en el eje x positivo. (Stewart, James 2012)

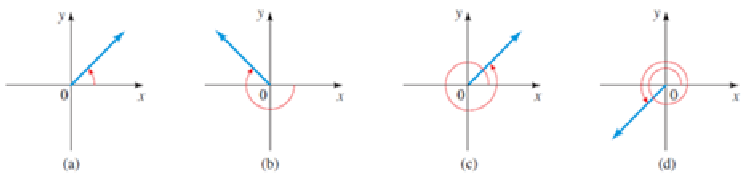


Figura 22

Ángulos coterminales:

Dos ángulos en posición normal son coterminales si sus lados coinciden. (Stewart, James 2012).

Funciones trigonométricas. Caracterización.

Definición de las funciones trigonométricas.

Cada número real representa la medida en radianes de un ángulo, esto significa que al número real se pueden hacer corresponder las razones trigonométricas de ese ángulo.

La función Seno. Propiedades y su gráfica.

Se llama función seno a la función que a cada número real x le asocia sen x.

La función seno está formada por los pares ordenados (t, sen x) con x Є R

Dominio: Todos los números reales.

Rango: [-1,1]

Es una función continua.

Crece y decrece alternadamente con ondas periódicas.

Simétrica con respecto al origen.

Es una función impar.

Es una función acotada.

No tiene asíntotas horizontales ni verticales

Los valores de la función oscilan continuamente entre -1 y 1 sin aproximarse a un número real determinado.

Gráfica de la función seno.

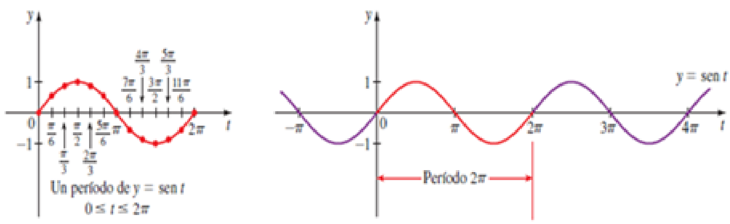


Figura 23

La función Coseno. Propiedades y gráfica.

Se llama función coseno a la función que a cada número real x le hace corresponder cos x. La función coseno está formada por los pares ordenados (x, cos x) con x Є R

Dominio: todos los reales.

Rango: [-1,1]

Es una función continua.

Crece y decrece alternadamente en ondas periódicas.

Es simétrica con respecto al eje de las ordenadas.

Es una función acotada.

No posee asíntotas horizontales.

No posee asíntotas verticales.

Los valores de la función oscilan continuamente entre -1 y 1 sin aproximarse a un número real determinado.

Grafica de la función coseno.

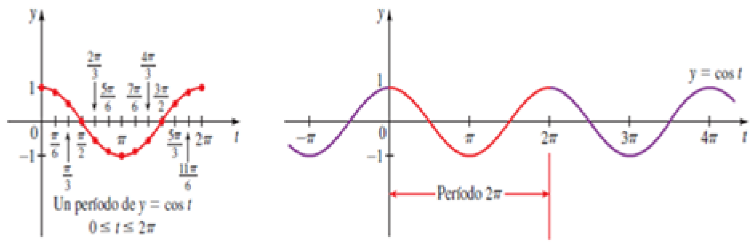


Figura 24

La función Tangente. Propiedades y gráfica.

Se llama función tangente a la función que a cada número real $x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$, $k \in$ Z se le hace corresponder tan x

Dominio: Todos los reales excepto los múltiplos impares de Л/2

Rango: Todos los reales.

Continuidad: No es una función continua.

Crece en cada intervalo de su dominio.

Simétrica con respecto al origen (impar).

No está acotada ni superior ni inferiormente.

Sin máximo ni mínimo locales.

Sin asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales $x = k.\left(\frac{\pi}{2}\right)$ para todos los enteros impares k.

Los valores de la función oscilan continuamente entre $-\infty\ y\infty$ aproximarse a un número real determinado.

Gráfica de la función tangente.

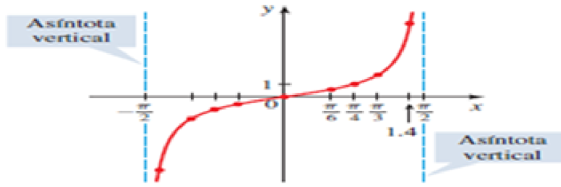


Figura 25

Fórmulas de Adicción de dos ángulos. Consecuencias.

Las identidades trigonométricas que se han mostrado hasta ahora, relacionan los valores de las funciones de un mismo ángulo, sin embargo, en la práctica se necesitan las identidades que relacionan las funciones de dos ángulos.

Resumen de los Teoremas 1, 2 y 3

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha sen\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp sen\alpha sen\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

Para obtener las formulas de la diferencia de dos ángulos se emplearon las identidades de los ángulos negativos en función de ángulos positivos, es decir:

$$sen(-x) = -sen\ x; \qquad \cos(-x) = cosx\ ; \qquad \tan(-x) = -tanx$$

Funciones trigonométricas del ángulo duplo.

Utilizando las fórmulas de adicción de dos ángulos se pueden expresar las funciones trigonométricas del ángulo duplo de un ángulo en término de las funciones trigonométricas de dicho ángulo.

Teorema1

Se cumple que:

$$sen2x = 2senxcox$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$$

$$= 1 - 2sen^2 x$$ para cuando: α≠(2k+1) π/2; α≠(2r+1) π/4; k,r ЄZ

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Fórmulas de semiángulos.

$$sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \text{cosx}}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \text{cosx}}{sen\,x} = \frac{sen\,x}{1 + \text{cosx}}$$

El signo $\pm$ *depende del cuadrante donde se encuentre* $\frac{u}{2}$

Fórmulas para bajar potencias pares de senos y cosenos en base al coseno del ángulo duplo.

$$sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

Identidades trigonométricas. Procedimientos para la demostración.

Existen ciertas igualdades que satisfacen todos los valores de la variable para los que tienen sentido llamadas identidades trigonométricas. Estas identidades desempeñan un importante papel en la transformación de las expresiones trigonométricas tanto en matemática como en la ingeniería y en especial a la hora de resolver una ecuación trigonométrica.

Recordemos que:

Si *f y g* son funciones, el dominio de la igualdad $f(x) = g(x)$ coincide con el dominio de la función $f(x) - g(x)$.

Definición 1

Una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ es una identidad si se satisface para cada x del dominio, los números que no pertenecen al dominio se llaman valores inadmisibles.

Demostración de identidades trigonométricas.

Para demostrar identidades trigonométricas no existe un método o regla general, pero se pueden recomendar dos procedimientos de trabajo, sin embargo es preciso destacar que para cualquier procedimiento que se aplique existen acciones que constituyen invariantes a ser aplicadas tales como:

- Conocer las identidades trigonométricas fundamentales incluyendo las inversas: secante, cosecante, cotangente.
- Las fórmulas de adición, ángulo duplo, mitad, las de bajar potencia, otras.
- Operaciones con expresiones algebraicas.
- La descomposición en factores.
- La simplificación de expresiones algebraicas.

Procedimiento I. Trabajar en ambos miembros:

1. Se transforma la identidad en otra conocida mediante sustituciones y transformaciones algebraicas que pueden afectar ambos miembros, ya sea de manera conjunta o independiente.
2. Se invierten los pasos dados y se deduce la identidad de otras conocidas, es necesario comprobar que los pasos dados en el 1) sean reversibles. Es necesario además tener cuidado de que los valores que resulten excluidos, al transformar sean verdaderamente inadmisibles.

Procedimiento II. Transformando un miembro en otro, no importa cuál.

1. Escoge el miembro que te ofrece mejor posibilidad para transformarlo, si te cuesta trabajo decidir escoge el procedimiento I.
2. Si es posible utiliza la descomposición en factores y simplifica.
3. Si no se te ocurre un camino para comenzar a transformar, expresa todas las funciones trigonométricas en función de senos y cosenos.
4. Comprueba que todas las transformaciones son válidas en el dominio de la identidad.

1.2.2. Didáctica para la solución de ecuaciones trigonométricas.

Ecuación trigonométrica

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina ecuación trigonométrica. Ejemplos:

$sen^2x + cos^2x = 1 \qquad 2senx + 1 = 0 \qquad tan^2x + 1 = 5$

La primera ecuación es una identidad, es decir, es verdadera para todos los valores de la variable, las otras dos ecuaciones son verdaderas solo para ciertos valores de x que hagan verdadera la ecuación.

Una ecuación trigonométrica es una expresión que tiene como incógnita valores angulares bajo los signos de las funciones trigonométricas, al resolverla se debe encontrar el o los valores que satisfacen dicha ecuación, esto es, que en una ecuación trigonométrica no siempre existe una solución única, en ocasiones existen varias soluciones, las cuales se expresan como un conjunto solución.

Ecuaciones trigonométricas básicas.

Una ecuación trigonométrica básica es una ecuación de la forma **T(x)=c**, donde T es un función trigonométrica y c es una constante. La resolución de una ecuación trigonométrica siempre se reduce a resolver una ecuación trigonométrica básica.

Pasos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

1. Aplicando las identidades, exprese todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación, en función de un mismo ángulo.
2. Aplicando las identidades, exprese todas las funciones trigonométricas en términos de una sola función.
3. Aplique los procedimientos algebraicos necesarios para simplificar la expresión y despejar la incógnita.
4. Determine los valores de la incógnita que satisfacen las ecuaciones transformadas.

1.3. Caracterización actual del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, en función del aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

En República Dominicana el nivel medio es el período educativo comprendido entre la Educación Básica y la Superior, dirigido a jóvenes cuyas edades oscilan entre 14 y 18 años, aunque es frecuente encontrar algunos que cursan este nivel con edades por debajo de la señalada para su inicio y de igual modo, otros que egresan sobrepasando los 18 años de edad. El macro-currículo que aún rige el Nivel Medio asume las modalidades General, Técnico Profesional y Artes. Desde el punto de vista de los requisitos propios de la educación formal, dichas modalidades dan acceso a la educación superior. En este nivel se contribuye a desarrollar las capacidades de los estudiantes, a orientar sus aptitudes e intereses, a elevar su nivel de formación, a través de la construcción de conocimientos, permitiendo su inserción de manera eficiente, en el mundo laboral y/o en estudios posteriores, permite, además, dar respuestas a las demandas de la sociedad, a los requerimientos del mundo sociocultural y del trabajo.

En la propuesta curricular del Nivel Medio, se propone la formación integral de los estudiantes propiciando el desarrollo de valores y actitudes, conceptos y procedimientos que les permitan participar en la sociedad de manera crítica, autocrítica y consciente, conocedores de sus deberes y derechos y con capacidad para hacer aportes mediante una integración creativa y productiva a la sociedad. Los aprendizajes a lograrse se producen a partir de la interacción de los estudiantes con sus iguales y la sociedad en general y con la intervención de la escuela y otras instituciones presentes en la comunidad. Se parte de la realidad circundante del estudiantado, tomando en cuenta sus potencialidades y capacidades, utilizando una metodología activa, la cual asegure su participación en los procesos educativos y el Liceo Vespertino

Argentina Mateo Lara, no está exento de estas responsabilidades como una institución educativa del sistema educativo nacional.

En este Liceo actualmente existen cuatro grupos de cuarto de bachillerato con cuarenta y cinco estudiantes cada uno y dos docentes del área de Matemática que son los que imparten esta disciplina en dicho grado, uno de ellos es el autor de este estudio.

Existe un área de Matemática con un coordinador quien debe velar por el buen funcionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina en el nivel medio. Uno de los aspectos esenciales es que los docentes elaboren su planificación didáctica en correspondencia con el macro-currículo, en el caso específico de cuarto de bachillerato, específicamente en el tema que atañe a este estudio, los relacionados con la trigonometría en general y con las ecuaciones trigonométricas en particular.

En el macro-currículo que rige actualmente en lo relacionado a la trigonometría se relaciona los siguientes:

Propósitos y Competencias esperadas	**Contenidos**	**Estrategias**
Utilizar las identidades trigonométricas en demostraciones y solución de problemas. Aplicar los resultados de las funciones trigonométricas de ángulos doble, mitad, suma y diferencia. Resolver ecuaciones trigonométricas.	Identidades trigonométricas. Suma y diferencia de ángulos. Ángulo doble y ángulo mitad. Ecuaciones trigonométricas.	Comprobar identidades trigonométricas ya que esta actividad fortalece la comprensión de las propiedades trigonométricas. Usar la calculadora científica para facilitar la integración entre la Trigonometría, la Geometría y el Álgebra.

De lo anterior se deduce que específicamente para la solución de ecuaciones trigonométricas no se describen estrategias que contribuyan al logro del aprendizaje de los estudiantes, quedando a la voluntad e iniciativa de los docentes del área. En este estudio se caracterizó el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el período comprendido desde 2014 hasta la actualidad y para ello se evaluaron los indicadores siguientes:

- Planificación didáctica de la Matemática de cuarto de bachillerato en función de la solución de ecuaciones trigonométricas.
- Papel del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en función de la solución de ecuaciones trigonométricas.
- Rol del docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en función de la solución de ecuaciones trigonométricas.
- Forma de presentación de los contenidos relacionados con la solución de ecuaciones trigonométricas.
- Concepción del aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

En cuanto a planificación didáctica de la Matemática de cuarto de bachillerato en función de la solución de ecuaciones trigonométricas, debido a que en el diseño curricular no se especifican estrategias para este tema, queda a la iniciativa y voluntad del docente.

En cuanto al proceso de enseñanza aprendizaje docente-educativo, el enfoque que ha prevalecido es el tradicional; la docencia se centra básicamente en exposiciones del contenido por parte del profesor y el alumno asume actitudes pasivas, resuelve ejercicios por reiteración mecánica siguiendo el modelo o procedimiento explicado por el profesor; generalmente los estudiantes no interactúan durante el proceso de aprender, simplemente reciben y asimilan información.

El profesor se comporta como un transmisor del saber, presenta los contenidos a través de clases expositivas, apoyadas con libros de textos y complementadas con ejercicios para contribuir a la fijación.

Los contenidos se presentan estructurados como resultados acabados con carácter estático y permanente, la evaluación mide la reproducción de la información.

El aprendizaje se concibe como asimilación de información donde la memoria tiene un rol decisivo, se apoya en la asociación y en la ejercitación.

En la actualidad se le concede especial importancia a la producción y socialización del conocimiento, siendo esta, una de las actividades estratégicas dentro de la sociedad actual. Todo lo anterior precisa un cambio en la concepción didáctica de cómo gestionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, diseñando una estrategia que contribuya en mayor medida al aprendizaje profundo de este tema (Vid. Cap. II)

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO I.

- Se ha corroborado la necesidad de trabajar de forma sistémica, todos los componentes y procesos implicados en el aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas, con un enfoque didáctico ajustado a las necesidades actuales.

- Se constata que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, específicamente en el tema de solución de ecuaciones trigonométricas en el Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara se sustenta en un enfoque tradicional, siendo el alumno un sujeto pasivo dentro del proceso.

- Se reconoce con urgencia la necesidad de diseñar propuestas didácticas que tengan en cuenta, desde el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, específicamente del tema objeto de estudio: la motivación, la participación individual y en equipos, la responsabilidad e integridad y el logro de los aprendizajes en los estudiantes del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara.

CAPITULO II

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA FAVORECER EL APRENDIZAJE DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS ESTUDIANTES DE CUARTO DE BACHILLERATO DEL LICEO VESPERTINO ARGENTINA MATEO LARA.

En correspondencia con el objetivo de la investigación, es propósito de este capítulo elaborar y fundamentar una estrategia didáctica para contribuir a al aprendizaje de la Solución de Ecuaciones Trigonométricas en los Estudiantes de Cuarto de Bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara la formación Se expresan los referentes teóricos, se describe la estructura general de la estrategia y los requerimientos para su implementación. Además, ofrecer una ejemplificación parcial de la estrategia, específicamente lo referido al diseño de tareas para ejecutar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara.

2.1. Referentes teóricos para la elaboración de la estrategia.

- Desde la Psicología, el enfoque histórico cultural de L. Vygotsky (1960,1967), específicamente lo relacionado con que la estructuración y el desarrollo de la personalidad se producen a partir de la socialización, a través de su integración al medio social, a partir de las potencialidades de la persona y de la cultura acumulada por la humanidad. Esta apropiación se realiza a través de la actividad que realiza el sujeto, la comunicación con sus semejantes y la influencia que ejerce y recibe en los grupos humanos a los cuales pertenece a lo largo de su existencia.

- Desde la Didáctica General se considera el proceso docente-educativo desde la teoría didáctica desarrollada por C. Álvarez (1997).

La unidad entre lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador. El proceso docente-educativo, tal como ha sido reconocido tiene como funciones lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador; tales funciones constituyen el modo en que se manifiesta el sistema para cumplir su principal objetivo que es la formación de los estudiantes.

La función instructiva relacionada con el desarrollo del pensamiento y la obtención de conocimientos no debe separarse de la segunda, que se refiere a la formación de valores y actitudes positivas, ni tampoco de la tercera, que incluye, la transformación cualitativa de los sujetos involucrados y el desarrollo de la integralidad, la independencia y la flexibilidad, que le propicien adaptarse a los constantes cambios de la sociedad.

- Desde la Didáctica de la Matemática, se utilizan los postulados de E. López (2008) acerca de la ***contextualización de la didáctica de la matemática*** que reconoce la integración e interacción, así como el sistema de relaciones y nexos de la matemática con los fenómenos y procesos de la naturaleza la sociedad y el pensamiento. Dicha contextualización se expresa en la unidad dialéctica entre la cultura matemática y el contenido de enseñanza. La cultura matemática es el elemento clave para la transformación y vitalidad del contenido.

- La dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje se expresa en la lógica de su ejecución, a partir del objetivo como categoría rectora, el método como categoría que refleja el modo de desarrollar el proceso en su estructura interna y los contenidos. El cumplimiento de los objetivos se logra a partir de los métodos seleccionados para lograr lo instructivo, educativo y desarrollador (la formación del estudiante).

- El alumno gestor de conocimientos bajo la dirección del profesor. Los principales actores implicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática son los estudiantes y los docentes; los primeros como protagonistas de su formación, sujetos gestores de conocimientos y los segundos, como responsables de dicha formación y promotores del desarrollo humano. Esto presupone necesariamente que el docente modifique sus métodos y estrategias, de manera que pueda orientar al alumno hacia la construcción del conocimiento, donde la indagación, la crítica, la reflexión, sean promovidos como actitudes favorables que propicien un aprendizaje integral.

- En cuanto a la conceptualización de la Trigonometría el autor de este estudio se fundamenta esencialmente en un conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación, elaborado por un colectivo de especialistas del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Ministerio de Educación de Cuba. Como resultado de una revisión documental y el análisis crítico-reflexivo, se relaciona una secuencia lógica del abordaje de los conceptos de trigonometría que de manera generalizada aparecen en las fuentes consultadas, la cual se ha limitado al contexto del proceso de enseñanza aprendizaje del nivel medio, específicamente de cuarto de bachillerato.
    - La semejanza entre figuras planas.
    - Las relaciones en el triángulo rectángulo.
    - Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en el triángulo rectángulo.
    - Las Identidades trigonométricas fundamentales.
    - Las razones trigonométricas de los ángulos notables.
    - Obtención del valor de las razones trigonométricas con la calculadora.
    - Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera en la circunferencia unidad.
    - Sistema Circular de medida de ángulos.

- Generalización del concepto de ángulo.
- Funciones trigonométricas. Caracterización.
- Fórmulas de: adición de dos ángulos, ángulo duplo, semiángulo y para bajar potencias pares de senos y cosenos.
- Identidades trigonométricas. Procedimientos para la demostración.

2.2. Estrategia didáctica para favorecer el aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

Objetivo general de la estrategia: favorecer el aprendizaje en la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara.

Requerimientos para la implementación de la estrategia:

- Disposición favorable de los docentes hacia la incorporación de la cultura relacionada con solución de ecuaciones trigonométricas en el proceso de enseñanza de la Matemática, dada la importancia y utilidad que posee la propuesta que se realiza, así como los beneficios que les aporta.
- Preparación del profesor para desempeñarse como un orientador y guía, lo que favorecerá la aplicación de la estrategia a través del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- Necesidad de perfeccionar la planificación didáctica en función del aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

Es importante destacar que en caso que algunos de estos requerimientos no estén dados lo cual de hecho puede suceder, entonces es recomendable implementar un momento de **sensibilización** que incluya actividades, con los docentes, dirigidas a lograr los requerimientos mencionados.

Actores directos de la estrategia:

Se concibe en la estrategia la participación de dos actores principales: el profesor y los estudiantes, el primero tiene como función guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje para lograr el aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas y el segundo debe ser protagonista en el proceso para gestionar sus conocimientos.

Etapas de la estrategia:

La estrategia consta de cuatro etapas: **diagnóstico, planificación, ejecución y evaluación.**

Descripción de las etapas de la estrategia.

Etapa de Diagnóstico: en esta etapa se identifican las debilidades de los estudiantes, las condiciones y potencialidades relacionadas con los conocimientos previos para la solución de ecuaciones trigonométricas. Se sugiere una prueba objetiva justo antes de comenzar el tema de solución de ecuaciones trigonométricas, en la que se incluyan ítems teórico-prácticos relacionados con:

- La semejanza entre figuras planas.
- Las relaciones en el triángulo rectángulo.
- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en el triángulo rectángulo.
- Las Identidades trigonométricas fundamentales.
- Las razones trigonométricas de los ángulos notables.
- Obtención del valor de las razones trigonométricas con la calculadora.
- Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera en la circunferencia unidad.
- Sistema Circular de medida de ángulos.
- Generalización del concepto de ángulo.

- Funciones trigonométricas. Caracterización.
- Fórmulas de: adición de dos ángulos, ángulo duplo, semiángulo y para bajar potencias pares de seno y coseno.
- Identidades trigonométricas. Procedimientos para la demostración.

Etapa de Planificación de la Estrategia.

En la etapa de planificación de la estrategia se deben concebir propuestas integradoras a partir de la presentación y utilización de los contenidos que tributen al logro de los aprendizajes en relación a la solución de ecuaciones trigonométricas, mediante la investigación y análisis crítico reflexivo, el trabajo colaborativo, participativo, entre otros. Algunas de las acciones específicas son: la incorporación en la planificación didáctica de las actividades de aprendizaje que constituyen la estrategia, elaborar materiales didácticos que posibiliten el trabajo investigativo, que permitan hacer énfasis en los aspectos de interacción y cooperación Desde estas concepciones, se requieren materiales que, al estar centrados en el alumno, tengan la flexibilidad necesaria para que se ajusten a las condiciones de aprendizaje, teniendo en cuenta las particularidades de cada estudiante y el contexto social y cultural en el que estos se desenvuelven.

Se sugiere la preparación de lecturas básicas y opcionales, guías de debates, etc. Esta acción conlleva necesariamente a la interacción de los docentes, coordinar acciones entre ellos para la elaboración de dichos materiales, ponerse de acuerdo en caso que existan diversas concepciones y opiniones para que los materiales cumplan su función, según los objetivos que persiguen.

Diseñar tareas para el aprendizaje en las que los estudiantes en relación a la solución de ecuaciones trigonométricas.

Etapa de ejecución de la Estrategia. En esta etapa se materializar las acciones de la etapa de planificación. En esta etapa se identifican las debilidades en los conocimientos previos, se orientan y ejecutan las tareas de aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas, se evalúan y se retroalimentan. En esta etapa interactúan directamente el profesor y los alumnos, los alumnos entre sí y todos estos con los procesos que acontecen en el entorno social a través de la tarea, creándose las condiciones propicias para el aprendizaje. La etapa de ejecución es el proceso en sí mismo, durante el cual se aprende.

Etapa de evaluación y retroalimentación de la estrategia.

Se incluye la evaluación de la estrategia, lo cual permite la retroalimentación permanente para el perfeccionamiento de la misma. En esta etapa se hace una valoración de la marcha en la aplicación de la estrategia en cada una de las etapas y se realizan las adecuaciones necesarias para su mejora sistemática. Específicamente es aquí que el docente debe autoevaluarse, ser evaluado por sus estudiantes y hacer los cambios.

2.3. Ejemplificación parcial de la estrategia didáctica para favorecer el aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

Etapa de Diagnóstico. Ejemplificación parcial.

Ejemplificación de ítems de una evaluación diagnóstica para identificar las debilidades en los conocimientos previos necesarios en el aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas.

Ítems de semejanza entre figuras planas.

En la figura siguiente, el ΔABC es rectángulo, el lado AB es su hipotenusa y el lado CD es perpendicular a lado AB, además se sabe que:

a= 6.0 cm *y b = 8.0*cm. Determine *la medida de los lados AB, AD, CD y BD.*

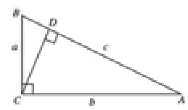


Figura 26

Ítems de razones trigonométricas de un ángulo agudo en el triángulo rectángulo.

Si θ es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, y $\cos\theta = \frac{3}{4}$ calcule los valores de las razones trigonométricas de que faltan.

En el Δ ABC que es rectángulo en el < C (fig. 27), se tiene que:

$\overline{AC}$ =4.0 cm y $\overline{AB} = 8.0\ cm$. Halle la amplitud del < B

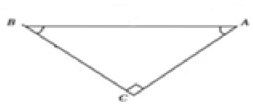


Figura 27

Las razones trigonométricas de los ángulos notables.

Calcula el valor de:

$$\frac{1+\tan 45^0 - sen 90^0}{\cos 0 \times sen 30^0 - \cos 90^0}$$

Ítems de sistema circular de medida de ángulos.

1. Calcula las razones trigonométricas de 150^0.

2. Calcula las razones trigonométricas de 225^0.

3. Calculemos las razones trigonométricas de 300^0.

Ítems sobre demostración de Identidad trigonométrica.

Demuestre la siguiente identidad:

a) Transformando un miembro al otro.
b) Transformando ambos miembros.

$$\frac{1+sen2x}{1-sen2x}=\frac{(\tan x+1)^2}{(\tan x-1)^2}$$

Etapa de Planificación de la Estrategia. Ejemplificación parcial.

Aunque en el macro currículo no se expliciten estrategias que contribuyan al aprendizaje de las ecuaciones trigonométricas, los docentes en su planificación didáctica deben incluirlas, específicamente, tareas y actividades de aprendizaje que promuevan la motivación, los valores, desarrollen las habilidades de solución de ecuaciones trigonométricas, investigativas, de colaboración, la interacción con el contexto social y cultural, el respeto a la diversidad, etc, como, por ejemplo:

- **Tareas de motivación:** Investigación individual fuera del salón de clases acerca de la aplicación de la solución de ecuaciones trigonométricas en el contexto real.
- **Tareas de Investigación para la construcción de conocimientos:** Tipo de tarea que se ejecuta individual y en equipos, mediante una guía de preguntas elaborada por el docente y los estudiantes de manera

colaborativa van construyendo los conocimientos acerca del concepto de ecuaciones trigonométricas y su clasificación, ejemplificando en cada caso, además de describir los pasos que de manera invariante se aplican en el procedimiento para la solución de las ecuaciones trigonométricas.

- **Tareas para desarrollar habilidades**: Tipo de tarea en equipos en el aula en la que el estudiante con la guía del docente identifica el tipo de ecuación trigonométrica y va tratando de aplicar los pasos invariantes en el procedimiento para su solución, cada vez con niveles de complejidad superior y con menos ayuda del docente.
- **Tareas para demostrar lo niveles de desempeño.** Tipo de tarea de manera individual en el que el estudiante va resolviendo ecuaciones trigonométricas de todo tipo y nivel de complejidad.

Independientemente que las tareas se diseñan para potenciar un tipo de aprendizaje, en ellas en sentido general se promueve el trabajo investigativo individual, reflexivo y crítico, colaborativo en equipos con respeto a la diversidad, la comunicación, entre otras.

Etapa de ejecución de la Estrategia. Ejemplificación parcial.

Actividad de aprendizaje #1. (Tarea para motivar)

Tema: Solución de Ecuaciones trigonométricas.

Objetivo: Motivar en los estudiantes el interés por el aprendizaje de la solución de las ecuaciones trigonométricas debido al reconocimiento de su aplicabilidad en el contexto real, como resultado de la investigación y el análisis crítico reflexivo individual, además del trabajo colaborativo en equipos, la discusión y el consenso, con respeto a la diversidad.

Descripción:

De manera individual haga una investigación en no menos de tres fuentes de una biblioteca virtual en relación a:

- tres situaciones reales en las que se aplican las ecuaciones trigonométricas.
- Definición de ecuación trigonométrica, clasificación y procedimientos para su solución.

En el salón de clases reunirse en equipos de tres integrantes, intercambiar los resultados de la investigación.

Discutir con respeto a la diversidad hasta llegar a un consenso de las tres situaciones más interesantes por equipo.

Según designación del docente, cada participante debe exponer con claridad una de las tres consensuada.

Al final el docente hará un cierre concluyente en relación a lo investigado.

Actividad de aprendizaje #2. (Tarea para construir conocimientos)

Tema: Solución de ecuaciones trigonométricas.

Objetivo: Definir ecuaciones trigonométricas a partir de lo investigado en varias fuentes, así como los diferentes tipos de ecuaciones a partir de ejemplos concretos

Describir la secuencia de pasos que de manera invariante deben ser aplicados en la solución de ecuaciones trigonométricas, trabajando en equipos, colaborativamente con responsabilidad y respeto.

Descripción:

El docente le entregará a cada estudiante la siguiente asignación:

Asignación de Tarea sobre las Ecuaciones trigonométricas.

Resultados de Aprendizajes Esperados. Definir ecuaciones trigonométricas, identificando los diferentes tipos, así como la descripción de pasos para su solución, trabajando de manera individual y en equipos.

Descripción.

Cada estudiante de manera individual fuera del salón de clases, consulte tres fuentes de una Biblioteca Virtual y conteste:

1. Definición de ecuaciones trigonométricas.
2. Clasificación de las ecuaciones trigonométricas. Ponga ejemplos de cada tipo
3. Describa los pasos para la solución de las ecuaciones trigonométricas

Cada estudiante debe generalizar desde lo encontrado en las tres fuentes consultadas y elaborar sus propias respuestas.

En el salón de clases al llegar, según designación del docente, formarán equipos de tres y discutirán sus respuestas hasta llegar a un consenso de la mejor.

Según designación del docente, un representante de cada equipo comunicará sus respuestas ante el resto del grupo.

El docente hará un cierre concluyente.

Actividad de aprendizaje #3. (Tareas para desarrollar habilidades en el uso de los conocimientos sobre ecuaciones trigonométricas)

Tema: Solución de ecuaciones trigonométricas.

Objetivo: Desarrollar las habilidades en los procedimientos para la solución de ecuaciones trigonométricas, trabajando colaborativamente con responsabilidad y respeto.

Descripción:

El docente hará una retroalimentación en relación a:

- Definición de ecuaciones trigonométricas.
- Tipos de ecuaciones trigonométricas

- Procedimientos para la solución de los diferentes tipos de ecuaciones trigonométricas.

Se formarán equipos de tres y deberán clasificar y aplicar los siguientes pasos a las ecuaciones trigonométricas dadas.

Pasos:

1. Aplique las identidades que necesite para que exprese todas las funciones trigonométricas que aparecen en la ecuación, en función de un mismo ángulo.
2. Aplique las identidades que necesite para que exprese todas las funciones trigonométricas en términos de una sola función.
3. Aplique los procedimientos algebraicos necesarios para simplificar la expresión y despejar la incógnita.
4. Determine los valores de la incógnita que satisfacen las ecuaciones transformadas.

Clasifique y resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$2sen\alpha - 1 = 0$

$senx - senx\cos x = 0$

$\tan^2 \alpha - 3 = 0$

$sen^2x - 2senx + 1 = 0$

$\cos x - sen^2x = 1$

$\cos 2x - senx = 0$

$senx + \cos x = 1$

$\cos x + 1 = -\cos 2x$

$\cos 2x + \cos^2 x = 5sen^2x$

Una vez que todos los equipos completen su asignación, según designación del docente, irán participando en la pizarra para solucionar cada ecuación trigonométrica.

El docente irá orientando e interviniendo para hacer cierres concluyentes.

Actividad de aprendizaje #4. (Tareas para desarrollar la autonomía e independencia en la aplicación de los procedimientos de cálculo)

Tema: Solución de ecuaciones trigonométricas.

Objetivo: Desarrollar las habilidades en los procedimientos para la solución de ecuaciones trigonométricas, trabajando de manera autónoma y con independencia, de manera responsable e íntegra.

Descripción:

El docente le entregará a cada estudiante los siguientes ejercicios de ecuaciones trigonométricas, los cuales deberán resolver de manera individual.

$$2\cos\alpha - 1 = 0$$
$$\cos x - senx\cos x = 0$$
$$4\tan^2\alpha - 2 = 0$$
$$\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$$
$$senx - \cos^2 x = 1$$
$$sen2x - \cos x = 0$$
$$sen2x + sen^2x = 5\cos^2 x$$

Se formarán equipos de tres y deberán consensuar sus procedimientos y resultados.

Una vez que todos los equipos completen su asignación, según designación del docente, irán participando en la pizarra para solucionar cada ecuación trigonométrica.

El docente irá orientando e interviniendo y haciendo cierres concluyentes.

Actividad de aprendizaje #5. (Tareas para demostrar lo niveles de desempeño en la solución de ecuaciones trigonométricas)

Tema: Solución de ecuaciones trigonométricas.

Objetivo: Aplicar los procedimientos para la solución de ecuaciones trigonométricas y su aplicación en situaciones del contexto real, trabajando de manera individual con independencia y creatividad.

Descripción:

El docente hará una retroalimentación en relación los pasos invariantes en la solución de ecuaciones trigonométricas.

De manera individual resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$2senx - \sqrt{3} = 0$$
$$4\cos^2 x - 1 = 0$$
$$\tan x senx + senx = 0$$
$$4\cos^2 x + -4\cos x = -1$$
$$2sen3x - 1 = 0$$
$$\cos\frac{x}{2} - 1 = 0$$
$$2\cos^2 x + senx = 1$$
$$\sec x - \tan x = \cos x$$
$$\sec x \tan x - \cos x \cot x = senx$$

Al terminar el docente designará a estudiantes para que resuelvan los ejercicios en la pizarra, discutir y consensuar

El docente hará el cierre concluyente

CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO II

- La estrategia didáctica fue concebida en una dinámica en la que se definen objetivos y acciones concretas de una manera integrada en las diferentes etapas por las que transita y que permitirán al docente con su implementación, lograr el aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes.

- La estrategia es concebida para que el estudiante, desarrollado en su ser (valores, actitudes, comportamientos) vaya adquiriendo el saber y el saber hacer (conocimientos, y habilidades) para solucionar las ecuaciones trigonométricas con responsabilidad, crítica reflexiva e integridad.

Etapa de evaluación y retroalimentación de la estrategia.

Cuando la estrategia sea aplicada durante dos períodos consecutivos a la mitad de los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, se registrarán los resultados en las evaluaciones relacionadas con el tema de solución de ecuaciones trigonométricas para la totalidad de los grupos. El docente deberá evaluar no sólo los rendimientos de sus estudiantes, además, conocer las opiniones de los estudiantes en relación a la estrategia, y al rol que el docente ha desempeñado como guía del proceso.

El docente hará un análisis comparativo entre los que les fue aplicada la estrategia y los que no, de esta manera se podrán implementar acciones de mejora.

CONCLUSIONES.

- El enfoque histórico cultural de L. Vygotsky (1960, 1979, 1984, 1998) se destaca por la importancia que ejerce el medio social en el aprendizaje, la integración de los factores sociales y personales, su visión de la educación como fuente del desarrollo y el concepto sobre la zona de desarrollo próximo, desde esta perspectiva el conocimiento es un producto de la interacción social y de la cultura.
- En cuanto a la conceptualización de la Trigonometría este estudio se fundamenta esencialmente en un conjunto de trabajos dirigidos al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Nacional de Educación, elaborado por un colectivo de especialistas del Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Ministerio de Educación de Cuba, y el autor siguió una secuencia lógica del abordaje de los conceptos de trigonometría que de manera generalizada aparecen en las fuentes consultadas, la cual se ha limitado al contexto del proceso de enseñanza aprendizaje del nivel medio, en la solución de ecuaciones trigonométricas.
- Como resultado de la observación a estudiantes y docentes del área en sus clases, entrevistas a docentes de área se constató que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, específicamente en el tema de solución de ecuaciones trigonométricas en el Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara se sustenta en un enfoque tradicional, siendo el alumno un sujeto pasivo dentro del proceso.
- La estrategia es concebida para que el estudiante, desarrollado en su ser (valores, actitudes, comportamientos) vaya adquiriendo el saber y el saber hacer (conocimientos, y habilidades) para solucionar las ecuaciones trigonométricas con responsabilidad, crítica reflexiva e integridad.

RECOMENDACIONES.

- Se recomienda la implementación de la estrategia didáctica para favorecer el aprendizaje de la solución de ecuaciones trigonométricas en los estudiantes de cuarto de bachillerato del Liceo Vespertino Argentina Mateo Lara, evaluar los resultados y retroalimentar para el perfeccionamiento de la misma en cada una de las etapas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Ausubel, D. (2002). Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva. Barcelona: Paidós.

2. Álvarez de Zayas, C. (1999). *El Diseño Curricular.* Cochabamba, Bolivia.

3. Álvarez de Zayas, C. (1994). *Epistemologia o Ciencia de las Ciencias.* Santiago de Cuba: Centro de Estudios de Educacion Superior "Manuel F. Gran" Universidad de Oriente.

4. Álvarez de Zayas, C. (1997). *Hacia una Escuela de Excelencia.* La Habana, Cuba: Editorial Academia.

5. Álvarez de Zayas, C. (1995). *Modelar lo que Investigo. Metodología de la Investigación Científica. I Parte Cómo se Modela la Investigación .Capitulo 4.* Santiago de Cuba: Centro de Estudios de Educacion Superior "Manuel F. Gran".

6. ANEP. (2004). La Evaluación de la Cultura Matemática en PISA. *Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico.*

7. Antibi, A. (1990). *Tratamiento didáctico de los problemas matemáticos. .* Francia: Universidad de Toloux.

8. Ballester, P. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* Pueblo y Educación.

9. Barco, S. (1989). Estado actual de la pedagogía y la didáctica. . *Revista Argentina de Educación.*

10. Blanco, L. (1991). Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de profesores de E.G.B y estudiantes para profesores. *UNEX Nro. 11, Madrid.*

11. Brito, H. (1993). Capacidades, habilidades y hábitos. Una alternativa para su tratamiento Psicológico y Pedagógico. *ISP "EJV"* . La Habana.

12. Bruner, J. (1969). *Hacia una teoría de la instrucción.* Mexico: UTHEA.

13. Bruner, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación.* Madrid: Morate.

14. Bruner, J. (1984). *El desarrollo de los Procesos de representación, en: Acción, Pensamiento y Lenguaje.* Madrid: Alianza ED.

15. Bruner, J. (1972). *El Proceso de Educación.* México: Ed. Uteha.

16. Bruner, J. (1978). *El Proceso mental en el aprendizaje.* Madrid: Ed.Narcea.

17. Bruner, J. (1986). *Realidad mental y mundos posibles.* Barcelona: Ed Gedisa.

18. CEPES., Colectivo de Autores del. (1995). *Tendencias Pedagógicas Contemporáneas.* La Habana.: Editorial El Poira.

19. CEPES., Colectivo de autores del. (1991). *Tendencias Pedagógicas Contemporáneas.* Ciudad de la Habana. Cuba.

20. Cruz, M. & Aguilar, A. (2000). *Evolución de la Didáctica de la Matemática.*

21. D'Amore, B. (2002b). *Elementos de Didáctica de las Matemáticas.* México.: Editorial Iberoamericana.

22. De Kee, S. Mura, y Dionne,J. (s.f.). La comprensión de nociones del seno y el coseno en los alumnos de secundaria. Trabajo mimeografiado.

23. Delice, A. y Mohaghan,j. (2003). Tool use in trigonometry in two countries. Documento en línea. Disponib;e en: http://cerme4.crm.es/papers%20definitius/9/delice-monaghan.pdf

24. De Guzmán, M. & Gil, P. (1993). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. tendencias e innovaciones. *Revista Matemática y Educación. Volumen 2. Nro 2, Madrid.*

25. De Guzman, M. (s.f.). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. Obtenido de http://www.campus-oei.org/oeivirt/edumat.htm.

26. De Guzmán, M. (1992). *Tendencias e ideas innovadoras en la enseñanza de la matemática.* Madrid: Popular.

27. De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática.* Barcelona: Popular.

28. Diaz Barriga, A. (2002). *Didáctica y currículo.* México: Paidos.

29. Douady, R. (1995). *Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM.* México.: Mexico.

30. Fariñas, G. (1999). Hacia un redescubrimiento de la teoría del aprendizaje. *Revista Cubana de Psicología. Vol. 16, No. 3. Universidad de La Habana* , 227-234.

31. Ferrer, M. (1994). La formación de habilidades matemáticas en la escuela media cubana. *Informe de investigación. ISPFP* . Santiago de Cuba.

32. Font,V.; Godino,J. & D'Amore, B. (2005). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática.* Universidad de Granada.

33. Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques. 22 (2-3)* , 237-284.

34. Godino,J. & Batanero,C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14 (3)* , 325-355.

35. Gowin, J. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona, España.: Martines Roca, S.A.

36. Grafton,P. & Navia, L. (s.f.). *Cómo puede el docente obtener la información que necesita para su labor?*

37. Graziano, L. *El concepto de competencia II .* . Bogotá: Sociedad Colombiana de Pedagogía.

38. Gutierres,M. & Portuondo, R. (s.f.). Diseño curricular desarrollador del ciclo básico.

39. Hernández, H. (1997). Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Experiencia cubana. . *Conferencia Magistral RELME 11.* Mexico.

40. Hernández, H. & Otros. (1997). . Un recurso metacognitivo para resolución de problemas en Matemática. el autocontrol. *Pedagogía 97.* La Habana.

41. Hernández, M. (1997). *Epistemológicos en el aprendizaje de las Matemáticas. Educación Matemática.* Mexico.

42. Hernández, S. (1994). El desarrollo del pensamiento creador en las clases de Matemáticas. *Conferencias del curso de postgrado impartido en el IPLAC.* La Habana.

43. Hilgard, E. (1972). *Teorías del aprendizaje.* La Habana: Edición Revolucionaria.

44. Huerta, J & Perez, I. (2003). *Desarrollo curricular por competencias profesionales integrales.*

45. ICCP. (s.f.). Teoría De La Educación. La Habana, Cuba, La Habana.

46. IPLAC. Colectivo de Autores. (2000). *Diseño Curricular, Instituto Pedagógico Latinoamericano Y Caribeño.* La Habana.

47. IPLAC. Colectivo de autores. (1998.). *Estrategias y alternativas para la estructura óptima del proceso de enseñanza aprendizaje.* La Habana.

48. ISPJM,Colectivo de Autores. (2002). *Orientaciones para la elaboracion de los informes de proyectos de investigacion.* Camaguey: Cuba.

49. Johnson, D. (1966). Un modelo para la investigación en la clase de matemáticas. *“El maestro de matemáticas”. No. 59, New york.*

50. Jungh, W. (1964). *Conferencia sobre metodología de la enseñanza de la matemática 2.* La Habana.Cuba: Libros para la Educación.

51. Junk, W. (1986). Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática. *Metodología de la enseñanza de la Matemática.* Cuba: Pueblo y educación.

52. Labarrere, A. (1980). Sobre la formulación de problemas matemáticos por los escolares. *Educación, No. 6, La Habana.* , 65–75.

53. Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología. .* España: Alianza.

54. Leboyer, L. (2003). *Gestión de las Competencias.* Barcelona: Gestión 2000.

55. Leboyer, L. (2003). *Gestión de las competencias. Barcelona.* Barcelona.: Ediciones Gestión 2000.

56. López, E. (2008). La contextualización de la didáctica de la matemática: un imperativo para la enseñanza de la matemática en el siglo XXI. *Revista Pedagógica Universitaria. Vol XIII. No. 3. La Habana. Cuba.*

57. Machado, E. & Hurtado, R. (1997). *Apuntes sobre el experimento pedagógico.* La Habana: Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

58. OEI. (1996). Formación basada en competencias. Situación actual y perspectivas para los países del MERCOSUR. *Seminario: Formación basada en competencias.*

59. OEI. (2000). Para la Educacion, La Ciencia y La Cultura. *Seminario Formacion basada en Competencias. Situacion actual y perspectivas para los paises del MERCOSUR.*

60. Perez, R. (2002). *Los Educadores En La Sociedad Del Siglo XXI.* Obtenido de www.mec.es/cesces/perezjuste2002.htm.

61. Piaget, J. (1968). *La enseñanza de la matemática.*

62. Piaget, J. (1972). *Psicología y Pedagogía.* Barcelona: Ariel.

63. Picardo, O. (2000). *Pedagogía informacional: enseñar a aprender en la era del conocimiento*. Obtenido de http://www.rrhhmagazine.com.

64. Pinilla, M. (1998). *Autorregulación de los alumnos de su proceso de Resolución de Problemas.* Sevilla, España.

65. Platón. (1976). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Moscú. : MIR.

66. Polya, G. (1987). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* -México : Trillas.

67. Polya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas.* México. : Trillas.

68. Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas. .* México.: Trillas. .

69. Thorndike. (s.f.). Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje. *Fotocopia.*

70. Tobón, S. (2006). *Competencias en la Educación Superior. Políticas hacia la calidad.* Bogotá: ECOE.

71. Tobón, S. (2006). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica.* Bogotá: Ltda.

72. Tobón, S. (2006). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica.* Bogotá: Ltda.

73. Tobón, S. & Fernández,J. (2002). Construcción de un enfoque curricular para la formación de profesionales en salud mental en Iberoamérica. *En Memorias del Tercer Congreso Virtual de Psiquiatría. Palma de Mallorca: INTERPSIQUIS.*

74. Tobón, S. (2002). *Las competencias en el sistema educativo: de la simplicidad a la complejidad.*

75. Ursini, S. (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygotsky. . *Educación matemática. Vol. 8. No. 3. Diciembre.* Mexico.

76. Vázquez de Tapia, N. (1997). Taller vsobre Técnicas y estrategias en la resolución de problemas. *IV Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur.* Bolivia: Cochabamba.

77. Vázquez, R. (1998). La resolución de Problemas y tareas docentes de Matemática IV para Ingeniería Eléctrica. *Tesis doctoral.* Camaguey. Cuba.

78. Vizcaya, D. (1997). *Lenguajes documentarios.* Argentina.: Nuevo Paradigma.

79. Vossio, B. (2002). *Certificación y normalización de competencias. Orígenes, conceptos y prácticas. Boletín CINTERFOR #152.* Obtenido de http://www.cinterfor.org.uy/public .

80. Vygotsky, L. (1960). *El desarrollo de las funciones psíquicas superiores.* Academia de Ciencias Pedagógicas.

81. Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psíquicos superiores.* Barcelona: Crítica.

82. Vygotsky, L. (1984.). *El problema de la periodización por edades de desarrollo infantil, en: Obras Completas, Tomo 7.* Moscu: Pedagógica.

83. Vygotsky, L. (1967). *Pensamiento y Lenguaje.* La Habana: Editora Revolucionaria.

84. Vygotsky, L. (1998). *Pensamiento y Lenguaje. Editorial Pueblo y Educación.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

85. Aguilar Márquez, Arturo (2009) Geometría y Trigonometría, 1ra Edición, Pearson Educación de México, S.A., de C.V., Atlacomulco Atoto, 53519 Naucalpan de Juárez, México, p.158-225.Stewart,

86. James (2012) Precálculo Matemática para el Cálculo, 6ta Edición, Editora Cengage Learning, S.A. de C.V., Av. Santa Fe No. 505, piso 12, México, D.F. p.369-540. Stewart, Ian (2007) Historia de las Matemáticas en los Últimos 10,000 Años, Editora Critica, S. L., Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona, España. P.10-45.

87. Sullivan Michael (1997) Precálculo, 4ta edición. Pearson Educción, Calle Cuarto No. 25-20 piso, Col. Fracc. Alce Blanco, México. P. 321-476.

88. Soto Apolinar, Efraín (2011), Diccionario Ilustrado de conceptos matemáticos, 3ra edición. México.

89. Zill, Dennis (2000), Algebra y Trigonometría, segunda edición. McGraw Hill. Colombia.Demana

90. Franklin .D (2009) Matemáticas Universitarias Introductorias con Nivelador Mymathlab, primera edición. Pearson Educación de México S.A

91. Castro Santander Freddy, (1999) Trigonometría y Geometría Analítica para las carreras de ingeniería, Arica, Chile. P 8-53.

92. Swokwski Earl W.(2009) Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México D.F.P.399-54

93. Juárez Duarte José Alfredo, (2012) Matemática III Geometría y Trigonometría. Cuarta edición. Servicios Editoriales onces ríos ,S.A. P189-274

94. Palma, A; Herrera,L; Gil, M;Blanco,L, (2005) Matemática de 10mo grado. Conjunto de trabajos dirigido al Perfeccionamiento Continuo del Sistema Educativo Nacional. Tercera edición. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba.

95. Sharma, G. (1998). Understanding periodicity as a process with a Gestalt structure. Educational Studies in Matrhmatics, 35,255-281