VICERRECTORIA DE ESTUDIOS POST-GRADO

MAESTRIA EN MATEMATICA SUPERIOR

Título

Estrategia didáctica para la enseñanza del método de integración por partes

Sustentante

Josías Rosselín Carrión Cordones
2013-2757

Asesor

Prof. Carlos Robert Valdez Coats

Santo Domingo, R. D.
Agosto 2015

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo mostrar una estrategia didáctica para la enseñanza del método de integración por partes. Estos cinco capítulos, como consecutivos uno de otro, llevan al lector al aprendizaje fácil de este tema.

El capítulo I muestra las bases para esta investigación, dígase, planteamiento del problema, los objetivos y la justificación de la investigación. El capítulo II establece el marco de referencia a utilizar, en la cual se basa la presente investigación. El capítulo III presenta la metodología de investigación, o sea, el marco metodológico. El capítulo IV es una recopilación de lo escrito por algunos autores, además de que se procede con una comparación, detallando las ventajas y las desventajas presentadas en cada opinión. El capítulo V (el último) presenta la estrategia didáctica que se propone.

Esta estrategia didáctica se obtiene mediante el análisis comparativo de lo mostrado por otros autores (capítulo IV) y proponiendo una mejora en lo que se estima como un aporte. El análisis de los autores y la estrategia propuesta tocan puntos similares como los siguientes:

- Demostración de la fórmula utilizada en el método de integración por partes.
- Método de los cuatro pasos para este tipo de integración.
- Aplicación del método estratégico
- Ejercicios propuestos

Con estos puntos se pretende abarcar el estudio y análisis de cómo se enseña este método de integración.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por haberme permitido la oportunidad, la fuerza y la inteligencia necesaria para haber cursado esta maestría de matemática, y por haber llegado a realizar esta investigación. ¡Gracias Dios!

A mi familia, por apoyarme siempre y ser como una fuerza externa que me impulsa a progresar. ¡Cuánto los quiero!

Al MESCYT, por facilitarme la ayuda económica necesaria para que todo esto fuera posible.

A Franklin Ferreras, profesor de básica mediante el cual pude darme cuenta del valor de la Matemática. Fue por éste que pude adquirir este interés por los números. ¡Cuánto se le agradece!

A los profesores de UNAPEC, que de alguna manera u otra fueron los instructores de mi carrera, pues recibí el conocimiento de ellos.

A los compañeros de estudio, por brindarme su apoyo en el periodo de estudio y mantenerme en armonía con ellos.

A Carlos Valdez, por su asesoría y revisión de esta investigación. Se le agradece mucho.

INDICE

INTRODUCCION

En esta época tan tecnológica y globalizada el conocimiento es como río, que corre por doquier. El conocimiento ha venido a ser como el pan diario de cada día para muchas personas. Con éste ellas buscan obtener una mayor comprensión de las cosas que diariamente ocurren a nuestro alrededor. La forma de cómo obtener este conocimiento es el estudio, mediante la cual se puede conocer las propiedades y características de las materias y fenómenos que nos rodean.

El ser humano, a través del tiempo, ha encontrado diversas técnica de cómo favorecerse de la naturaleza y el ambiente que encuentra a su alrededor, con fines de obtener una mayor comodidad y disfrute de la vida. Este conjunto de técnicas utilizada se denomina “la ingeniería”. Esto se expresa en construcciones de edificaciones, máquinas para transportar personas u objetos, medicamentos para las enfermedades, mejor conservación de los alimentos, mejor calidad de vida, etc. Pero se observa que en todas estas técnicas existe la presencia de la matemática. Desde la construcción de un avión, hasta predecir lluvias o fenómenos ambientales se observa la presencia de esta ciencia.

Una de las ramas de la matemática que mejor expresa el funcionamiento de los fenómenos que nos rodean es “el cálculo integral”. Este tiene grande aplicación en ciencias como la economía, la ingeniería, la estadística, la probabilidad, predicciones de fenómenos atmosféricos y entre otros. Visto la gran utilidad de esta rama de la matemática se hace necesario su observación y su estudio.

Se espera que este proyecto sea de gran aprovechamiento a los lectores del mismo y de aporte al conocimiento matemático.

CAPITULO I

Aspectos introductorios

1.1 Planteamiento del problema

El cálculo integral, siendo una de las áreas de la matemática que posee numerosas aplicaciones, es un campo de estudio para ingenieros, arquitectos, economistas, entre otros. Esta área tiene su expresión a través de ejercicios (funciones), los cuales, se resuelven utilizando lo que se conocen como "métodos de integración". Cada método de integración posee su característica, haciéndolos identificables para un tipo de funciones. Lo ideal es que los estudiantes aprendan a utilizar los métodos de integración, no que sean memorizados. Esta investigación se enfoca en el método de integración por partes.

El problema reside en que las integrales sencillas son resueltas con facilidad, pero cuando se les añade condiciones y se presentan de otra forma se complica el proceso. Muchas veces, se enseña el método de integración por partes con ejercicios donde se visualizan claramente las dos funciones, pero a la hora de tratar con funciones no tan familiares se dificulta identificar y separar las funciones.

José Llorens y Francisco Santonjo (Llorens & Santonjo, 1997) en su libro "Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral", afirman lo siguiente:

"*La mayoría de los estudiantes universitarios de carreras técnicas o científicas manifiestan deficiencias en el aprendizaje del concepto de integral que, para ellos, se identifica con el cálculo de primitivas y con la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow. Una revisión de los programas habituales junto con una utilización oportuna de los recursos técnicos actuales puede mejorar sensiblemente esta situación*."

Al visualizar este problema podemos señalar las causas que lo generan. Mencionamos a continuación algunas de éstas:

- No se explica con claridad cómo identificar las funciones que componen el ejercicio de la integral.
- Se trata, con poca profundidad, la estrategia para identificar el factor finito.
- No es muy tratado las integrales compuestas por más de dos funciones.
- Los conceptos básicos no son expuestos debidamente.
- No se acostumbra a demostrar las fórmulas utilizadas en este método.

Las causas mencionadas hacen reflejar en el estudiante síntomas como los detallados a continuación:

- Dificultad para identificar cuando utilizar el método de integración por partes.
- Incapacidad de realizar el ejercicio.
- Problemas para seleccionar el factor finito.
- Resolver una integral que pudo haberse resulto por el método tabular.

Detalladas las causas y los síntomas de este problema surgen cuestiones como las siguientes:

- ¿Qué metodología se puede ofrecer para brindar una mejor enseñanza?
- ¿Qué tipo de recursos audiovisuales se utilizarían para enriquecer la enseñanza de este método?
- ¿Qué tipos de ejercicios se aplicarían para preparar mejor al discente, en el sentido del aprendizaje del método y de su aplicación en otras áreas?

Estas son las cuestiones a exponer en esta investigación.

1.2 Objetivos de la investigación

1.2.1 Objetivo general

- Proponer una estrategia didáctica para la enseñanza del método de integración por partes.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar estrategias didácticas desarrolladas por algunos autores de texto para la enseñanza del método de integración por partes.

- Identificar recursos visuales que faciliten la enseñanza de este método.

- Considerar ejercicios que induzcan a una mejor comprensión del contenido impartido.

- Mostrar diferentes tipos de evaluaciones que abarquen todo el contenido enseñado.

- Presentar una estrategia didáctica para la enseñanza del método de integración por partes.

1.3 Justificación de la investigación

Habiendo expuesto la dimensión del problema y marcados los objetivos de esta investigación se presenta a continuación la utilidad de la misma. Esta investigación tiene la finalidad de presentar una estrategia didáctica que facilite la enseñanza del método de integración por partes, mostrando los conceptos básicos necesarios para entender y aprender este método, además de la utilización de los recursos audiovisuales, que muchas veces son menospreciados en estas áreas.

Esta investigación presenta un valor práctico debido a que aporta a la resolución del problema de enseñanza-aprendizaje del método de integración por partes. Habiendo una estrategia didáctica que enfoque la pedagogía y no solo el contenido de este tema, aprovecharía a maestros y estudiantes. A los maestros, porque tienen a mano una estrategia que facilita su enseñanza, aportando técnicas y métodos útiles en la enseñanza y evaluación; y a los estudiantes, porque pueden captar con más facilidad esta enseñanza, habiéndolos recibido con técnicas que facilitan el aprendizaje de parte de los discentes.

No solamente se contribuye a lo práctico, como se expuso en el párrafo anterior, sino también a lo teórico, ya que esta investigación impacta a otras áreas del conocimiento, pues, siendo el cálculo integral conocimiento base para otras áreas, de la misma manera, su estudio es aplicable a otras áreas. Podemos mencionar entre ellas a la Física, Economía, Meteorología, Astrología, ciencias que utilizan la integración como herramienta para sus cálculos.

Esta investigación tiene un valor metodológico debido a que sirve de base para la creación de nuevas estrategias didácticas para la enseñanza de otros métodos de integración. También es aplicable, no solamente al área de integración, sino también a la derivación. Observando en otro sentido, podemos aplicar estas técnicas de enseñanza a cualquier material a impartir, realizándole cambios leves.

Se espera que esta investigación sea de gran beneficio al lector en cuanto a su estudio y aplicación se refiere.

CAPITULO II

Marco de referencia

Antes de empezar a tratar esta parte tan importante de la investigación se aclara que el contenido del mismo apunta a dos dimensiones: la didáctica y el contenido de la enseñanza. En este apartado se propone mostrar, de manera clara y específica, el sustento de esta investigación, mediante el uso del marco en estas tres dimensiones: Marco histórico, Marco teórico y Marco conceptual.

En el marco histórico se menciona la evolución y desarrollo del objeto de estudio, desde diferentes puntos de vista. Se lleva a cabo una descripción de la evolución histórica del objeto de estudio, desde su origen hasta nuestros días. (UNAM, n.d.)

El marco teórico, marco referencial o marco conceptual tiene el propósito de dar a la investigación un sistema coordinado y coherente de conceptos y proposiciones que permitan abordar el problema. "*Se trata de integrar al problema dentro de un ámbito donde éste cobre sentido, incorporando los conocimientos previos relativos al mismo y ordenándolos de modo tal que resulten útil a nuestra tarea*". (Schanzer, n.d.)

Roberto Hernández Sampieri y otros destacan las siguientes funciones que cumple el marco teórico dentro de una investigación:

1. Ayuda a prevenir errores que se han cometido en otros estudios.

2. Orienta sobre cómo habrá de realizarse el estudio (al acudir a los antecedentes, nos podemos dar cuenta de cómo ha sido tratado un problema específico de investigación, qué tipos de estudios se han efectuado, con qué tipo de sujetos, cómo se han recolectado los datos, en qué lugares se han llevado a cabo, qué diseños se han utilizado).

3. Amplía el horizonte del estudio y guía al investigador para que se centre en su problema, evitando desviaciones del planteamiento original.

4. Conduce al establecimiento de hipótesis o afirmaciones que más tarde habrán de someterse a prueba en la realidad.

5. Inspira nuevas líneas y áreas de investigación.

6. Provee de un marco de referencia para interpretar los resultados del estudio.

(Schanzer, n.d.)

2.1 Marco histórico

En el siguiente apartado se muestra el sustento histórico de esta investigación. Para poner comienzo a la historia del cálculo se resalta a continuación lo detallado en Orígenes del Cálculo, por Javier Pérez, que empieza con los problemas de cuadraturas:

"*Los problemas de cuadraturas son problemas geométricos que consisten en lo siguiente: dada una figura, construir un cuadrado con área igual a la de la figura dada. Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás, siguiendo unas normas precisas. Los matemáticos griegos inventaron un procedimiento, que se conoce con el nombre de exhausción, por el cual podían lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas. Se atribuye a Eudoxo de Cnido (c. 400 - 347 a.C.) la invención de este método, que fue perfeccionado posteriormente por Arquímedes (c. 287 - 212 a.C.)*".

"*Además de las cuadraturas, otro problema relacionado con curvas como las cónicas (circunferencias, parábolas, elipses, hipérbolas) y algunas pocas más como la cisoide de Diocles y la concoide de Nicomedes, era el trazado de tangentes a las mismas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes estas técnicas no eran de gran utilidad. Arquímedes sabía trazar las tangentes a su espiral y se cree que para ello consideró el problema desde un punto de vista cinemático, calculando la dirección del movimiento de un punto que genera la espiral*".

(Pérez Gonzalez)

Más adelante se muestra más historia sobre el cálculo, y como fue evolucionando poco a poco por el estudio de Newton y Leibniz:

“*Hay, primordialmente, dos matemáticos coetáneos íntimamente ligados a los inicios del cálculo infinitesimal, el inglés Newton (1642-1727) y el alemán Leibniz (1646-1716), si bien, hubo otros matemáticos que de una u otra forma trabajaron en ello, como Kepler, Fermat (1601-1665), Cavalieri (1598-1647), incluso Arquímedes (Ap. 288 a.C. – Ap. 213 a.C.), que utilizo un método para el cálculo de áreas que se aproxima rudimentariamente al cálculo integral*”.

“*Newton y Leibniz (Newton unos años antes) sientan las bases del análisis infinitesimal aunque por vías distintas, quedando fuera de toda sospecha que alguno se aprovechase de los hallazgos del otro. Aunque en los inicios se comunicaban los progresos que hacia cada uno, llegaron a surgir comentarios de matemáticos ajenos a todo ello que, en ocasiones, calificaban la obra de Newton como plagio de la de Leibniz; en otras ocasiones era a la inversa, y esto provoco la enemistad entre ambos*”.

“*Todo esto hizo que Newton, poco antes de morir y habiendo fallecido Leibniz unos años antes, ordenara suprimir un comentario de su obra “Principia” en el que se citaba a su otrora amigo como autor de un procedimiento de cálculo similar al suyo*”.

“*Leibniz es, además, el responsable de la actual simbología del cálculo infinitesimal, y no solo eso; fue el primer matemático que utilizo el símbolo* **.** *para expresar una multiplicación y* **:** *para denotar un cociente, entre otras muchas más aportaciones*”.

(Peña, 2000)

2.2 Marco teórico

Con fines de colocar esta investigación dentro de un conjunto de conocimientos previos se ha provisto del material siguiente, para sustentar esta investigación en una dimensión teórica. Esta se expresa no sólo en la parte del contenido en sí, sino también en la parte didáctica-metodológica.

2.2.1 Didáctica de la Matemática

En todo tipo de proceso didáctico el fin es mejorar el procedimiento a utilizar en la enseñanza con fines de facilitar el aprendizaje en aquellos que la reciben. Siendo ésta un concepto tan general es importante especificarla y así lograr una mejor centralización en cuanto a éste se refiere.

Se presenta a continuación un apartado en el que muestra varias definiciones de aprendizaje:

- "*Es un proceso de cambio relativamente permanente en el comportamiento de una persona generado por la experiencia*". (Feldman, 2005)

- "*El aprendizaje implica adquisición y modificación de conocimientos, estrategias, habilidades, creencias y actitudes*". (Schunk, 1991)

- "*... el aprendizaje es un sub-producto del pensamiento... Aprendemos pensando, y la calidad del resultado de aprendizaje está determinada por la calidad de nuestros pensamientos*". (Schmeck, 1988)

- "*El aprendizaje consiste en un cambio de la disposición o capacidad humana, con carácter de relativa permanencia y que no es atribuible simplemente al proceso de desarrollo*". (Gagné, 1987)

Teniendo en cuenta la información anterior se hace necesario definir una estrategia didáctica que promueva este tipo de aprendizaje. Se muestra la siguiente información sobre la didáctica en la enseñanza de la Matemática, obtenida del PDF "Didáctica de maestros":

Deseamos que los maestros en formación adquieran una visión de la enseñanza de las matemáticas que contemple:

- *Las clases como comunidades matemáticas, y no como una simple colección de individuos.*
- *La verificación lógica y matemática de los resultados, frente a la visión del profesor como única fuente de respuestas correctas.*
- *El razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización.*
- *La formulación de conjeturas, la invención y la resolución de problemas, descartando el énfasis en la búsqueda mecánica de respuestas.*
- *La conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones, frente a la visión de las matemáticas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.*

Los siguientes principios de la enseñanza de las matemáticas descritos en los Principios y Estándares 2000 del NCTM orientan el contenido de la Monografía:

1. *Equidad. La excelencia en la educación matemática requiere equidad – unas altas expectativas y fuerte apoyo para todos los estudiantes.*
2. *Currículo. Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en unas matemáticas importantes y bien articuladas a lo largo de los distintos niveles.*
3. *Enseñanza. Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprensión de lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender, y por tanto les desafían y apoyan para aprenderlas bien.*
4. *Aprendizaje. Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.*
5. *Evaluación. La evaluación debe apoyar el aprendizaje de unas matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.*

6. *Tecnología. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes.*

(Godino, 2004)

Estos procesos deben estar orientados a la contribución del aprendizaje significativo. Una buena forma de obtener estos resultados es haciendo sentir la importancia, mediante la resolución de problemas. Según el libro Mundomate señala lo siguiente:

"*En los primeros años de la década de los años 80 del siglo XX, el NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemática) de los Estados Unidos de Norte América hizo algunas recomendaciones sobre la enseñanza de la matemática, las que tuvieron una gran repercusión en todo el mundo. La primera de esas recomendaciones decía:*

"El Consejo Nacional de Profesores de Matemática recomienda que en los años 80 la resolución de problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de matemática en las escuelas"".

(Mundomate, Blog de Formación Inicial Docente)

En otra parte de este escrito se afirma que su finalidad no debe ser la búsqueda de soluciones concretas para algunos problemas particulares sino facilitar el desarrollo de las capacidades básicas, de los conceptos fundamentales y de las relaciones que pueda haber entre ellos. Entre las finalidades de la resolución de problemas se tiene:

- *Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- *Desarrollar su razonamiento.*
- *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*
- *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*
- *Hacer que las sesiones de aprendizaje de matemática sean más interesantes y desafiantes.*

- *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*
- *Darle una buena base matemática.*

(Mundomate, Blog de Formación Inicial Docente)

Conocidas ya los objetivos es bueno considerar el proceso de como el discente resuelve problemas, los cuales en el mismo archivo se informa:

Para entender cómo los estudiantes intentan resolver problemas y consecuentemente para proponer actividades que puedan ayudarlos es necesario discutir problemas en diferentes contextos y considerar que en este proceso influyen los siguientes factores:

- *El dominio del conocimiento, que son los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante y que pueden ser utilizados en el problema; tales como intuiciones, definiciones, conocimiento informal del tema, hechos, procedimientos y concepción sobre las reglas para trabajar en el dominio.*
- *Estrategias cognoscitivas, que incluyen métodos heurísticos; por ejemplo, descomponer el problema en casos simples, establecer metas relacionadas, invertir el problema, dibujar diagramas, el uso de material manipulable, el ensayo y el error, el uso de tablas y listas ordenadas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción del problema.*
- *Estrategias metacognitivas que se relacionan con el monitoreo y el control. Están las decisiones globales con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias; es decir, acciones tales como planear, evaluar y decidir.*
- *El sistema de creencias, que se compone de la visión que se tenga de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera como se aproxima una persona al problema, las técnicas que usa o evita, el tiempo y el esfuerzo que le dedica, entre otras.*

(Mundomate, Blog de Formación Inicial Docente)

Habiendo considerado el proceso de resolución de problemas según este informativo se hace necesario, según uno de los principios de la didáctica, detallada anteriormente, enfocarse en la Tecnología. María Soto Serrano en su escrito "Didáctica de las Matemáticas" redacta lo siguiente:

"*En primer lugar, la didáctica se considera como ciencia y como técnica. Es decir, se produce un continuo feedback entre teoría, práctica y tecnología, pues teoría y práctica están directamente relacionadas, y la tecnología es la vertiente aplicada de la disciplina. Por tanto, los esfuerzos científicos de la didáctica buscan una directa utilidad en los ámbitos de enseñanza, pero al mismo tiempo, para poder intervenir en estos ámbitos es necesario un profundo conocimiento teórico de todas las variables que operan en ello*".

(Soto Serrano)

Esta afirmación sirve de base para introducir el tema sobre la utilidad de las TIC en la enseñanza de la Matemática.

2.2.2 Aplicación de las TIC en el proceso de la enseñanza de la Matemática

Se introduce este apartado con lo aportado por los señores Raúl Fernández, Pedro Server y Elme Ramos, en "Aprendizaje con nuevas tecnologías paradigma emergente. ¿Nuevas modalidades de aprendizaje?":

"*La llegada de las TIC a las escuelas implica nuevas concepciones del proceso de enseñanza-aprendizaje. El énfasis se traslada desde la enseñanza hacia el aprendizaje estableciéndose nuevos roles y responsabilidades para los alumnos y profesores. El alumno se transforma en un participante activo y constructor de su propio aprendizaje y el profesor asume el rol de guía y facilitador de este proceso, lo cual varía su forma de interactuar con sus alumnos, la forma de planificar y de diseñar el ambiente de aprendizaje. Debe manejar un amplio rango de herramientas de información y comunicación actualmente disponibles y que pueden aumentar en el futuro, establecer interacciones profesionales con otros profesores y especialistas del contenido dentro de su comunidad y también foráneos*". (Fernández, Server, & Carballo)

La tecnología en el día de hoy presenta una oportunidad y un reto para los docentes actuales. Una oportunidad, porque se hace posible una forma más eficiente de brindar la enseñanza; un reto, porque es un nuevo recurso que se ha de integrar en el proceso. Se presenta la siguiente información a continuación, que muestra la disposición de organizaciones reconocidas en este punto:

"*Las autoridades educativas (las políticas de e-learning de la Unión Europea y de los países miembros) han apostado con claridad por la utilización de las TIC en la educación y la formación, entendiendo que estos nuevos medios deben utilizarse para mejorar la calidad de los procesos educativos enfatizando las posibilidades de comunicación y colaboración que las redes y el multimedia hoy en día ofrecen y los nuevos escenarios de intercambio que podemos promover con ellos (redes de escuelas, comunidades virtuales de profesores, escenarios virtuales de apoyo a la enseñanza…). No podemos limitarnos a las posibilidades de presentación de la información que ofrecen las TIC, sino que debemos ser conscientes del cambio en las metodologías de enseñanza-aprendizaje que su aplicación demanda*".

(IcTeacher, n.d.)

Esta disposición no termina ahí, sino que han surgido instituciones, organizaciones y proyectos con dichos fines. Se presenta a continuación uno de estos proyectos en la web:

"*El proyecto ICTeacher pretende apoyar a los profesores en el desarrollo de las competencias pedagógicas necesarias para el uso de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Partiendo de sus conocimientos previos, promoviendo el conocimiento y uso de una amplia gama de metodologías didácticas y medios de enseñanza que les permitan mejorar su nivel de competencia en la aplicación de los nuevos medios en sus prácticas*".

(IcTeacher, n.d.)

Las nuevas tecnologías pueden emplearse en el sistema educativo de tres maneras distintas: como objeto de aprendizaje, como medio para aprender y como apoyo al aprendizaje.

En la actualidad es normal considerar las nuevas tecnologías como objeto de aprendizaje en sí mismo, ya que permite que los alumnos/as se familiaricen con el ordenador y adquieran las competencias necesarias para hacer del mismo un instrumento útil a lo largo de los estudios, en el trabajo o en la formación continua cuando sean adultos.

Se consideran que las tecnologías son útil izadas como un medio de aprendizaje cuando es una herramienta al servicio de la formación a distancia, no presencial y del autoaprendizaje o son ejercicios de repetición, cursos en línea a través de Internet, de videoconferencia, cederoms, programas de simulación o de ejercicios, etc. Este procedimiento se enmarca dentro de la enseñanza tradicional como complemento o enriquecimiento de los contenidos presentados.

Pero donde las nuevas tecnologías encuentran su verdadero sitio en la enseñanza es como apoyo al aprendizaje. Las tecnologías así entendidas se hayan pedagógicamente integradas en el proceso de aprendizaje, tienen su sitio en el aula, responden a unas necesidades de formación más proactivas y son empleadas de forma cotidiana. La integración pedagógica de las tecnologías difiere de la formación en las tecnologías y se enmarca en una perspectiva de formación continua y de evolución personal y profesional como un "saber aprender".

(Educando, 2008)

Una de las herramientas más utilizadas en la enseñanza es Microsoft Office Power Point. Se hace necesario realizar un marco teórico sobre esta aplicación. Se puede decir que PowerPoint es una aplicación que está dirigida fundamentalmente a servir de apoyo en presentaciones o exposiciones de los más diversos temas, proyectando una serie de diapositivas a través del ordenador. Una vez diseñada una pantalla se puede convertir ésta en una diapositiva o transparencia física para reproducirla en un proyector tradicional, o visionarla en el ordenador.

(Monografias, n.d.)

Habiendo expuesto las bases teóricas didácticas se procede a presentar las bases para el contenido de la enseñanza.

2.2.3 Evaluación en el proceso didáctico

Descrito la importancia de la aplicación de las TIC en la enseñanza se hace necesario presentar la utilidad de la evaluación del proceso. Se muestra a continuación un apartado relacionado:

"*Todo proceso de enseñanza-aprendizaje se hace visible a través de la evaluación, la cual nos permite conocer en qué medida se han desarrollado los aprendizajes requeridos, de la misma manera que nos informa sobre el proceso de enseñanza llevado a cabo*". (García, García, Muñoz, & Sánchez)

"*En este sentido, comprendiendo la evaluación como aprendizaje, entendemos que debemos preocuparnos por desarrollar y por tanto, evaluar habilidades intelectuales relacionadas con la comprensión, la aplicación y el razonamiento (comparación, relación de ideas, argumentación, proposición, contrastación, la reconstrucción del sentido y del significado a partir de la información). Implica también la evaluación de habilidades complejas de resolución de problemas nuevos y la creación y producción de conocimiento. De la misma forma que evaluar las habilidades sociales relacionadas con el trabajo en equipo, la colaboración, la empatía y las actitudes de respeto, de escucha activa, de tolerancia, compromiso y responsabilidad de grupo*". (García, García, Muñoz, & Sánchez)

El proceso didáctico, como todo sistema estructurado, está establecido en tres elementos fundamentales: Entradas o Preparación, Proceso o Realización y Salidas o Resultados. Como todo proceso, igualmente lleva a la par otro proceso de evaluación continua que permite en cada fase anteriormente señalada el recibir datos sobre su funcionamiento y disponer en su caso de los elementos de mejora o rectificación necesarios. Es lo que se denomina feed-back o realimentación.

Se llama evaluación continua a la que engloba todo el proceso de aprendizaje, y se refiere tanto al profesor, al alumno o a la marcha del proceso. La evaluación continua contempla tres fases en su proceso:

- Evaluación diagnóstica o inicial: Es la determinación de la presencia o ausencia en un alumno de capacidades, habilidades motrices o conocimientos. En ella se recibe también información sobre la motivación del alumno, sus intereses, etc. Es la determinación del nivel previo de capacidades que el alumno tiene que poseer para iniciar un proceso de aprendizaje y la clasificación de los alumnos por medio de características que están relacionadas con formas de aprendizaje. Mediante la evaluación se determinan las causas fundamentales de las dificultades en el aprendizaje. La evaluación diagnóstico se realiza al principio de una etapa de aprendizaje, o cuando hay dudas, durante el proceso de que un alumno tiene cualquier tipo de dificultad. Puede realizarse tanto al principio de curso, como al principio de cualquier núcleo temático, o semana, o día. Es conveniente estar en situación continua de diagnosis.
- **Evaluación formativa o de procesos**: Es la realimentación del alumno y del profesor sobre el progreso del alumno durante el proceso de aprendizaje y la identificación de los problemas más comunes de aprendizaje para solucionarlos mediante actividades y organizar la recuperación. Se realiza durante todo el proceso de aprendizaje.
- **Evaluación sumativa o final**: Es la que certifica que una etapa determinada del proceso, pequeña o grande, se ha culminado o la que se realiza cuando se deben tomar decisiones en caso de competencia entre varias personas: puestos limitados, oposiciones, etc. Se produce al final de una etapa, día, semana, mes o curso escolar, o al comienzo de una situación en la que hay plazas limitadas.

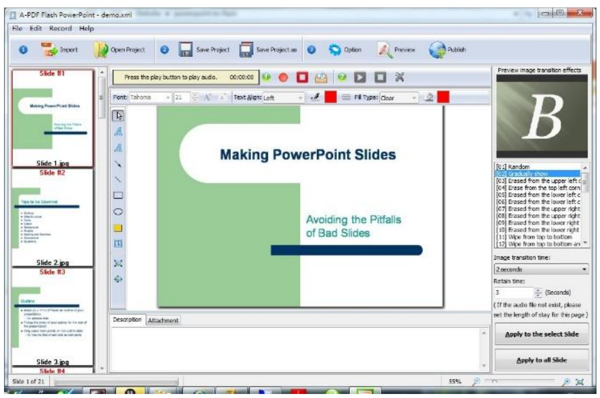
"*La **evaluación** es una actividad sistemática y continua como el mismo proceso educativo, un subsistema integrado dentro del propio sistema de la enseñanza y tiene como misión especial recoger información fidedigna sobre el proceso en su conjunto para ayudar a mejorar el propio proceso, y dentro de él, los programas, las técnicas de aprendizaje, los recursos, los métodos y todos los elementos del proceso*". (Aula Creativa, n.d.)

2.3 Marco conceptual

Para definir un glosario de términos a utilizar en esta investigación se procede a presentar los siguientes conceptos claves:

2.3.1 Diapositiva

"*Son cada uno de los elementos que constituyen la presentación y cada una de ellas podría identificarse con una lámina o página donde se pueden insertar datos*". (Enciclopedia de tareas, n.d.)



Diapositiva del MS Power Point

2.3.2 Didáctica

"*Arte de enseñar*". (Real Academia Española)

"*Es la ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de conseguir la formación intelectual del educando*". (Carvajal)

"*La palabra Didáctica tiene origen del griego didasticós, que significa "el que enseña" y concierne a la instrucción; didasco que significa "enseño" a esta se le ha considerado parte principal de la Pedagogía que permite dar reglas para la enseñanza, fue por esto que un principio se interpretó como "el arte o la ciencia de enseñar o instruir"*". (Carvajal)

2.3.3 Estrategia didáctica

"*Es la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje para lo cual el docente elige las técnicas y actividades que puede utilizar a fin de alcanzar los objetivos de su curso*". (Sirvent Cancino, n.d.)

"*Estas estrategias educativas, hacen referencias a operaciones o actividades mentales que facilitan y desarrollan los diversos procesos del aprendizaje escolar. Gracias a ellas, se puede llevar a cabo la organización, procesamiento y retención de aquella información que se quiere potenciar, y como tal, favorecer la construcción de un aprendizaje significativo*". (Romero Barea, 2009)

2.3.4 Factor finito

Es aquel factor definido por la estrategia ILATE, caracterizado por ser el más factible para diferenciarlo. Habiendo observado el concepto general del método de integración por partes, es bueno observar también esta información referente a la estrategia a utilizar para definir el factor finito. Desde un punto de vista didáctico se recomienda escoger la función u de acuerdo con el orden:

- ✓ Trigonométrica Inversa
- ✓ Logarítmica
- ✓ Algebraica o polinómica
- ✓ Trigonométrica
- ✓ Exponencial.

Otra recomendación sería cambiar el orden de trigonométrica y exponencial. Si seguimos esta otra recomendación podemos usar la regla mnemotecnia ALPES, asignándole el puesto de u de acuerdo con el orden de aparición:

- ✓ Arco (cualquier trigonométrica inversa)
- ✓ Logarítmica

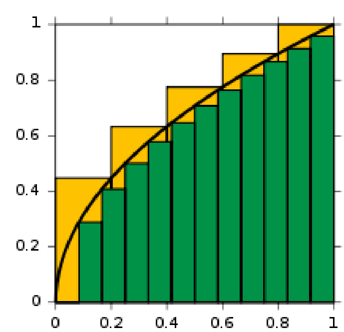
- ✓ Polinómica
- ✓ Exponencial
- ✓ Seno/coseno(función trigonométrica)

2.3.5 ILATE

Nemotecnia del orden priorizado en la que se debe tomar el factor finito. Hace referencia en el siguiente orden: I, Inversa trigonométrica; L, logarítmica; A, algebraica; T, trigonométrica y E, exponencial.

2.3.6 Integración

Es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático, mediante la cual se puede obtener el resultado de una sumatoria de infinitos términos de tamaño infinitésimos.



Gráfica que muestra la aplicación de la integral

2.3.7 Método de integración

Técnicas utilizadas usadas para calcular una antiderivada de alguna función planteada. Existen varios métodos de integración, las cuales tienen, cada uno de ellos, sus propiedades y características para ser aplicados.

2.3.8 Método de integración por partes

El método de integración por partes permite resolver un gran número de integrales no inmediatas.

1. Sean u y v dos funciones dependientes de la variable x; es decir:
$$u = f(x), v = g(x)$$
2. La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, aplicada a f(x) * g(x), permite escribir:
$$d\big(f(x) * g(x)\big) = g(x) * f'(x)dx + \ f(x) * \ g'(x)dx$$
3. Integrando los dos miembros,
$$\int d\big(f(x) * g(x)\big) = \int g(x) * f'(x)dx + \int f(x) * \ g'(x)dx$$
$$\int f(x) * \ g'(x)dx = \ f(x) * g(x) - \int g(x) * f'(x)dx$$
Esta no es la fórmula usual de la integración por partes. Puesto que u=f(x), du=f '(x)dx, y al ser v=g(x), dv=g '(x)dx. Llevando estos resultados a la igualdad anterior se obtiene lo siguiente:
$$\int u\,dv = u\,.\ v - \int v\,du$$

Este método consiste en identificar u con una parte de la integral y dv con el resto, con la pretensión de que al aplicar la formula obtenida, la integral del segundo miembro sea más sencilla de obtener que la primera. No hay, y este es el mayor problema de este procedimiento, una regla fija para hacer las identificaciones más convenientes. La resolución de un buen número de problemas es el mejor camino para adquirir la técnica necesaria.

(Peña, 2000)

Visto de otra manera, el método de integración por partes permite calcular la integral de un producto de dos funciones aplicando la fórmula:

$$\int u \cdot v' \ dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \ dx$$

"*Las funciones logarítmicas, "arcos" y polinómicas se eligen como u. Las funciones exponenciales y trigonométricas del tipo seno y coseno, se eligen como v'. Si al integrar por partes tenemos un polinomio de grado n, lo tomamos como u y se repite el proceso n veces. Si tenemos una integral con sólo un logaritmo o un "arco", integramos por partes tomando: v' = 1*".

(Vitutor, n.d.)

2.3.9 Power Point

"*PowerPoint es la herramienta que nos ofrece Microsoft Office para crear presentaciones. Las presentaciones son imprescindibles hoy en día ya que permiten comunicar información e ideas de forma visual y atractiva*".

"*Con PowerPoint se puede crear presentaciones de forma fácil y rápida pero con gran calidad ya que incorpora gran cantidad de herramientas que permiten personalizar hasta el último detalle, por ejemplo el estilo de los textos y de los párrafos, podemos insertar gráficos, dibujos, imágenes, e incluso texto WordArt. También se puede insertar efectos animados, películas y sonidos*".

(Biblia de Power Point 2007)

2.3.10 Técnica tabular

Forma resumida de aplicación del método de integración por partes, en la que se divide la integral en dos funciones, donde una de ellas se deriva y la otra se integra.

En algunos casos las integrales de productos de polinomios con funciones trascendentes involucran polinomios de grados altos, que conllevan cálculos demasiado laboriosos al aplicar la fórmula de la integral por partes. En tales casos se utiliza una técnica conocida como integración tabular, que consiste en:

"*Derivar la funciones polinómicas hasta llegar a cero, y a su vez integrar la funciones trascendentes tantas veces como se derivó la otra función. Colocando las derivadas e integrales correspondientes lado a lado en una tabla, realizamos los productos de cada derivada con la Integral del siguiente renglón, cambiando alternativamente el signo de cada producto. La suma de estos productos es el resultado de la Integral correspondiente. Este método funciona bien con funciones exponenciales, hiperbólicas, senos y cosenos*".

(Ejercicios algebraicos, 2012)

2.3.11 TIC

"*Por Tecnologías de la información o Tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) se entiende un término dilatado empleado para designar lo relativo a la informática conectada a Internet, y especialmente el aspecto social de éstos. Ya que Las nuevas tecnologías de la información y comunicación designan a la vez un conjunto de innovaciones tecnológicas pero también las herramientas que permiten una redefinición radical del funcionamiento de la sociedad; Un buen ejemplo de la influencia de los TIC sobre la sociedad es el gobierno electrónico*". (Monografias, n.d.)

CAPITULO III

Diseño Metodológico

3.1 Tipo de investigación

Para definir un marco metodológico los autores de materiales no se ponen de acuerdo en los tipos de investigación, pues esto depende del criterio utilizado. Pero obviando esta parte se define que esta investigación será descriptiva y documental. Se muestra a continuación unas lecturas sobre la investigación descriptiva:

"*En ella se destacan las características o rasgos de la situación, fenómeno u objeto de estudio. Función principal: capacidad para seleccionar las características fundamentales del objeto de estudio*". (Sierra Guzmán, 2012)

"*La investigación descriptiva, según se mencionó, trabaja sobre realidades de hecho y su característica fundamental es la de presentar una interpretación correcta. Esta puede incluir los siguientes tipos de estudios: Encuestas, Casos, Exploratorios, Causales, De Desarrollo, Predictivos, De Conjuntos, De Correlación*". (Grajales)

"*La investigación descriptiva es frecuentemente usada como un antecedente a los diseños de investigación cuantitativa, representa el panorama general destinado a dar algunos valiosos consejos acerca de cuáles son las variables que valen la pena probar cuantitativamente. Los experimentos cuantitativos suelen ser costosos y requieren mucho tiempo, así que es resulta razonable primero tener una idea de qué hipótesis son dignas de análisis. Dado que no hay variables manipuladas, no hay manera de analizar estadísticamente los resultados. Muchos científicos consideran a este tipo de estudio como muy poco fiable y 'no científico'. Además, los resultados de estudios observacionales no son repetibles, y por lo tanto no puede haber una replicación del experimento y revisión de los resultados*". (Shuttleworth, 2008)

Para esta investigación no se utilizará encuestas, entrevistas ni ninguno de estos instrumentos. En relación a la otra cara de la moneda, se dice que es documental porque la fuente de los datos a utilizar se obtendrá de documentos ya registrados anteriormente.

3.2 Diseño de la investigación

Conocido ya el tipo de investigación se muestra a continuación un apartado importante sobre el diseño de investigación:

"*El diseño de investigación constituye el plan general del investigador para obtener respuestas a sus interrogantes o comprobar la hipótesis de investigación. El diseño de investigación desglosa las estrategias básicas que el investigador adopta para generar información exacta e interpretable. Los diseños son estrategias con las que intentamos obtener respuestas a preguntas como: contar, medir y describir*".

"*El investigador cuando se plantea realizar un estudio suele tratar de desarrollar algún tipo de comparación. El diseño de investigación supone, así, especificar la naturaleza de las comparaciones que habrían de efectuarse*".

(García & Martínez, n.d.)

Tomando como referencia lo escrito por García y Martínez se muestra a continuación el diseño de esta investigación:

- Ubicando los materiales a escudriñar.
- Recolección de datos.
- Comparación de datos.
- Realización de la propuesta.
- Presentación de la propuesta.

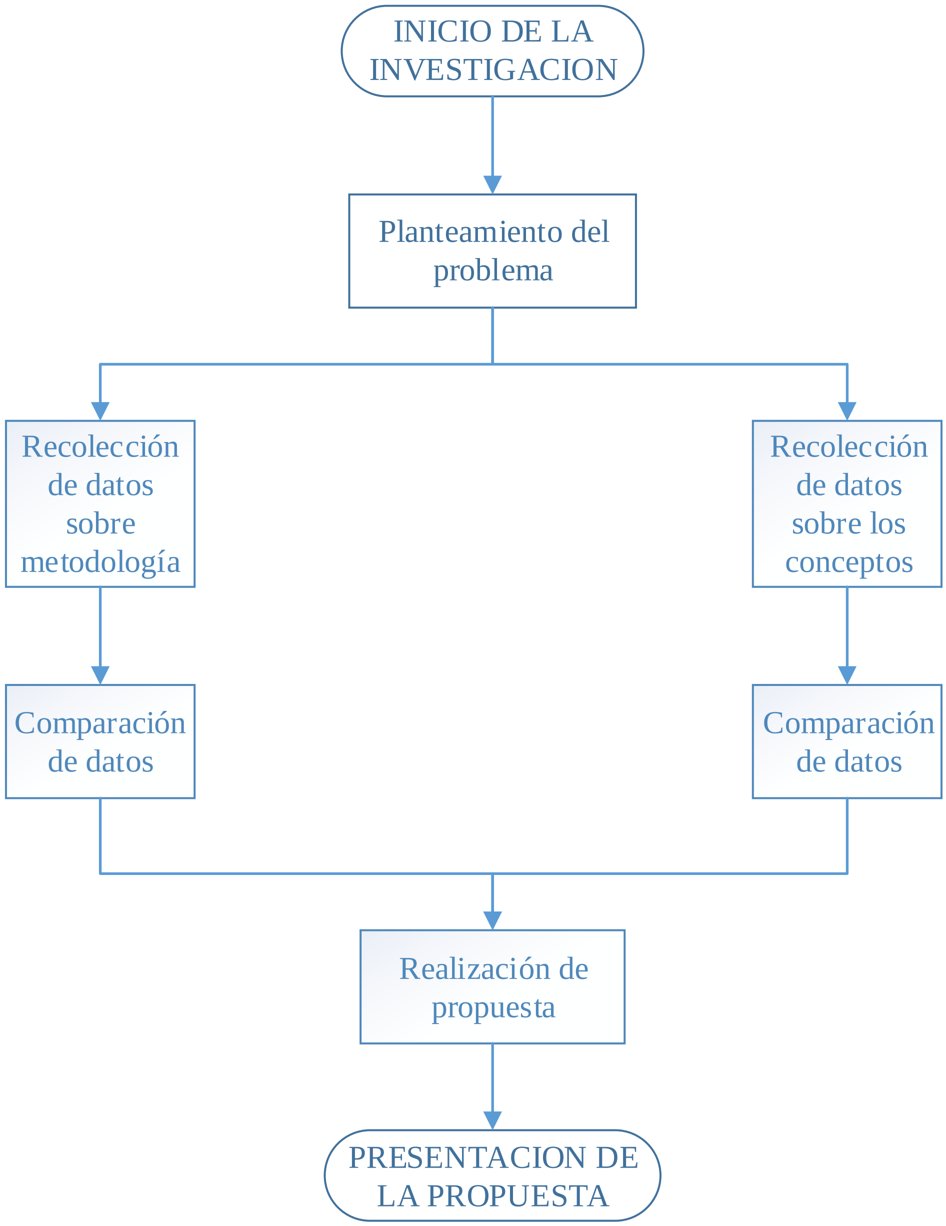


Imagen que muestra el diseño de la investigación

CAPITULO IV

Análisis de estrategias planteadas por autores

El propósito de este capítulo es analizar las estrategias planteadas por otros autores, y así determinar, mediante comparaciones y análisis, sus ventajas y desventajas. Esto servirá de base para la propuesta que se realiza en el capítulo siguiente.

Se espera que este capítulo sea como un preámbulo o un camino que guie al lector hacia la propuesta de la estrategia didáctica.

4.1 Revisión de la literatura

A continuación se muestra las estrategias planteadas por diversos autores, tales como: Granville, Purcell, Varberg, Rigdon, Larson y Leithord. El objetivo de este apartado es simplemente mostrar las estrategias a modo de revisión, no profundizando el tema.

4.1.1 Granville

En una manera general Granville presenta este tema utilizando la estructura siguiente:

(Granville, 2009)

- **Demostración de la fórmula**

Si u y v son funciones de la misma variable independiente, tenemos, según la fórmula para la diferenciación de un producto,

$$d\,(uv) = u\,dv + v\,du,$$

o sea, trasponiendo,

$$u\,dv = d\,(uv) - v\,du\,.$$

Integrando, resulta la fórmula inversa,

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$, que se llama fórmula de integración por partes.

Instrucciones para descomponer la diferencial

Para aplicar esta fórmula en un caso dado, debe descomponerse la diferencial dada en dos factores, a saber, n y dv. N o pueden darse instrucciones generales para la elección de esos factores, pero son útiles las siguientes:

a) dx es siempre una parte de dv;
b) debe ser posible integrar dv;
c) cuando la expresión para integrar es el producto de dos funciones, ordinariamente es mejor elegir la de apariencia más complicada, con tal que pueda integrarse, como parte dv.

Ejemplos propuestos por el autor

Hallar $\int x \cos x\, dx$.

Solución, Sean $u = x$ y $dv = \cos x\, d x$;

entonces $du = dx$ y $v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$.

Sustituyendo en la ecuación de integración por partes:

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Ejercicios propuestos por el autor

A continuación se muestran los ejercicios planteados por el autor.

Demostrar las siguientes integraciones.

1. $\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C.$

2. $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.$

3. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx = 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} - 2x \cos \frac{x}{2} + C.$

4. $\int x \cos nx \, dx = \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + C.$

5. $\int u \sec^2 u \, du = u \operatorname{tg} u + \ln \cos u + C.$

Fig. 1 Ejercicios propuestos

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

25. $\int x \sec^2 \frac{x}{2} \, dx.$

26. $\int x \cos^2 2x \, dx.$

27. $\int x^2 \cos x \, dx.$

28. $\int \operatorname{arc\,sen} mx \, dx.$

29. $\int \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{2} \, dx.$

30. $\int \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{x} \, dx.$

31. $\int \operatorname{arc\,sec} \frac{1}{y} \, dy.$

36. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \, dx}{x^2}.$

37. $\int x^3 \operatorname{arc\,tg} x \, dx.$

38. $\int (e^x + 2x)^2 \, dx.$

39. $\int (2^x + x^2)^2 \, dx.$

40. $\int e^{-\theta} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta.$

41. $\int e^{\frac{t}{5}} \operatorname{sen} \pi t \, dt.$

42. $\int e^{3x} \cos \frac{x}{3} \, dx.$

Fig. 2 Ejercicios propuestos

4.1.2 Purcell, Varberg y Rigdon

En una manera general los autores antes mencionados presentan este tema utilizando la estrategia siguiente:

(Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

- **Demostración de la fórmula**

Si la integración por sustitución falla, es posible utilizar una doble sustitución, mejor conocida como integración por partes. Este método tiene como base la integración de la fórmula para la derivada de un producto de dos funciones. Sean u = u(x) y v = v(x). Entonces

$$Dx[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

O

$$u(x)v'(x) = Dx[u(x)v(x)] - v(x)u'(x)$$

Al integrar ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\int u(x)\, v'(x)dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$$

Ya que $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$, por lo común, la ecuación anterior se escribe de manera simbólica como sigue:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

- **Ejemplos presentados por el autor:**

Encuentre $\int x \cos x\, dx$.

SOLUCIÓN Deseamos escribir $x \cos x\, dx$ como $u\, dv$. Una posibilidad es hacer $u = x$ y $dv = \cos x\, dx$. Entonces, $du = dx$ y (en este paso podemos omitir la constante arbitraria). He aquí un resumen de esta doble sustitución en un formato conveniente.

$$u = x \qquad dv = \cos x\, dx$$

$$du = dx \qquad v = \operatorname{sen} x$$

La fórmula para integración por partes da

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

➢ Ejercicios propuestos por el autor

Revisión de conceptos

1. La fórmula de integración por partes dice que $\int u\,dv =$ _____.

2. Para aplicar esta fórmula a $\int x \operatorname{sen} x\,dx$, se hace $u =$ _____ y $dv =$ ______.

3. Al aplicar la fórmula de integración por partes se obtiene el valor ________ para $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx$.

4. Una fórmula que expresa $\int f^n(x)\,g(x)\,dx$ en términos de $\int f^k(x)\,g(x)\,dx$, donde $k < n$, se denomina fórmula de ______.

Fig.1 Ejercicios propuestos

Conjunto de problemas 7.2

En los problemas del 1 al 36 utilice la integración por partes para evaluar cada integral.

1. $\int xe^x\,dx$
2. $\int xe^{3x}\,dx$
3. $\int te^{5t+\pi}\,dt$
4. $\int (t+7)e^{2t+3}\,dt$
5. $\int x\cos x\,dx$
6. $\int x \operatorname{sen} 2x\,dx$
7. $\int (t-3)\cos(t-3)\,dt$
8. $\int (x-\pi)\operatorname{sen} x\,dx$
9. $\int t\sqrt{t+1}\,dt$
10. $\int t\sqrt[3]{2t+7}\,dt$
11. $\int \ln 3x\,dx$
12. $\int \ln(7x^5)\,dx$
13. $\int \arctan x\,dx$
14. $\int \arctan 5x\,dx$
15. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
16. $\int_2^3 \frac{\ln 2x^5}{x^2}\,dx$

Fig.2 Ejercicios propuestos

En los problemas del 37 al 48 aplique dos veces la integración por partes para evaluar cada integral (véanse los ejemplos 5 y 6).

37. $\int x^2 e^x\,dx$
38. $\int x^5 e^{x^2}\,dx$
39. $\int \ln^2 z\,dz$
40. $\int \ln^2 x^{20}\,dx$
41. $\int e^t \cos t\,dt$
42. $\int e^{at} \operatorname{sen} t\,dt$
43. $\int x^2 \cos x\,dx$
44. $\int r^2 \operatorname{sen} r\,dr$
45. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$
46. $\int \cos(\ln x)\,dx$
47. $\int (\ln x)^3\,dx$ *Sugerencia:* use el problema 39.

Fig.3 Ejercicios propuestos

4.1.3 Larson

En una manera general Larson presenta este tema utilizando la estrategia siguiente:

(Larson, Hostetler, & Edwards, 2006)

- **Demostración numérica de la fórmula**

La integración por partes está basada en la fórmula para la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= uv' + vu'$$

donde u y v son funciones derivables de x. Si u' y v' son continuas, se pueden integrar ambos lados de esta ecuación para obtener

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx$$

$$= \int u\,dv + \int v\,du\,.$$

- **Instrucciones para descomponer el diferencial**

Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.

Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

➢ Ejemplos presentados por el autor

Encontrar $\int x\, e^x\, dx$.

Solución: Para aplicar la integración por partes, es necesario escribir la integral en la forma $\int u dv$.

$dv = e^x\, dx \quad \rightarrow \quad v = \int dv = \int e^x\, dx = e^x$

$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$

Ahora la integración por partes produce

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$ // Fórmula de integración por partes

$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx$ // Sustituir

$= x\, e^x - e^x + C$ // Integral

➢ Ejercicios presentados por el autor

Se presenta a continuación los ejercicios planteados por el autor.

En los ejercicios 1 a 4, asignar la antiderivada con la integral correcta. [Se etiquetan las integrales *a*), *b*), *c*) y *d*).]

a) $\int \ln x\, dx$ *b*) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

c) $\int x^2 e^x\, dx$ *d*) $\int x^2 \cos x\, dx$

1. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x$

2. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$

3. $y = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$

4. $y = -x + x \ln x$

Fig.1 Ejercicios propuestos

En los ejercicios 5 a 10, identificar u y dv para encontrar la integral usando la integración por partes. (No evaluar la integral.)

5. $\int xe^{2x}\,dx$ **6.** $\int x^2 e^{2x}\,dx$

7. $\int (\ln x)^2\,dx$ **8.** $\int \ln 3x\,dx$

9. $\int x \sec^2 x\,dx$ **10.** $\int x^2 \cos x\,dx$

Fig.2 Ejercicios propuestos

4.2 Comparación de estrategias

Habiendo revisado las estrategias planteadas por otros autores, se hace necesario compararlas, señalando las características de cada uno de los métodos utilizados.

4.2.1 Demostraciones presentadas

En este apartado se pretende comparar las demostraciones presentadas por los autores antes mencionados. Estos utilizan la misma forma de demostrar la fórmula de integración por partes.

Granville utiliza una notación suponiendo que u y v son funciones dependientes de x, aunque no están expresadas en la demostración. Esto facilita visualizar y analizar, de manera rápida, cada paso de dicha demostración. Pero tiene la desventaja de que se obvia varias verdades.

Purcell utiliza una notación diferente, y muestra con respecto a que variable son dependientes las funciones. En esta demostración se escriben $u(x)$ y $v(x)$. Esta mucho más completa que la demostración utilizada por Purcell.

Larson se asemeja mucho a Granville en cada todos los sentidos, excepto en que éste utiliza una notación diferente para mostrar la derivada de un producto de funciones: la notación con cocientes.

4.2.2 Consejos para la descomposición de la integral

Para este apartado Purcell no tiene palabra. Los demás autores opinan similares. La desventaja de este método ofrecido por estos autores es que es muy subjetivo elegir el factor finito de la forma presentada y dependerá de la experiencia y la buena observación de la persona.

4.2.3 Formas de los ejemplos utilizados

Los autores presentan casi las mismas estrategias para resolver un caso. Larson, utiliza una forma menos directa, pero hace que sea más entendible, hablando en un sentido. El procedimiento utilizado es el siguiente:

I. Se identifican u y dv.
II. Se deriva la función u y se integra el diferencial dv.
III. Sustituir los valores obtenidos en la fórmula original.
IV. Reducir hasta obtener el resultado.

4.2.4 Tipos de ejercicios presentados

En este apartado se mostrará que método utilizan estos autores para evaluar el conocimiento revelado.

Granville utiliza varias formas para evaluar. Una de estas son los ejercicios de demostraciones, en el que se muestran varias integrales ya resueltas, con el fin de que se realice el procedimiento hasta llegar a la final demostración, comparándolo luego con lo mostrado. Otro tipo de ejercicios presentados son los de resolver las integrales y comprobar su resultado mediante la diferenciación.

Purcell, a diferencia de Larson y Granville, utiliza evaluación del conocimiento teórico. Además utiliza ejercicios en los que se señala utilizar el método de integración por partes dos veces.

Sin embargo Larson presenta ejercicios en los que su propósito es buscar la antiderivada.

Para concluir con este capítulo se afirma que este será la base para identificar la estrategia didáctica propuesta para la enseñanza del método de integración por partes.

CAPITULO V

Presentación de la Estrategia didáctica propuesta

Se presenta en este capítulo la estrategia didáctica que se propone, con el fin de realizar la enseñanza del método de integración por partes. En el capítulo anterior se realizó una presentación de las estrategias planteadas por otros autores, los cuales se procedió a su análisis mediante la comparación de sus técnicas utilizadas para la enseñanza de este método. A partir de estas conclusiones del análisis realizado se establecen las bases para la propuesta siguiente.

Siguiendo la estructura del análisis realizado en el capítulo IV se elabora la propuesta, utilizando los mismos pasos con la misma secuencia. La propuesta presentada en este capítulo se divide en los siguientes puntos:

- Demostración de la formula.
- Método de los cuatro pasos para la integración por partes
- Aplicación del método estratégico
- Ejercicios propuestos

Para poner base a un seguimiento lógico que lleve la mente del discente al aprendizaje significativo, se empieza este capítulo con la demostración de la fórmula. Luego se establece una estrategia formada por cuatro pasos, mediante la cual se puede resolver una integral por el método de partes. Se presentan aplicaciones de este método y varios ejercicios mediante los cuales se puede garantizar el aprendizaje de este tema tratado.

Se espera que esta propuesta sea de gran beneficio y utilidad para otras áreas, ajustando estos métodos utilizados a la necesidad que se presente. Aunque este capítulo está enfocado en el método de integración por partes, la lógica utilizada puede ser aplicada a áreas externas a la presenta, tales como la diferenciación y sus métodos, otros métodos de integración, técnicas para la resolución de ecuaciones diferenciales, entre otros.

5.1 Demostración de la fórmula

Los autores demuestran esta fórmula por sus métodos, pero se propone la siguiente forma la cual facilita el aprendizaje y la comprensión de la fórmula base.

- **Para facilitar el lenguaje de la demostración**

$$u = f(x)\ ;\ v = g(x)$$

- **Forma para diferenciales de productos de funciones**

$$d\big(f(x) * g(x)\big) = f(x) * dg(x) + g(x) * df(x)$$

- **Sustituyendo por su equivalente**

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

- **Integrando ambos miembros**

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

- **Trasposición de términos**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Esta parte final es la fórmula utilizada por el método de integración por partes. Obtenida ésta se necesita aplicarla para la resolución de problemas. Muchas veces se tiene la fórmula pero no se conoce como aplicarla.

5.2 Método de los cuatro pasos para la integración por partes

Se propone a continuación cuatro pasos para la resolución de una integral por el método de integración por partes. Los pasos son:

1. **Identificar**

Esta parte se refiere a cómo identificar el factor finito, es decir u. Se recomienda seguir la siguiente frase:

I Inversa trigonométrica
L Logarítmica
A Algebraica
T Trigonométrica
E Exponencial

Luego de haber obtenido cual parte de la integral se utilizará como el factor finito, se considera la parte restante como factor diferencial dv.

2. Calcular

Sabiendo cual parte de la integral es u y cual es dv se procede a derivar la función u para obtener a du, al mismo tiempo que se procede a integrar la diferencial dv para obtener a v.

3. Sustituir

Una forma para hacer recordar la forma de la fórmula es la siguiente:

"Un día vi una vaca menos integral vestida de uniforme".

Esta frase es la mnemotecnia de la fórmula de integración por partes.

Palabra utilizada	Parte de la formula
Un	U
Día	D
Ví	V
Una	U
Vaca	V
Menos	-
Integral	$\int$
Vestida	V
De	D
Uniforme	U

Luego de obtener la fórmula original se procede a sustituir cada parte elemento calculado en esta fórmula.

4. Reducir

Utilizando operaciones conocidas se lleva la expresión obtenida hasta su más mínima expresión.

A continuación se muestra la aplicación de esta estrategia.

5.3 Aplicación del método estratégico

Teóricamente se ha definido la estrategia de los cuatro pasos, pero se hace necesario presentar un ejemplo para que se pueda visualizar con mayor claridad su esplendor.

Obtener $\int \boldsymbol{x\, e^x dx}$.

Para aplicar el método de los cuatro pasos se debe ejecutar de la manera siguiente:

Paso 1 (identificar):

Utilizando la mnemotecnia ILATE se puede obtener el factor finito.

Partes del integrando	X	e^x
Forma	Algebraica	Exponencial
Tipo de factor	Finito	Diferencial
Expresión final	$u = x$	$dv = e^x dx$

Paso 2 (calcular):

Calculando du

$$u = x$$

$$du = dx$$

Calculando v

$$dv = e^x dx$$

$$\int dv = \int e^x dx$$

$$v = e^x$$

Paso 3 (sustituir):

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x\, dx$$

Paso 4 (reducir):

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x\, dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

De esta manera son resueltos los ejercicios mediante el método de los cuatro pasos. Para garantizar el correcto aprendizaje de resolución del tema de integración por partes se propone los siguientes tipos de ejercicios en el próximo tema.

5.4 Ejercicios propuestos

Se propone los siguientes tipos de ejercicios, divididos por su naturaleza. Es bueno visualizar el aprendizaje del discente por diferentes dimensiones, no ofreciendo ejercicios solamente de resolución de integrales.

Ejercicios directos

1. $\int x \cos x\, dx$
2. $\int x^2\, sen\, x\, dx$

3. $\int 3x\, sec^{-1} 4x\; dx$
4. $\int e^{3x} sen\; 4x\; dx$
5. $\int \frac{tan^{-1}(4x+3)}{4x^2}\; dx$
6. $\int_3^5 x^3 sen\; 2x \tan 3x\; dx$

Demostraciones

7. $\int u\; sec^2 u\; du = u \tan u + \ln \cos u + C$
8. $\int arc \cot x\; dx = x\; arc \cot x + \frac{1}{2} ln(1 + x^2) + C$

Revisión de conceptos

9. Mencione el nombre de los pasos utilizados para integrar por partes.
10. ¿Cuáles son las ventajas del método de integración por partes en comparación de otros métodos de integración?
11. ¿Qué tipos de funciones pueden ser integradas con este método?

Aplicaciones

12. Hallar el área limitada por las rectas $y = 2x$ y $x\; e^{x-3}$, entre 5 < x < 8.
13. Se somete a revolución una función, haciéndola girar con respecto al eje de la abscisa. ¿Cuál es el volumen del solido generado si la función en revolución es $f(x) = x \cos x$, evaluando desde $x = {}^{\pi}/_{4}$ hasta $x = \pi$.

CONCLUSION

A modo de conclusión se puede resaltar que el cálculo integral, siendo un área matemática muy útil en el mundo de hoy, ha alcanzado notables aplicaciones mediante las cuales se han logrado grandes invenciones que facilitan la vida del ser humano. Estos inventos y descubrimientos no son solamente de carácter ingenieril sino también científico.

Poco a poco la Matemática se va uniendo y apegando a la vida del ser humano, sea directa o sea indirectamente. El ser humano ha despertado en darse cuenta de la necesidad de la enseñanza de la matemática en las escuelas y universidades, complementándola con otras asignaturas afines como Física, Química, entre otras.

El método de integración por partes, método característico para funciones divisibles en dos partes, fue expuesto con detalle en esta investigación, esperando así un aporte para el lector.

RECOMENDACIONES

Se invita al lector de esta investigación que sea ésta una guía para la enseñanza del método de integración por partes, conteniendo ésta características que facilitan el aprendizaje de este método.

La misma es aplicable a cualquier otro tipo de método de integración o algún tema acorde, como diferenciación. Se espera que no se quede plasmada en estas hojas, sino más bien ser aplicadas en las aulas y siendo útil verdaderamente a los discentes y docentes. Esta propuesta puede ser presentada en recursos tales como Power Point, con el fin de obtener un mayor rendimiento en la enseñanza, pues se utilizará gráficos conceptuales quienes serán los responsables de mantener ordenada la mente del discente.

No espero que esta investigación haya sido del todo terminada, sino que es posible que sea actualizada por el lector, encontrando nuevos caminos y retos que lleven a nuevos horizontes del conocimiento y enseñanza.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. *Aula Creativa*. (s.f.). Obtenido de La evaluación de los aprendizajes: http://www.uhu.es/cine.educacion/didactica/0091evaluacionaprendizaje.htm

2. *Biblia de Power Point 2007.* (s.f.). Obtenido de www.colmich.edu.mx/computo/files/powerPoint_2007.pdf

3. Carvajal, M. M. (s.f.). *La didáctica.* Fundación Academia de Dibujo Profesional.

4. *Educando*. (Septiembre de 2008). Obtenido de Uso de las TIC en educación: http://www.educando.edu.do/articulos/docente/uso-de-las-tic-en-educacin/

5. *Ejercicios algebraicos*. (12 de Diciembre de 2012). Obtenido de Método tabular de integración por partes: http://ejerciciosalgebraicos.blogspot.com/2012/12/metodo-tabular-de-integracion-por-partes.html

6. *Enciclopedia de tareas*. (s.f.). Obtenido de http://www.enciclopediadetareas.net/2010/06/que-es-una-diapositiva.html

7. Feldman, R. (2005). *Psicología: con aplicaciones en países de habla hispana.* México: McGrawHill.

8. Fernández, R. R., Server, P. M., & Carballo, E. (s.f.). *Aprendizaje con nuevas tecnologías paradigma emergente. ¿Nuevas modalidades de aprendizaje?* Ciego de Avila, Cuba: Universidad de Ciego de Ávila.

9. Gagné, R. (1987). *Las condiciones del aprendizaje.* México: Interamericana.

10. García, J., & Martínez, M. (s.f.). Obtenido de Diseño Investigación I: http://www.aniorte-nic.net/apunt_metod_investigac4_4.htm

11. García, L., García, C., Muñoz, E., & Sánchez, C. (s.f.). *Examinar o evaluar: una paradoja no resuelta en las prácticas educativas universitarias.* Madrid, España: Universidad Europea de Madrid.

12. Godino, J. D. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* Obtenido de http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofesores.htm/

13. Grajales, T. (s.f.). *Tipos de investigación.* Obtenido de Material en PDF.

14. Granville, W. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral.* Balderas 95, México: Editorial Limusa S.A.

15. *IcTeacher*. (s.f.). Obtenido de Aplicación de las TIC: http://www.icteacher.eu/index.php?id=56&L=4

16. Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (2006). *Cálculo con geometría analítica.* New York, United States: McGraw-Hill Interamericana.

17. Leithold, L. (1998). *El cálculo.* Oxford University Press.

18. Llorens, J., & Santonjo, F. (1997). *Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral.* Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Matemática aplicada.

19. *Monografias*. (s.f.). Obtenido de power Point: http://www.monografias.com/trabajos17/power-point/power-point.shtml

20. *Monografias*. (s.f.). Obtenido de http://www.monografias.com/trabajos37/tecnologias-comunicacion/tecnologias-comunicacion.shtml

21. *Mundomate, Blog de Formación Inicial Docente.* (s.f.). Obtenido de Estrategias metodológicas para la enseñanza de la Matemática: http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/

22. Peña, T. A. (2000). *Gran Consultor Educar 2000.* Colombia: Educar Cultural y Recreativa S.A.

23. Pérez Gonzalez, J. (s.f.). *Orígenes del cálculo.* Granada, España: Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada. Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Cálculo#Historia_del_cálculo

24. Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* México: Pearson Educación.

25. *Real Academia Española*. (s.f.).

26. Romero Barea, G. A. (2009). La utilización de estrategias didácticas en clase. *Innovación y experiencias educativas*.

27. Schanzer, R. (s.f.). *El marco teórico de una investigación*. Obtenido de http://www.fhumyar.unr.edu.ar/escuelas/3/materiales de catedras/trabajo de campo/marco_teorico.htm

28. Schmeck, R. (1988). *Learning and study strategies: Issues in assessment, instruction and evaluation.* New York, United States: Academic Press.

29. Schunk, D. (1991). *Learning theories. An educational perspective.* New York, United States: McMillan.

30. Shuttleworth, M. (26 de Septiembre de 2008). *Explorable*. Obtenido de Diseño de Investigación Descriptiva: https://explorable.com/es/diseno-de-investigacion-descriptiva

31. Sierra Guzmán, M. P. (2012). *Tipos más usuales de Investigación.* México: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

32. Sirvent Cancino, M. D. (s.f.). *Slideshare*. Obtenido de http://es.slideshare.net/no_alucines/tcnicas-y-estrategias-didcticas-presentation

33. Soto Serrano, M. (s.f.). *Didáctica de las Matemáticas.*

34. UNAM. (s.f.). *Tesis y Monoografías*. Obtenido de http://infolimaperu.blogspot.com/2011/05/el-marco-historico-de-la-investigacion.html

35. *Vitutor*. (s.f.). Obtenido de Métodos de integración: http://www.vitutor.net/1/calculo_integral.html