VICERRECTORIA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA SUPERIOR

ESTRATEGIA PARA LA IDENTIFICACIÓN Y LAS APLICACIONES DE LA DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

SUSTENTANTE:

DIONICIO ANTONIO GARCÍA FÉLIZ

MATRÍCULA: 2013-0532

ASESOR(A):

Msc.FRANCESCO SEMERARI

SANTO DOMINGO, REP. DOM.

DICIEMBRE 2014

“La Matemática es el trabajo del espíritu humano

Que está destinado tanto a estudiar como a conocer,

Tanto a buscar la verdad como a encontrarla”

Evariste Galois

AGRADECIMIENTOS

A la universidad APEC

Por su afán por capacitar profesionales

Que nos permitan trabajar por un mejor país

Al Departamento de Matemática de

La Universidad APEC, especialmente

A su directora Dr. Génova Feliz por

Toda su confianza depositada

A mi asesor Msc. Francesco Semerari

Por todos sus valiosos consejos que conllevaron

A la culminación exitosa de esta investigación

DEDICATORIAS

A mi amada esposa Yahiris,

Por todo su amor y paciencia brindada

En el transcurso de esta maestría.

A mis hijos: Omar, Ámbar y Andreina,

Que este esfuerzo les sirva de

Estimulo en su futuro profesional.

A mis compañeros de estudios: Celenia Solano,

Rafael Joa, José Armando Rodríguez y Ricardo Valdez,

Por haber compartido juntos momentos de alegría y mucha

Dedicación en el trayecto de esta maestría.

RESUMEN

La presente investigación presenta la problemática de la contradicción existente entre las grandes potencialidades de la derivación logarítmica y su limitado uso. En la aplicación del estudio de campo se visualiza este limitado uso por parte del discente. Gran parte de esta deficiencia se evidencia en la no aplicación de las propiedades logarítmicas en la derivación de funciones, sobre todo aquellas funciones que involucren productos, cocientes y potencias complicadas. En esta investigación se establecen estrategias que permitirán al estudiante de Cálculo Diferencial e integral de UNAPEC resolver esta contradicción .Estas estrategias didácticas conjuntamente con la metodología de solución de derivación logarítmica pretende solucionar esta contradicción. De manera que el estudiante se sienta más comprometido en la mejora de su desempeño en el aula.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En la observación personal del autor de la presente investigación se ha podido constatar que raramente se aplican las propiedades logarítmicas en la derivación de funciones. En particular no se visualiza la importancia en la aplicación para la resolución de problemas de una manera más elegante.

Las propiedades logarítmicas aprendidas por los estudiantes usualmente se quedan en la solución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Estas propiedades no son aplicadas en la solución de derivación de funciones. Inmediatamente se visualizan este tipo de funciones, sobre todo las potencio-exponenciales, se derivan utilizando fórmulas de derivación, más no se utiliza la derivación logarítmica para llegar a la solución de la derivada de la función de una manera más fácil.

De esta situación problémica detectada se deduce que el **problema científico** de la presente investigación es la contradicción entre las grandes potencialidades de la derivación logarítmica y su limitado uso.

La presente investigación tiene como objeto de estudio el Análisis Diferencial Real, delimitando el campo de acción en el **estudio de la derivación logarítmica de funciones.**

La hipótesis de la presente investigación es que al utilizar una estrategia apropiada para la identificación y aplicación de la derivación logarítmica se logra un conocimiento profundo que supera la contradicción del problema científico.

El autor de esta investigación tiene como objetivo presentar una propuesta de estrategia para la identificación y las aplicaciones de la derivación logarítmica para facilitar la derivación en los diferentes tipos de funciones

Entendiéndose por estrategia lo siguiente: “En un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento.” (Diccionario de la real academia española, Madrid, 2001).

Siguiendo este mismo esquema se tiene como un objetivo realizar un impulso para hacer llegar una estrategia que permita poder utilizar toda la potencialidad de las propiedades logarítmicas en la derivación de las funciones.

La utilización de fórmulas de derivación de funciones, facilita calcular la derivada de las mismas de una manera mucho más rápida y con menos posibilidad de cometer errores, que si utilizamos el concepto de definición de derivada.

El uso de fórmulas de derivación para calcular funciones polinómicas resulta sumamente cómodo, que si lo hiciera a través del método de los incrementos o en su defecto utilizando el concepto de derivada de una función.

El uso de estas fórmulas todavía se valoriza mucho más en el caso de que tengamos que calcular la derivada de otros tipos de funciones.

Pero en el caso de ciertos tipos de funciones, tales como las exponenciales, las potenciales y las potencio-exponenciales, el uso de la derivación logarítmica facilita sobre manera su cálculo.

Una de las situaciones más complicadas en la derivación se presenta con las funciones potencio-exponenciales, es una función que tiene la variable independiente x, tanto en la base como en el exponente, es decir una función elevada a otra función.

Para este caso es mucho mejor todavía dominar los conceptos de propiedades logarítmicas, los cuales permitan, **facilitar el cálculo de este tipo de funciones.** Lo que conlleva a reducir o eliminar las probabilidades de cometer errores, obteniendo **resultados más rápidos con mayor facilidad**. (Sobel, 2006)

Muchos autores han tratado el tema de la derivación logarítmica (Semerari, 2011), (stewart, 2007), coincidiendo en la utilidad de la misma para hallar funciones complicadas.

Se coincide con dichos autores en el sentido de que es mucho mejor aplicar la derivación logarítmica en aquellas funciones complicadas que impliquen productos, divisiones y potencias. Para ello se debe tener muy en cuenta las propiedades logarítmicas de funciones.

Métodos de investigación utilizados

Aparte de los razonamientos inductivos-deductivos y los de análisis y síntesis se utilizará

- **El comparativo**. Se podrá comprobar la utilidad de la derivación logarítmica versus la utilización de fórmulas de derivación.
- **El exploratorio**, debido a que se pretenderá conocer las causas del porqué no se utilizan toda la potencialidad que ofrecen las propiedades logarítmicas. Pretendiéndose con la misma presentar una propuesta que reduzca o minimice esta falta de uso.

La técnica que se utilizará será un cuestionario el cual se le aplicará a los estudiantes activos en el periodo septiembre-diciembre como una forma para recolectar información, procesarla y analizarla sobre la problémica en cuestión.

Las tareas de esta investigación:

Las tareas de esta investigación están fundamentadas en los siguientes objetivos:

- Identificar funciones y clasificarlas en algebraicas y no algebraicas
- Mostrar la evolución histórica de los logaritmos
- Describir las principales propiedades logarítmicas
- Mostrar los antecedentes históricos de la derivada
- Describir conceptos relacionados a la derivación de una función
- Identificar funciones que involucren potencias, productos y cocientes
- Aplicar derivación logarítmica a funciones

La tesis está estructurada en dos capítulos:

En el primer capítulo se trata sobre el marco de referencia. Tratándose la evolución histórica del concepto de función, así como los antecedentes históricos de los logaritmos y la derivada. En el mismo se trata sobre la identificación de funciones, así como todo el marco conceptual y teórico que soporta esta investigación.

En el segundo capítulo se trata sobre la identificación y la aplicación de la propuesta de estrategia que me permita utilizar las potencialidades de las propiedades logarítmicas, en la derivación de funciones.

CAPITULO I: MARCO DE REFERENCIA

En este primer capítulo se tratará sobre los antecedentes históricos, los cuales permitirán tener una idea más clara sobre la evolución a través del tiempo de los conceptos que sustentarán esta investigación.

También se trata todo el marco conceptual, el cual servirá de soporte, para tener una idea más clara sobre la derivación logarítmica.

1.1 **Marco histórico**

1.1.1. **Evolución histórica del concepto de función**

En el siglo XIV aparece por primera vez la noción de función, proveniente de las escuelas de filosofía de Oxford y Paris.

Evidentemente que esto no significa que civilizaciones más antiguas, tales como: la griega, la babilónica y la egipcia tuvieran una noción de la existencia de la relación de dependencia de una variable con otras.

"*¿Puede pensarse acaso que no supiesen que la cantidad de vino o aceite contenido en un barril dependiese del diámetro y la altura de este?* "

"¿Acaso los griegos no construyeron tablas de tiro de artillería (de cuerda) compilando el alcance del proyectil (piedra o flecha) en relación al diámetro de las sogas que, debidamente retorcidas, generaban la energía para el tiro? "

"¿Puede pensarse que algún geómetra egipcio no supiese que la superficie del terreno fertilizado por la creciente del Nilo, dependía de la longitud de la cuerda con que lo media y del número de veces que la aplicaba?"

"¿Puede pensarse que los babilonios cuyos rastros de cálculos sobreviven en tabletas de arcilla cocida en caracteres cuneiformes donde resolvían

ecuaciones y calculaban intereses no tuviesen una idea de la relación entre cantidades?"

"¿Puede pensarse en un mercader fenicio que no supiese exactamente la relación existente entre la carga del navío y su acomodamiento dentro del mismo y sus condiciones de navegación?"

"¿Puede pensarse que todos aquellos que comerciaron, construyeron, viajaron por tierra y mar, transportaron y conquistaron durante siglos desconociesen que ciertas cantidades dependen de otras?"

(Ferrante, 2009)

Pudo haber existido esta noción en la antigüedad, pero la misma no fue formalizada.

Los estudios de movimiento que efectuó Galileo contienen una clara alusión a una relación entre variables:

"*En 1638 estudió el problema de dos círculos concéntricos con centro O , el círculo más grande A con diámetro del doble que el círculo más pequeño B . Pero al tomar cualquier punto P sobre el círculo A entonces PA corta al círculo B en un punto. Así Galileo había construido una función que mapeaba cada punto de A sobre un punto de B . De modo similar, si Q es un punto sobre B entonces el segmento OQ resultante corta al círculo A en exactamente un punto. De nuevo tiene una función, esta vez de los puntos en B hacia los puntos en A . Aunque la circunferencia de A sea el doble de la circunferencia de B , ambas tienen el mismo número de puntos. También produjo la correspondencia uno-a-uno estándar entre los enteros positivos y sus cuadrados, la cual (en términos modernos) daba una bisección entre N y un subconjunto propio*" (Ferrante, 2009)

Descartes con su obra La Geometrie llega también al concepto de relación entre variables, en la misma época que Galileo.

El concepto de función fue desarrollado con el paso del tiempo. Dicho concepto fue tomando forma, según pasaba el tiempo.

Las primeras veces que se utilizó la palabra función contenían la idea del concepto de función que se ve hoy en día.

La palabra función fue utilizada por primera vez con un significado no-matemático por Leibniz , quien escribió en 1673:

"Otros tipos de líneas que, dada una figura, llevan a cabo algunafunción." (Ferrante, 2009)

Cercano a dicha fecha, para 1694, Johann Bernoulli escribió:

"*una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes"* (Ferrante, 2009).

Ya para 1698, Bernoulli escribe un artículo sobre funciones ordenadas, el cual obtiene la siguiente respuesta de Leibniz:

"Me agrada que use el término función en el mismo sentido que yo." (Ferrante, 2009)

Euler publicó en 1748 Introductio In Analyse Infinitorum. Dicho escrito le dió popularidad al concepto de función. El concepto de función que definió Euler en dicho escrito fue el siguiente: "*Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esa cantidad variable y por números o cantidades constantes"*

Para luego agregar más adelante: *"Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las últimas las primeras también sufren cambio,y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es bastante natural y comprende cada método mediante el* *cual una cantidad puede ser determinada por otras. Así, si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma están determinadas por x, y se les llama funciones de x".* (Ferrante, 2009)

Estas definiciones emitidas por Euler, concitó un gran avance en lo que respecta al concepto de función.

Otro personaje que trabajó el concepto de función fue Cauchy, quien en el año 1821 dio una definición de dependencia entre variables. El mismo escribió en Cours d'analyse:

"Si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variablei ndependiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable." (Ferrante, 2009)

En Théorie analytique de la Chaleur en 1822 Fourier expresa la siguiente definición: *"En general, la función ƒ(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas ƒ(x). Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola."* (Ferrante, 2009)

Lobachevsky en 1838, dio una definición de una función general: *"Una función de x es un número que está dado para cada x y que cambia gradualmente junto con x. El valor de la función puede estar dado mediante* *una expresión analítica o mediante una condición que ofrece una manera de probar todos los números y seleccionar uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir pero ser desconocida."* (Ferrante, 2009)

Como podrá observarse la mayoría de estos conceptos sobre función eran muy generales, aún no había un aterrizamiento del concepto de función.

El matemático francés Henri Poincaré no estaba muy a gusto con la dirección que había tomado la definición de función. Por lo tanto en 1899 escribió: *"Durante medio siglo hemos visto una masa de funciones extrañas que parecen forzadas a parecerse lo menos posible a las funciones honestas que sirven a algún propósito. Antes, cuando se inventaba una nueva función era con una meta práctica. Hoy son inventadas a propósito para mostrar que el razonamiento de nuestros ancestros fallaba y nunca obtendremos más que eso de ellas. Si la lógica fuera la única guía del profesor, tendría que empezar por lo más general, es decir, las funciones más estrambóticas."* (Ferrante, 2009)

La definición que aparece en la mayoría de los textos fue dada en 1923 por el francés Édouard Goursat:

"Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación y = ƒ(x)." (Ferrante, 2009)

1.1.2. **Historia de los logaritmos**

Los descubrimientos no se originan de la noche a la mañana., todo conlleva un proceso. En el caso de los logaritmos su descubrimiento no se produjo de manera aislada. Los caminos que condujeron a su hallazgo fueron: **Los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas**

atribuibles a la navegación y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo relativo a las reglas de interés compuesto.

Dos de los grandes precursores de su descubrimiento fueron: Jhon Napier y Henry Briggs. En 1631 Henry Briggs realizó las tablas logarítmicas en base 10 plasmada en su obra: Logarithmall Arithmetike. En dicha obra se explica el objetivo de la invención de los logaritmos: "*Los logaritmos son números inventados para resolver más fácilmente los problemas de Aritmética y Geometría…Con ellos se evitan las molestias de las multiplicaciones y las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad…En una palabra, con los logaritmos se resuelven con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no sólo de Aritmética y Geometría sino también de Astronomía*" (Moreno, 2003)

Se puede observar en dicha cita parte de las propiedades logarítmicas, especialmente el producto y la división.

Precursores logaritmos: Arquímedes y Stifel

Los orígenes del descubrimiento de los logaritmos vienen desde la época de Arquímedes en una comparación realizada de las sucesiones aritméticas con las sucesiones geométricas. Una comparación como la de la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512

Donde los números de la primera fila de esta tabla se les llaman logaritmos y a los números de la segunda fila se les llama antilogaritmos.

Según Hoeben la regla de Arquímedes expresa lo siguiente:”*Para multiplicar entre si dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de aquellos dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado”* (Moreno, 2003)

En el siglo XVI, aparece nuevamente la comparación de dos sucesiones en la obra “Aritmethica Integra“del matemático alemán Stifel. En esta obra se encuentra la regla del producto de dos potencias con la misma base. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, para todos los números racionales x e y.

Stifel fue el primero en dar a conocer de una forma primitiva una tabla logarítmica. La misma contiene los números enteros del -3 al 6 y sus correspondientes potencias de 2. Un ejemplo de ello es la siguiente tabla:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

A los números de la sucesión de la primera fila se les llamó exponentes. Esta primera tabla fue muy rudimentaria, lo que hacía difícil la aplicación de los logaritmos al cálculo numérico, ya que al trabajo de Stifel le faltaban las fracciones decimales.

Fue con la popularización de las fracciones decimales en el año 1600, que surgió la posibilidad de construir verdaderas tablas logarítmicas.

En una parte de la publicación, Stifel realiza la siguiente observación: “Se podría escribir todo un libro nuevo sobre las propiedades maravillosas de esos números, pero debo ponerme coto a mi mismo en este punto y pasar de largo con los ojos cerrados”. Agregando más luego:”La adición en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquélla corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación por si mismo, potenciación, en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo asi como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada" (Moreno, 2003)

John Napier

En el siglo XVI la Astrología era una ciencia que estaba en pleno apogeo, pero Los cálculos numéricos para trabajar con las mismas eran extensos y difíciles, lo que representaban un obstáculo para el avance de la ciencia. Debido a ello, el esfuerzo que se realizaba era bastante grande para no cometer errores.

Esto motivó que Neper escribiera su libro Rabdología, donde describe el funcionamiento de las regletas de Neper, en los cuales facilitaba la multiplicación de logaritmos.

Neper fue el creador de la palabra logaritmo (del griego "logos", que significa razón y " arithmos" que significa número: número de razones, ya que en el caso de ser el logaritmo un número entero, es el número de factores que se toman de la razón dada o base, para obtener el antilogaritmo). Sin embargo, no es de extrañar que en toda innovación de la ciencia existan duplicidades. Hubo otro hombre quien también trabajó sobre el mismo concepto incluso antes que Napier, este fue el relojero suizo Jobst Bürgi. Pero por cuestión de tiempo, tardó en publicar sus investigaciones hasta el año 1620.

En la mayoría de los libros de textos está escrito que **Neper fue el creador del logaritmo natural**, incluso de ahí el nombre de los logaritmos naturales o neperianos.

Pero realmente Jobst Bürgi, utilizó una base muy cercana a la base e:

$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$ =2.7184593, un valor bastante aproximado al valor de e=2.71828182

Bürgi empezó a partir de una progresión aritmética de primer término 0 y razón 10 y último término 32,000. En su tabla a los números los denominó: Números rojos y números negros.

Henry Briggs

Las tablas de Napier publicadas en 1614 causaron un gran impacto en Europa, sobre todo en Briggs, profesor de Geometría de Oxford. *"Briggs visitó a Napier en Edimburgo, y después de una discusión, llegaron a la conclusión de que el logaritmo de 1 debía ser igual a 0, mientras que el logaritmo de 10 debía ser iguala 1"* De esta forma surgen los logaritmos de briggs o los logaritmos de base vulgar.

Briggs en la publicación de su obra Logarithmorum Chilias Prima introduce los logaritmos de los números 1 al 1,000 con una precisión de 14 decimales. En su obra Aritmethica Logarithmica aparece la palabra característica o parte entera. En 1693, Wallis fue el primero en utilizar la palabra mantisa (parte decimal)

En la obra de Briggs, las tablas logarítmicas que aparecen contienen los logaritmos decimales de los números 1 al 20,000 y de 90,000 a 100,000, con 14 cifras decimales de precisión.

Finalmente el matemático inglés William Oughtred (1574-1660) establece las propiedades básicas de los logaritmos para su posterior utilización en el cálculo:

- Log m.n = log m + log n
- Log$\frac{m}{n}$ = Log m – log n
- $Logm^n$ = n log m

Oughtred es el creador de las populares reglas de cálculo, las cuales tuvieron bastante uso en el pasado reciente. (Moreno, 2003)

1.1.3 Antecedentes históricos de la derivada de una función

Generalmente todo lo que rodea al ser humano está en una continua **modificación.** Ejemplo de ello es la temperatura, la cual cambia, la presión atmosférica se altera, la tasa de inflación se dispara, la mortalidad disminuye, la población crece, entre otros.

El concepto de la palabra **variación**(es la acción de variar, hacer que una cosa sea diferente en algo de lo que antes era) se nos hace bastante conocido. Una palabra presente en muchas áreas de las ciencias (Diccionario de la real academia española, Madrid, 2011)

El concepto de derivada está muy unido al concepto de variación. Se crea el concepto de derivada, el cual se utiliza para medir y conocer la variación de cualquier magnitud que depende funcionalmente de otra.

Tanto el concepto de derivada como de integral constituyen la base sobre lo que se fundamenta el Cálculo Infinitesimal.

El desarrollo histórico del concepto de **derivada de una función** surge en el siglo XVII debido a los siguientes problemas planteados:

- La determinación de la tangente a una curva en un punto
- La velocidad de un cuerpo en movimiento

Isaac Barrow fue el precursor de la derivada, el cual ideó un método para trazar la tangente a una curva en un punto dado. Barrow fue el primero en descubrir que los procesos de derivación e integración son inversos.

Newton y Leibniz demostraron que con métodos infinitesimales se podían resolver estos problemas planteados

En 1638 Fermat presentó un método para encontrar los máximos y mínimos en una ecuación algebraica. También Fermat determinó un método para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica.

Este método se reduce al cálculo del siguiente límite:

$$\lim_{a \to 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

Newton descubrió el Cálculo Diferencial, el cual le dio el nombre de teoría de fluxiones. A las funciones x, y z le denominó **fluentes** y a las derivadas le llamaba **fluxiones**, denotándolas: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

A los diferenciales les denominó **Momentos de Fluxiones** y los denotó:

$\dot{x}0,\ \dot{y}0,\ \dot{z}0$, donde el 0 es una cantidad infinitamente pequeña.

Newton señalaba "*Cantidades y razón de cantidad, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finamente iguales", considerando el límite de una función o "el de la derivada" en su libro Philosophie naturalis principia mathematica (1687), lema I del libro I, sección I.* (Robayo, 2011).

"Cuando la función x^n fluyendo se convierta en x+ h, la función x^n se convierte en $(x+h)^n$ por el método de las series infinitas" (Ferrante J. , 2009).

Leibniz en 1676 determinó las reglas: $dx^n = nx^{n-1}$ para un entero o fraccional.
Para 1677, Leibniz determinó las reglas correctas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente.

Cabe destacar que fue Leibniz quien introdujo la simbología: "d" y "∫" correspondiente a la diferencial y a la integral respectivamente.

Su método fue publicado por primera vez en un artículo de la revista Acta Eruditorum en 1684 enunciándolo como *“Un nuevo método para máximos y mínimos y también tangentes, que no se ven obstruidos por las cantidades fraccionarias ni por los irracionales”* (Robayo, 2011).

Este artículo contenía los **símbolos dx y dy** , los cuales representaban para Leibniz cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales) con los cuales elaboró su Cálculo Diferencial “cálculo de tangentes” y las reglas correspondientes al producto, cociente y potencia.
Expresaba que dy = 0 para valores extremos relativos o $d^2y = 0$ para los puntos de inflexión, de esta manera introduce el término de Cálculo Diferencial.

Fue en el siglo XIX cuando la función derivada logra su reconocimiento científico, matemático y social. Muchos personajes contribuyeron con esto, entre los que caben destacar: Niels Abel (1802-1829), Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin Cauchy (1789-1857) y Karl Weierstrass (1815-1897).

Bolzano fue el primero que describió la derivada como un límite. La cantidad f(x) a la que la razón:

$$\frac{f(x+\nabla x)-f(x)}{\nabla x}$$

Se aproxima indefinidamente cuando ∇x se acerca a cero a través de valores positivos y negativos.

Cauchy expresó la derivada en su libro Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal (1823) Tercera Lección “*cuando la función es continua entre dos limites dados de la variable x, y se asigna a esta variable un valor* *comprendido entre dichos limites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente si, entonces los dos términos de la razón entre las diferencias serán dos cantidades infinitamente pequeñas.*

Sin embargo, mientras estos dos términos se aproximan indefinidamente y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger a otro limite positivo o negativo. Este límite:

$$\frac{\nabla y}{\nabla x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Si existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x. Así por ejemplo si se toma f(x) = x^m. Siendo m un número entero, entonces la razón entre las diferencias infinitamente pequeña será:

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} + \cdots + i^{m-1}$$

Que tendrá por límite la cantidad m x^{m-1}, es decir una nueva función de la variable x llamada función derivada y se designa por la notación $y' \; o \; f'(x)$" (Robayo, 2011)

En esta valiosísima obra, Cauchy dejó dicho lo fundamento de lo que hoy constituye un programa de Análisis Matemático.

1.2 Marco Conceptual

Los siguientes conceptos servirán para tener una base teórica en la derivación logarítmica

1.2.1 Función. Concepto

La gran mayoría de los autores definen una función como una regla de correspondencia que asocia los elementos de un conjunto, digamos, X con un único elemento de otro conjunto Y.

Tom Apóstol lo define basándose en el concepto de conjunto. Se define como una primera opción el concepto de par simple, como un conjunto de dos elementos.

Por ejemplo los conjuntos: {2,3} y {3,2} representan pares simples. Aquí se puede observar que no importa el orden de colocación de los elementos de estos conjuntos, por lo tanto estos dos conjuntos son iguales.

Si se tiene un par de elementos encerrados entre paréntesis, (a, b) y se define a como primer elemento y b como segundo elemento, entonces se está en presencia de un par ordenado. Aquí se está especificando a un primer elemento y a un segundo elemento, cuando esto sucede se está en presencia de una pareja ordenada de elementos.

Basado en estos criterios se define una función f como un conjunto de parejas ordenadas (x, y), en las cuales no se repiten las primeras componentes. Al conjunto de todos los elementos de las primeras parejas ordenadas se le llama dominio de la función, y al conjunto de las segundas parejas ordenadas se le llama codominio o recorrido de f.

Puede compararse una función como una tabla con dos filas, en la cual cada entrada representa una pareja ordenada (x, y), representando la fila “x” el dominio y la fila “y” el recorrido de f. Se debe tener presente que no debe haber dos valores de la fila “y” asociado a un único valor de la fila “x”.

Una función se representa a través de la siguiente fórmula:

y= f(x)

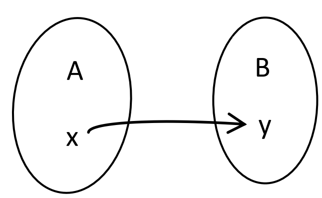
En vez de representarla como una pareja ordenada (x, y) ∈ f, la cual indica que la pareja ordenada (x, y) está contenida en f.

(Apóstol, 2006)

Otros autores, definen la función como una regla de correspondencia que asigna a los elementos de un conjunto dado, el cual llaman dominio de la función, un único elemento de otro conjunto, el cual llaman codominio, dominio de imágenes o rango de la función. Los mismos coinciden en la notación funcional: y=f(x), representando la "x" el domino de la función y la "y" el codominio de la función

(stewart, 2007), (Walter Fleming, 1991) (Sobel, 2006)

Por lo que se puede observar en lo que respeta al concepto de función, la misma no es más que una correspondencia que relaciona una variable determinada (variable independiente) con un único valor de otra (variable dependiente). Tal como se puede observar en la siguiente gráfica:



La parte importante en una función es la regla de correspondencia. Al asignarle un valor a su x, le debe corresponder un único valor a la y.

Otra manera de definir una función es como un conjunto de parejas ordenadas.

De esta manera una **función** es el conjunto de parejas ordenadas, cuyas primeras componentes no se repiten. Así por ejemplo si se tiene el siguiente conjunto de parejas ordenadas: { (1,2), (3,6), (-5, 7)}, podrá observarse que no se repiten las primeras componentes de dichas parejas ordenadas, por lo tanto este conjunto representa una función. Al representarlo en una tabla de valores se obtiene lo siguiente:

x	y
$1 \longrightarrow$	2
$3 \longrightarrow$	6
$-5 \longrightarrow$	7

1.2.2. Funciones algebraicas y funciones trascendentes. Concepto y diferenciación

Las funciones se clasifican en algebraicas y no algebraicas o trascendentes, esto dependiendo del tipo de operaciones que se realicen en la variable. Para el caso de las funciones algebraicas la variable está afectada de las operaciones algebraicas fundamentales: **Suma, resta, multiplicación, división, radicación y potenciación.**

Las funciones algebraicas a su vez se clasifican en racionales e irracionales.

Dividiéndose las primeras en enteras y fraccionarias. Para el caso de las funciones no algebraicas o trascendentes, la variable no está afectada de las operaciones fundamentales del Álgebra, sino de un argumento logarítmico, exponencial o trigonométrico y se clasifican en: Logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. A continuación algunos ejemplos de funciones:

1) $f(x) = (2x + 5)^{-3}$

Como esta función presenta un exponente negativo, se lleva a una función con exponente positivo, teniendo como resultado:

f(x) = $\frac{1}{(2x+5)^3}$

Como se podrá observar en esta función las operaciones que afectan la variable son suma, producto y división, entonces se tiene una función algebraica del tipo racional fraccionaria.

2) h(x) = 4x – 5x^2

Para esta función las operaciones que afectan la variable son: Resta y potenciación, por lo que h(x) es una función del tipo algebraica racional entera.

3) s(x) = $\sqrt{7x+8}$

Para este caso la variable está afectada de la operación radicación, por lo que esta función representa una función algebraica irracional.

4) g(x) = Log (9x + 3)

En esta función la variable está afectada de un argumento logarítmico, por lo tanto es del tipo trascendente logarítmica.

5) t(x) = $2^{5x + 1}$

La variable forma parte de un exponente, por lo que esta función representa una del tipo trascendente exponencial.

6) r(x) = Sen(3x + 4)

La variable forma parte de un argumento trigonométrico, en este caso el seno, por lo que esta función representa una función trascendente trigonométrica.(Engler A, 2005)

Como se podrá observar la diferenciación **clave** de las funciones algebraicas y no algebraicas o trascendentes radica en las operaciones en las cuales se ve afectada la **variable independiente**. Por lo que se debe tener muy en cuenta de que operación está afectada la variable.

Un caso engañoso sería el siguiente: $f(x) = 2x \log 10$

Como se podrá observar en este caso la variable no forma parte de un argumento logarítmico, por ende este tipo de función es algebraica racional entera. Ya que el $\log 10 = 1$, por lo que esta función es igual a:

$f(x) = 2x\,(1) = 2x$

1.2.3. Funciones potencio-exponenciales. Concepto

Antes de proceder a la definición de funciones potencio-exponenciales, se definirá el concepto de **función potencia y función exponencial**.

Una función potencia es una función de los números reales hacia los números reales, que tiene la forma:

$f(x) = ax^n$

Aquí "a" representa un número real diferente de cero y n pertenece al conjunto de los números naturales. Los siguientes son ejemplos de funciones potencia:

1) $f(x) = 5x^6$ 2) $f(x) = \frac{3}{7}x^3$

Para el ejemplo #1, $a = 5$ y $n = 6$

Para el ejemplo #2, $a = \frac{3}{7}$ y $n = 3$

El dominio que presentan estas funciones es para todo número real y el recorrido para todo real también.

Una función **exponencial** tiene la forma: $f(x) = a^x$ siendo $a > 0$ (Semerari, 2011)

Esto significa que la base será siempre un valor positivo. Ejemplos de funciones exponenciales: 1) $f(x) = 3^{x+1}$ 2) $f(x) = 4^x$

Como se podrá observar la variable forma parte de un exponente. El dominio de esta función es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los reales positivos.

Una función potencio-exponencial tiene la forma: $f(x) = h(x)^{g(x)}$, es decir, que tanto en la base como en el exponente está presente la variable independiente x.

Las siguientes funciones son potencial exponencial:

1) $f(x) = x^{5x}$

2) $f(x) = (4x)^{\sqrt{5x}}$

3) $\sqrt[x]{9x-1}$

4) $(tanx)^{3x}$

5) $(cosx)^{x}$

En estas funciones se podrá observar que la variable independiente x está ubicada tanto en la base como en el exponente.

1.2.4 Logaritmo. Concepto

Para una función exponencial $y = a^x$, si intercambiamos las variables, se obtiene $x = a^y$, Esta fórmula define "y " como una función de x

Es decir que "y" es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener x

Si se reemplaza la palabra exponente por la palabra logaritmo, se puede reescribir la expresión anterior de la siguiente forma:

y es el logaritmo en la base a de x (Zill, 1999)

Por lo tanto, se define el **logaritmo de un número positivo** al exponente al que hay que elevar la base para obtener el número. Así, si tenemos un logaritmo de una base positiva a:

$y = \log_a x$, esto implica que $a^y = x$

Como se puede observar el logaritmo es la función inversa a la función exponencial.

Existen dos grandes bases logarítmicas:

- Base decimal o base 10, son los logaritmos comunes. Ejemplo: $\log_a x = y$
- Base e o base natural, son los logaritmos naturales o neperianos. Ejemplo: $\log_e x = y \;\; o \; Ln\, x = y$

La última expresión es la más utilizada para representar los logaritmos neperianos, es decir: Lnx = y

1.2.5 Propiedades logarítmicas.

1.2.5.1. Logaritmo de la unidad

Para cualquier base logarítmica, el logaritmo de la unidad es igual a cero.

$$\forall\, a = 0, a^0 = 1 \;\rightarrow\; \log_a 1 = 0$$

De esta forma, se tiene que: Ln 1 = 0, log 1 = 0

1.2.5.2. Logaritmo de la base

Para cualquier base logarítmica, el logaritmo de la base es igual a la unidad.

De esta manera: Log 10 = 1, ln e = 1

1.2.5.3 Logaritmo de una potencia

Para cualquier base logarítmica, el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base

$$Si\ a^p = x \rightarrow \log_a x = p$$

Ejemplo #1

Aplicar la propiedad anterior a la siguiente función exponencial:

$$\ln(2)^5 = 5 \ln 2$$

Ejemplo #2

Aplicar la propiedad anterior a la siguiente función:

$$\log(11)^y = y \log 11$$

No se debe confundir:

$$Log(a)^x = \log(\underbrace{a.a.a.a.a.a \ldots a}_{\text{x veces}}) = x \log a$$

Con la siguiente expresión:

$$[\log(a)]^x = \underbrace{\log a \log a \log a \ldots \log a}_{\text{x veces}}$$

Como se podrá observar, el número “a” no está elevado al exponente “x”, sino toda mi expresión logarítmica.

Por lo tanto no se debe confundir: $\ln(2)^5 = 5 \ln 2$

Con: $[\ln(2)]^5$

1.2.5.4 Logaritmo de una raíz

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido entre el índice de la misma.

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{\ln x}{n}$$

Ejemplo:

Aplicar la propiedad anterior a la siguiente función: $\ln \sqrt[5]{A} = \frac{\ln A}{5}\ o \ln A^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \ln A$

No se debe confundir: $\ln \sqrt[4]{x^3} = \ln(x)^{\frac{3}{4}} \quad = \frac{3}{4} \ln x$

Con: $\sqrt[4]{\ln x^3} = [\ln x^3]^{\frac{1}{4}} = [3 \ln x]^{\frac{1}{4}}$

1.2.5.5. Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

Log m.n = log m + log n

Esta propiedad puede ser demostrable de la siguiente forma, aplicando el concepto de logaritmo:

Para una base cualquiera “a”:

Si $a^x = m \rightarrow \log_a m = x$

$a^y = n \rightarrow \log_a n = y$

Al multiplicar ambas expresiones resulta: $a^x a^y = m.n,\ a^{x+y} = m.n$

Aplicando propiedades de la potencia y llevando esta expresión exponencial a forma logarítmica:

$\log_a m.n = x + y$, sustituyendo los valores de x e y en esta última expresión, queda demostrada la propiedad:

$$\log_a m.n = \log_a m + \log_a n$$

Ejemplo #1

Simplificar la siguiente expresión: $\ln(A^3B^5)$

$\ln(A^3B^5) = \ln A^3 + \ln B^5 = 3\ln A + 5\ln B$

Ejemplo #2

Simplificar la siguiente expresión: $\log \sqrt[3]{x^4y^2z^5}$

$$\log \sqrt[3]{x^4y^2z^5} = \frac{\log(x^4y^2z^5)}{3} = \frac{\log x^4 + \log y^2 + \log z^5}{3}$$
$$= \frac{4\log x + 2\log y + 5\log z}{3}$$

1.2.5.6 Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor

$$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$$

Esta propiedad también es demostrable, siguiendo un proceso parecido a la propiedad anterior:

Para una base cualquiera "a":

Si $a^x = m \rightarrow \log_a m = x$

$a^y = n \rightarrow \log_a n = y$

Al dividir ambas expresiones, resulta: $\frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n}$, $\quad a^{x-y} = \frac{m}{n}$

Aplicando propiedades de la potencia y llevando esta expresión exponencial a forma logarítmica:

$\log_a \frac{m}{n} = x - y$, sustituyendo los valores de x e y en esta última expresión, queda demostrada la propiedad:

$$\log\frac{m}{n} = \log m - \log n$$

Ejemplo #1

Simplificar la expresión: $\ln\frac{A^3B^5}{C}$

$$\ln\frac{A^3B^5}{C} = \ln(A^3B^5) - \ln C = 3\ln A + 5\ln B - \ln C$$

Ejemplo #2

Simplificar la expresión $\log\frac{(x+1)^2}{\sqrt[4]{(y+4)^3}}$

$$\log\frac{(x+1)^2}{\sqrt[4]{(y+4)^3}} = \log(x+1)^2 - \log\sqrt[4]{(y+4)^3} = 2\log(x+1) - \frac{3\log(y+4)}{4}$$

Se debe aplicar propiedades logarítmicas donde quiera que haya un producto, un cociente, una potencia y una raíz, tantas veces como sea necerario.

1.2.6. Derivada de una función. Concepto

Según se pudo observar en el antecedente histórico de la derivada, el inconveniente de encontrar la recta tangente a una curva y el inconveniente de encontrar la velocidad de un objeto involucran encontrar el mismo tipo de límite.

Este tipo especial de límite es lo que se denomina derivada, y en Ingeniería y en muchas otras ciencias, tales como la Economía y la Química, entre otras puede ser interpretada como una razón de cambio.

Muchos autores definen el concepto de derivada como el siguiente:

La derivada de una función f en un número x = a, denotada por f '(a), es igual a:

f '(a)=$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, si este límite existe.

Si x = c + h, al despejar h: h = x – c , por lo que si h tiende a 0 si y sólo si x tiende a c

Por lo que se tiene una forma equivalente de expresar el concepto de derivada:

f '(a) = $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

Definición de derivada como cociente incremental:

Los trabajos de Lebniz por encontrar un método general para hallar la tangente a una curva dieron origen a la noción de derivada como el cociente de diferencia de una función y = f(x) o el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Sustituyendo el símbolo de diferencia Δ por el símbolo diferencial “d”:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Leibniz afirmó “Δx no se aproxima a cero. En vez de eso, el último valor de Δx no es cero, sino una cantidad infinitamente pequeña una “diferencial llamada dx” , y de manera similar Δy tiene un valor último infinitamente pequeño llamado dy.El cociente real de estas diferencias infinitamente pequeñas es nuevamente un número ordinario llamado derivada $f'(x) = \frac{dy}{dx}$” (Robayo, 2011)

Como se podrá observar es el mismo concepto que muchos autores hoy en día expresan sobre la derivada, tal como está expresado al inicio de este ítem.

1.2.7 Propiedades de la derivada de una función

Desarrollar la derivada de una función por límites resulta un poco complicado, para ello existen una serie de propiedades o reglas que simplificarán y agilizarán el cálculo de las mismas. (ver anexo fórmulas derivación)

1.2.8 Derivación implícita

Antes de definir el proceso de la derivación implícita, se definirá el concepto de una función implícita. Es aquella en la cual la variable “y” no está despejada, es decir, se halla mezclada con la variable x.

Ejemplos:

- $3y^2x + 3x^5 - 6xy = 0$
- $x^3 + 3y^3 = 81$
- $x^2 + y^2 = 7xy$

Para derivar estas funciones, se utiliza el método de la derivación implícita.

Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x, y luego despejar la ecuación resultante para y'.

Ejemplo #1

Para $x^2 + y = 25$, determine y' o $\frac{dy}{dx}$,

Derivando ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + \frac{dy}{dx} = 0 \ , \quad \frac{dy}{dx} = -2x$$

Ejemplo #2

Encuentre y' o $\frac{dy}{dx}$, dado $x^3 – y^3 – 7xy = 0$

Derivando ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(x^3 - y^3 - 7xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 - 3y^2\frac{dy}{dx} - 7\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0, \quad 3x^2 - 3y^2\frac{dy}{dx} - 7x\frac{dy}{dx} - 7y = 0$$

$$3x^2 - 7y = 3y^2\frac{dy}{dx} + 7x\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 - 7y = (3y^2 + 7x)\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 7y}{3y^2 + 7x}$$

Ejemplo #3

Encuentre y' o $\frac{dy}{dx}$, dado $x^3y + 3y - 5x = 0$

Derivando ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(x^3y + 3y - 5x) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3y) + \frac{d}{dx}(3y) - \frac{d}{dx}(5x) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$x^3\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x^3) + 3\frac{dy}{dx} - 5 = 0, \; x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y + 3\frac{dy}{dx} - 5 = 0$$

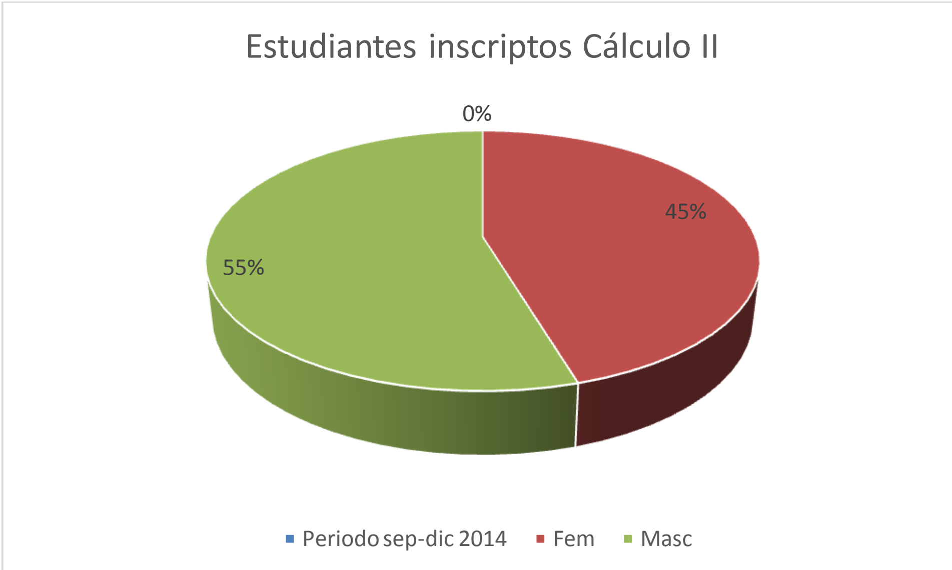
$$(x^3 + 3)\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 3x^2y}{x^3 + 3}$$

1.3 **Marco social**

Esta investigación tiene como marco contextual los estudiantes de Cálculo II del periodo septiembre-diciembre 2014 de la universidad APEC.

Actualmente están inscritos en este periodo en la materia Cálculo II un total de 201 estudiantes, de los cuales 38 corresponden al sexo femenino y 163 corresponde al sexo masculino distribuidos en 6 grupos (Datos ofrecidos por el departamento de Matemática de la universidad APEC).



La universidad APEC es una institución sin fines de lucro, creada en 1964, cuya misión es: Formar líderes creativos y emprendedores para una economía global, mediante una oferta académica completa con énfasis en los negocios, la tecnología y los servicios, que integra la docencia, la investigación y la extensión, con el fin de contribuir al desarrollo de la sociedad dominicana.

Tiene por visión: Ser la primera opción entre las universidades dominicanas por su excelencia académica en los negocios, la tecnología y los servicios.

La universidad APEC tiene por Valores:

- Compromiso y responsabilidad.
- Sentido de pertenencia en la institución.
- Trabajo colectivo/en equipo.
- Calidad en el servicio.
- Eficiencia.
- Perseverancia.
- Respeto a la diversidad

(Universidad APEC 2011)

Conclusiones del Capítulo I

Todos los grandes descubrimientos en la civilización han pasado por un largo proceso antes de verlo como lo es hoy en día. Proceso que toma muchos años y mucho tiempo a las diferentes mentes brillantes que han habitado este mundo.

Tal es el caso del concepto de función. Tomó un largo tiempo formalizar dicho concepto, por lo visto siempre existió la dependencia de una variable en función de otra. Y esto no fue ajeno a las civilizaciones que han existido. Pero el concepto de función fue puliéndose hasta llegar al concepto de función en la actualidad:

Una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto dado, llamado dominio de la función, un único elemento de otro conjunto, llamado codominio, rango o dominio de imágenes.

Otro gran descubrimiento fue el concepto de logaritmo. Los cuales surgieron por la necesidad de hacer más fáciles operaciones complicadas. Pero este al igual que el de función no surgió de la noche a la mañana, sino que pasó por un proceso hasta la forma como lo conocemos en la actualidad.

Se utilizó para facilitar el cálculo de operaciones complicadas, tales como productos, divisiones enormes, potencias y raíces, en el interés compuesto, la navegación y la Astronomía. Evidentemente que con el tiempo y el uso de las tecnologías ha hecho mejorar mucho estos descubrimientos, cayendo algunos de ellos en desuso, tales como las tablas logarítmicas.

Pero cabe destacar que en su momento tuvieron una importancia de primer orden, aparte de que sirvieron de base para seguir mejorándolos.

Otro descubrimiento importante lo fue el de la derivada. Este descubrimiento vino a resolver los problemas del Cálculo Infinitesimal, el cual se había empezado a estudiar desde la antigüedad. El concepto de derivada se aplica en aquellos casos donde se necesita medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación determinada.

El proceso de derivación constituye una de las operaciones de mayor relieve cuando se trata de funciones reales de variable real, ya que nos indica la tasa de variación de la función en un instante determinado o para un valor determinado de la variable, si ésta no es el tiempo. Por lo que, la derivada de una función para un valor de la variable es la tasa de variación instantánea de dicha función y para el valor concreto de la variable.

Aparte del marco histórico, en este primer capítulo se ha desarrollado el marco conceptual de esta investigación. Lo que servirá de soporte para poder utilizar una estrategia adecuada en la derivación logarítmica de funciones con la cual logre superar la contradicción existente entre las grandes potencialidades de las propiedades logarítmicas y su restringido uso.

CAPÍTULO II: DERIVACIÓN LOGARITMICA DE FUNCIONES

2.1 **Derivación de funciones:** Una estrategia para la identificación y aplicación de la derivación aplicando propiedades logarítmicas

El uso de las propiedades logarítmicas para derivar funciones, proporciona un método menos laborioso que si se aplicara las fórmulas de derivación. Reduciéndose con este método las probabilidades de cometer errores.

Para aplicar la derivación logarítmica en las funciones debo tener en cuenta lo siguiente:

1. Aplicar logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación, y aplicar propiedades logarítmicas a la misma.
2. Derivar implícitamente respecto a la variable x
3. Resolver la ecuación resultante para $\frac{dy}{dx}$ o y'
4. Sustituir para y

A continuación se presentan los siguientes ejemplos de derivación de funciones utilizando las fórmulas de derivación y utilizando el método de la derivación logarítmica, estableciéndose una comparación entre ambos.

Ejemplo #1

Derivar la siguiente función:

$$\mathrm{f(x)} = \ln\frac{e^x + 2}{e^x - 2}$$

Fórmula de derivación:

Se utilizará la fórmula de derivación del logaritmo natural de una función, es decir:

Si f(x)= lnx, su derivada es: y'= $\frac{\frac{dx}{dx}}{x}$

y' = $\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+2}{e^x-2}\right)}{\frac{e^x+2}{e^x-2}}$, como se podrá observar en el numerador tenemos la derivada de un cociente, se aplica la fórmula de derivación para un cociente y la derivada de una función exponencial base e:

f(x) = $\frac{u}{v}$, $f'(x) = \frac{vu'-uv\prime}{v^2}$, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$se tiene:

$$f'(x) = \frac{\frac{(e^x-2)e^x-(e^x+2)e^x}{(e^x-2)^2}}{\frac{e^x+2}{e^x-2}}$$

$$= \frac{e^{2x}-2e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-2)(e^x+2)} = \frac{-4e^x}{(e^x-2)(e^x+2)}$$

Aplicando diferencia de cuadrados perfectos en el numerador:

$$= \frac{-4e^x}{(e^x)^2-4} = \boldsymbol{\frac{-4e^x}{e^{2x}-4}}$$

Como se podrá observar para llegar al resultado de la derivación de esta función, se tuvo que aplicar dos fórmulas de derivación y luego operar con fracciones y simplificar.

Estos pasos tienden a incrementar las probabilidades de cometer errores en los estudiantes, ya sean errores operacionales o errores de conocimientos.

Ahora se procederá a realizar el mismo ejercicio, aplicando **la derivación logarítmica:**

$$\mathrm{f(x)} = \ln \frac{e^x + 2}{e^x - 2}$$

Aplicando la propiedad logarítmica de la división, se tiene:

$$\mathrm{f(x)} = \ln(e^x + 2) - \ln(e^x - 2)$$

Luego derivando en ambos miembros de la igualdad:

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 2} - \frac{e^x}{e^x - 2}$$

Efectuando esta suma de fracciones, se tiene:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 2) - e^x(e^x + 2)}{(e^x + 2)(e^x - 2)}$$

Reduciendo:

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x - e^{2x} - 2e^x}{(e^x + 2)(e^x - 2)}$$

$$f'(x) = \boldsymbol{\frac{-4e^x}{e^{2x} - 4}}$$

Al aplicar propiedades logarítmicas la derivación se simplificó sobremanera.

Ejemplo #2:

Derivar la siguiente función utilizando las fórmulas de derivación y la derivación logarítmica:

$$\mathrm{f(x)} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Fórmula derivación:

Aplicando las fórmulas de derivación de un logaritmo natural, una potencia y de un cociente, se tiene:

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-x+1+x)}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \boldsymbol{\frac{1}{1-x^2}}$$

Para este ejemplo todavía se complican un poco más los pasos a realizar para derivar esta función utilizando fórmulas de derivación.

Para llegar a la conclusión, una vez que se aplicaron las fórmulas de derivación mencionadas más arriba, hubo que aplicar conocimientos previos sobre potencias con exponentes negativos, propiedades de la radicación y productos notables (diferencia de cuadrados perfectos)

Derivación logarítmica: Aplicando propiedades de la potencia y el cociente logarítmico:

$$f(x) = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

Derivando ambos miembros:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x-(-1)(1+x)}{1-x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1-x+1+x}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{1-x^2} = \boldsymbol{\frac{1}{1-x^2}}$$

El nivel de dificultad como podrá observarse es mucho menor aplicando propiedades logarítmicas.

Ejemplo #3

Derivar la siguiente función:

$$f(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}$$

Fórmula derivación: Aplicando las fórmulas de derivación del logaritmo natural, la de una potencia y de un cociente, se tiene:

$$f'(x) = \frac{\frac{dy}{dx}\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x+2}\right)}{\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{(x+2)(3)-3x(1)}{(x+2)^2}\right]}{\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}}$$

Reduciendo términos:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{3x+6-3x}{(x+2)^2}\right]}{\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}}=\frac{1}{3}\frac{\frac{6}{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{\frac{3x}{x+2}}\sqrt[3]{\left(\frac{3x}{x+2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{6}{(x+2)^2\sqrt[3]{\left(\frac{3x}{x+2}\right)^3}}$$

Sacando raíz cúbica y simplificando:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2\frac{3x}{x+2}}=\boldsymbol{\frac{2}{3x(x+2)}}$$

Aplicando derivación logarítmica:

Aplicando propiedades logarítmicas:

$$f(x)=\frac{1}{3}[\ln 3x-\ln(x+2)]$$

Derivando ambos miembros de la ecuación:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{3x}-\frac{1}{x+2}\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{3(x+2)-3x}{3x(x+2)}\right]=\frac{1}{3}\frac{3x+6-3x}{3x(x+2)}$$

$$f'(x)=\boldsymbol{\frac{2}{3x(x+2)}}$$

Ejemplo#4

Derivar la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x}$

Fórmulas derivación:

$$f'(x) = \frac{x[x^2(1) + (x+1)(2x)] - x^2(x+1)(1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x[x^2 + 2x^2 + 2x] - x^2(x+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x[3x^2 + 2x] - x^2(x+1)}{x^2} = \frac{3x^3 + 2x^2 - x^3 - x^2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x+1)}{x^2} = \mathbf{2x + 1}$$

Derivación logarítmica:

Aplicando logaritmo neperiano a ambos lados de la igualdad:

$$\ln y = \ln \frac{x^2(x+1)}{x}$$

Aplicando propiedades logarítmicas:

$$\ln y = \ln x^2 + \ln(x+1) - \ln x$$

Derivando ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{x}$$

Despejando y' y simplificando:

$$y' = y\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{x}\right] = \frac{x^2(x+1)}{x}\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{x}\right]$$

$$y' = \frac{x^2(x+1)}{x}\frac{2}{x} + \frac{x^2(x+1)}{x}\frac{1}{(x+1)} - \frac{x^2(x+1)}{x}\frac{1}{x} = 2(x+1) + x - x - 1$$

$$\boldsymbol{y' = 2x + 1}$$

Ejemplo #5

Derivar la función: $f(x) = \frac{5x^2\sqrt{x+2}}{(2x-1)(\sqrt[3]{x})}$

Derivación logarítmica:

Aplicando logaritmos a ambos lados de la ecuación y propiedades logarítmicas:

$$\ln y = \ln 5 + 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \ln(2x-1) - \frac{1}{3}\ln x$$

Derivando: $\frac{y'}{y} = 0 + \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+2)} - \frac{2}{(2x-1)} - \frac{1}{3x}$

$$y' = y\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{3x}\right)$$

$$y' = \frac{5x^2\sqrt{x+2}}{(2x-1)(\sqrt[3]{x})}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{3x}\right)$$

Aplicando fórmulas de derivación:

$$y' = \frac{[(2x-1)\sqrt[3]{x}]\frac{d}{dx}\left(5x^2\sqrt{x+2}\right) - \left(5x^2\sqrt{x+2}\right)\frac{d}{dx}[(2x-1)\sqrt[3]{x}]}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]\left[5x^2 \frac{d}{dx}\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}(10x)\right] - \left(5x^2\sqrt{x+2}\right)\left[(2x-1)\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}(2)\right]}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]\left[5x^2 \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}(1) + 10x\sqrt{x+2}\right] - \left(5x^2\sqrt{x+2}\right)\left[(2x-1)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{x}\right]}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]\left[\frac{5x^2}{2\sqrt{x+2}} + 10x\sqrt{x+2}\right] - \left(5x^2\sqrt{x+2}\right)\left[\frac{2x-1}{3x^{\frac{2}{3}}} + 2\sqrt[3]{x}\right]}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]\left[\frac{5x^2}{2\sqrt{x+2}} + 10x\sqrt{x+2}\right] - \left(5x^2\sqrt{x+2}\right)\left[\frac{2x-1}{3x^{\frac{2}{3}}} + 2\sqrt[3]{x}\right]}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando factor común $\sqrt{x+2}$:

$$= \frac{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]\left[\left(\sqrt{x+2}\right)\left(\frac{5x^2}{2\left(\sqrt{x+2}\right)^2} + 10x\right)\right] - \left(5x^2\sqrt{x+2}\right)\left[\frac{2x-1}{3x^{\frac{2}{3}}} + 2\sqrt[3]{x}\right]}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]\sqrt{x+2}\left[\frac{5x^2}{2\left(\sqrt{x+2}\right)^2} + 10x\right] - (5x^2)\left[\frac{2x-1}{3x^{\frac{2}{3}}} + 2\sqrt[3]{x}\right]}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando factor común $\sqrt[3]{x}$ del segundo término del numerador:

$$= \frac{\sqrt{x+2}\left\{(2x-1)\sqrt[3]{x}\left[\frac{5x^2}{2(x+2)}+10x\right]-(5x^2)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{x}}+2\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Introduciendo: $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$: en el primer término del numerador:

$$= \frac{\sqrt{x+2}\left\{(2x-1)\sqrt[3]{x}\,\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\left[\frac{5x^2}{2(x+2)}+10x\right]-(5x^2)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{x}}+2\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando factor común $\sqrt[3]{x}$:

$$= \frac{\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}}\left\{(2x-1)\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x}\left[\frac{5x^2}{2(x+2)}+10x\right]-(5x^2)\left[\left(\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{x}}+2\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Introduciendo el factor $\frac{2x-1}{2x-1}$ en el primer término del numerador y sacando factor común $\frac{1}{2x-1}$del segundo término del numerador:

$$= \frac{\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}}\left\{(2x-1)\,\frac{2x-1}{2x-1}\,\sqrt[3]{x^2}\left[\frac{5x^2}{2(x+2)}+10x\right]-(5x^2)\left[\frac{1}{2x-1}\left(\frac{(2x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}+2(2x-1)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando factor común: $\frac{1}{2x-1}$, se tiene:

$$= \frac{\frac{\sqrt{x+2}}{(2x-1)\sqrt[3]{x}}\left\{(2x-1)(2x-1)\sqrt[3]{x^2}\left[\frac{5x^2}{2(x+2)}+10x\right]-(5x^2)\left[\left(\frac{(2x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}+2(2x-1)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando factor común $5x^2$ del primer término del numerador:

$$= \frac{\frac{\sqrt{x+2}}{(2x-1)\sqrt[3]{x}}\left\{(2x-1)^2\sqrt[3]{x^2}\left[5x^2\left(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{10x}{5x^2}\right)\right]-(5x^2)\left[\left(\frac{(2x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}+2(2x-1)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando $5x^2$ y simplificando:

$$= \frac{\frac{5x^2\sqrt{x+2}}{(2x-1)\sqrt[3]{x}}\left\{(2x-1)^2\sqrt[3]{x^2}\left[\left(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{2}{x}\right)\right]-\left[\left(\frac{(2x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}+2(2x-1)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando $(2x-1)^2$ factor común del segundo término del numerador:

$$= \frac{\frac{5x^2\sqrt{x+2}}{(2x-1)\sqrt[3]{x}}\left\{(2x-1)^2\sqrt[3]{x^2}\left[\left(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{2}{x}\right)\right]-\left[(2x-1)^2\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{2(2x-1)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{(2x-1)^2}\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando factor común $\sqrt[3]{x}$, del segundo término del numerador:

$$= \frac{\frac{5x^2\sqrt{x+2}}{(2x-1)\sqrt[3]{x}}\left\{(2x-1)^2\sqrt[3]{x^2}\left[\left(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{2}{x}\right)\right]-\left[(2x-1)^2\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}+\frac{2(2x-1)}{(2x-1)^2}\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Sacando factor común $(2x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ y simplificando se tiene:

$$= \frac{\frac{5x^2\sqrt{x+2}}{(2x-1)\sqrt[3]{x}}(2x-1)^2\sqrt[3]{x^2}\left\{\left[\left(\frac{1}{2(x+2)}+\frac{2}{x}\right)\right]-\left[\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{2x-1}\right)\right]\right\}}{\left[(2x-1)\sqrt[3]{x}\right]^2}$$

Pero $\sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$, por lo tanto:

$$y' = \frac{5x^2\sqrt{x+2}}{(2x-1)\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{3x}\right)$$

Como se podrá observar el procedimiento para derivar cocientes complicados se dificulta bastante aplicando las fórmulas de derivación. De nuevo aquí se visualiza que las posibilidades de equivocarse son sumamente mayores utilizando fórmulas de derivación que utilizando la derivación logarítmica.

Ejemplo #6

Derivar: $f(x) = (5x^2-3)(x-4)(x^3+5)$

Para este producto de tres factores si se utiliza la siguiente fórmula:

$f(x) = g(x)h(x)s(x)$, $f'(x) = g'(x)\, h(x)\, s(x) + g(x)\, h'(x)\, s(x) + g(x)\, h(x)\, s'(x)$,

se obtiene el siguiente resultado:

$f'(x) = 10x(x-4)(x^3+5) + (5x^2-3)(1)(x^3+5) + (5x^2-3)(x-4)(3x^2)$

Derivación logarítmica:

Al aplicar logaritmos a ambos lados, y al aplicar el logaritmo de un producto:

$$\ln y = \ln(5x^2-3) + \ln(x-4) + \ln(x^3+5)$$

Al derivar se obtiene:

$$\frac{y'}{y} = \frac{10x}{5x^2-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3x^2}{x^3+5} =$$

Despejando y' :

$$y' = y\left(\frac{10x}{5x^2-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3x^2}{x^3+5}\right)$$

Simplificando:

$$y' = 10x(x-4)(x^3+5) + (5x^2-3)(x^3+5) + (5x^2-3)(x-4)(3x^2)$$

Como se podrá observar es mucho menos laborioso trabajar con la derivación logarítmica de funciones que utilizar fórmulas de derivación. Muchas de las cuales con el tiempo se olvidan, debido a su complejidad.

Ejemplo #7

Derivar: $f(x) = x^{senx}$

Derivación logarítmica:

Aplicando logaritmo natural a ambos miembros y propiedad de la potencia logarítmica:

Ln y = Sen x lnx

Derivando ambos miembros: $\frac{y\prime}{y} = Senx.\frac{1}{x} + \ln x\,(cosx)$, despejando:

$$y' = y\left(\frac{1}{x}senx + \cos \mathrm{x} \ln x\right) = x^{senx}\left(\frac{1}{x}senx + \cos \mathrm{x} \ln x\right)$$

La fórmula para derivar esta función potencio- exponenciales es la siguiente:

$f(x) = u^v$, $f'(x) = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$, como se podrá observar la misma presenta por su naturaleza, inconvenientes a la hora del estudiante memorizarla.

Al aplicar esta fórmula a la función se tiene:

$$f'(x) o\ y' = \sin x\, x^{sex-1}(1) + x^{\sin x}(cosx) \ln x$$

Sacando factor común y aplicando propiedades de la potencia:

$$f'(x) o\ y' = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)$$

Ejemplo #8

Derivar la función: $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$

Al Aplicar logaritmos a ambos lados de la igualdad y la propiedad logarítmica de una potencia:

$$\ln y = \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$$

Al derivar ambos miembros:

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\frac{d}{dx}\ln\sqrt{x} + \ln\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\right) + \ln\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Al despejar y' y simplificar:

$$y' = y\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}\right) = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\left(1 + \ln\sqrt{x}\right)$$

Al aplicar la fórmula de derivación:

$$y' = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}-1}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln\sqrt{x}$$

Aplicando propiedades de la potencia y simplificando:

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}\right) = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\left(1 + \ln\sqrt{x}\right)$$

Ejemplo #9

Derivar: $f(x) = \frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}}{(x-3)^5(3x-1)^2}$

Derivación logarítmica:

Aplicando logaritmos naturales y propiedades logarítmicas a ambos lados de la ecuación:

$$\ln y = 3\ln(2x-1) + \ln(x^2+1) + \frac{1}{3}\ln(x+3) - 5\ln(x-3) - 2\ln(3x-1)$$

Derivando ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{2x-1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{3(x+3)} - \frac{5}{x-3} - \frac{6}{3x-1}$$

$$y' = \frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}}{(x-3)^5(3x-1)^2}\left(\frac{6}{2x-1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{3(x+3)} - \frac{5}{x-3} - \frac{6}{3x-1}\right)$$

Aplicando las fórmulas de derivación del cociente y el producto:

$$= \frac{(x-3)^5(3x-1)^2\frac{d}{dx}\left[(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}\right] - (2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}\frac{d}{dx}(x-3)^5(3x-1)^2}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

$$= \frac{(x-3)^5(3x-1)^2\left[6(2x-1)^2(x^2+1)\sqrt[3]{x+3} + (2x-1)^3(2x)\sqrt[3]{x+3} + (2x-1)^3(x^2+1)\frac{1}{3}(x+3)^{-\frac{2}{3}}\right] -}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

$$\frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}[6(x-3)^5(3x-1) + 5(3x-1)^2(x-3)^4]}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

Sacando factor común $\sqrt[3]{x+3}$ en el primer término del numerador:

$$= \frac{(x-3)^5(3x-1)^2\sqrt[3]{x+3}\left[6(2x-1)^2(x^2+1) + (2x)(2x-1)^3 + \frac{(2x-1)^3(x^2+1)}{3\sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{(x+3)^2}}\right] -}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

$$\frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}[6(x-3)^5(3x-1) + 5(3x-1)^2(x-3)^4]}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

Sacando factor común x^2+1 del primer término del numerador:

$$= \frac{(x-3)^5(3x-1)^2\sqrt[3]{x+3}(x^2+1)\left[6(2x-1)^2+\frac{2x(2x-1)^3}{x^2+1}+\frac{(2x-1)^3}{3\sqrt[3]{x+3}\sqrt[3]{(x+3)^2}}\right]-}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

$$\frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}[6(x-3)^5(3x-1)+5(3x-1)^2(x-3)^4]}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

Sacando $(2x-1)^3$factor común del primer término del numerador:

$$= \frac{(x-3)^5(3x-1)^2\sqrt[3]{x+3}(x^2+1)(2x-1)^3\left[\frac{6}{2x-1}+\frac{2x}{(x^2+1)}+\frac{1}{3(x+3)}\right]-}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

$$\frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}[6(x-3)^5(3x-1)+5(3x-1)^2(x-3)^4]}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

Sacando $(x-3)^5$ factor común del segundo término del numerador:

$$= \frac{(x-3)^5(3x-1)^2\sqrt[3]{x+3}(x^2+1)(2x-1)^3\left[\frac{6}{2x-1}+\frac{2x}{(x^2+1)}+\frac{1}{3(x+3)}\right]-}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

$$\frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}(x-3)^5\left[6(3x-1)+\frac{5(3x-1)^2}{x-3}\right]}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

Sacando $(3x-1)^2$ factor común del segundo término del numerador:

$$= \frac{(x-3)^5(3x-1)^2\sqrt[3]{x+3}(x^2+1)(2x-1)^3\left[\frac{6}{2x-1}+\frac{2x}{(x^2+1)}+\frac{1}{3(x+3)}\right]-}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

$$\frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}(x-3)^5(3x-1)^2\left[\frac{6}{(3x-1)}+\frac{5}{x-3}\right]}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

Ordenando:

$$= \frac{(x-3)^5(3x-1)^2\sqrt[3]{x+3}(x^2+1)(2x-1)^3\left[\frac{6}{2x-1}+\frac{2x}{(x^2+1)}+\frac{1}{3(x+3)}\right]-}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

$$\frac{(x-3)^5(3x-1)^2\sqrt[3]{x+3}(x^2+1)(2x-1)^3\left[\frac{6}{(3x-1)}+\frac{5}{x-3}\right]}{[(x-3)^5(3x-1)^2]^2}$$

Sacando factor común y aplicando propiedades de la potencia:

$$y' = \frac{(2x-1)^3(x^2+1)\sqrt[3]{x+3}}{(x-3)^5(3x-1)^2}\left(\frac{6}{2x-1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{3(x+3)}-\frac{5}{x-3}-\frac{6}{3x-1}\right)$$

Como se puede observar resulta bastante complicado trabajar esta función aplicando las fórmulas de derivación. En el mismo también se complica el proceso de simplificación del resultado, ya que para ello el discente debe tener una buena base de matemáticas anteriores.

Ejemplo #10

Derivar: $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

Derivación logarítmica:

Aplicando logaritmos naturales y propiedades logarítmicas a ambos lados de la igualdad:

$$\ln y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Derivando ambos miembros de la igualdad, se tiene la derivada del logaritmo natural y la derivada de un producto:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sin x}\frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \csc x \cot x$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sin x}\frac{1}{x} - \csc x \cot x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\left[-\frac{1}{\sin x}\frac{1}{x} - \csc x \cot x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

Aplicando fórmulas de derivación:

$$y' = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}-1}\frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\left[-\csc x \cot x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

Aplicando propiedades de la potencia y simplificando:

$$y' = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\left[-\frac{1}{x}\right] + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\left[-\csc x \cot x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

Sacando factor común:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\left[-\frac{1}{\sin x}\frac{1}{x} - \csc x \cot x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

El hecho de aplicar la derivación logarítmica a estas funciones complicadas no implica que no se pueda aplicar este método a funciones más sencillas. Un ejemplo de ello es el siguiente:

Al derivar la función $f(x) = x^3 + 3x^2$ utilizando derivación logarítmica, se tiene lo siguiente:

$$\ln y = \ln(x^3 + 3x^2)$$

Al derivar y despejar se obtiene:

$$y' = (x^3 + 3x^2)\left(\frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2}^3\right)$$

Simplificando:

$$y' = 3x^2 + 6x^3$$

2.2 Aplicación estudio de campo

Para fundamentar el problema se aplicó, como instrumento de investigación una encuesta por medio de un cuestionario. Para dicho estudio de campo se tomó un tamaño de muestra de 54 estudiantes, obtenido mediante la siguiente fórmula:

$n = \frac{NZ^2pq}{d^2(N-1)+Z^2pq}$ (Levin, 2004)

Donde:

n= Tamaño de la muestra

N= Total de la población

Z= 1.96 (valor obtenido mediante niveles de confianza Este valor es el correspondiente para una seguridad de 95%)

p = Proporción esperada (5%, valor constante ya que no se conoce su valor)

q= Proporción no esperada, q=1-p (1-0.05=0.95)

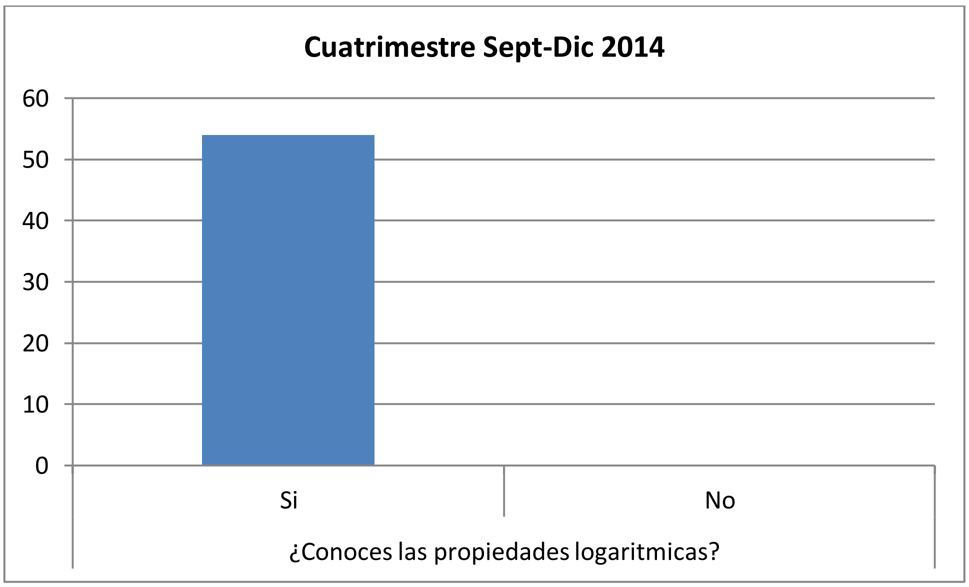
d= Precisión o límite de error muestral, como no se conoce su valor suele utilizarse un valor que varíe entre 1% y 9% (se tomó 5%)

Sustituyendo estos valores:

$$n = \frac{201(1.96)^2(0.05)(0.95)}{(0.05)^2(201-1)+(1.96)^2(0.05)(0.95)} = 53.7 \cong 54$$

Resultados obtenidos del instrumento de investigación: Cuestionario

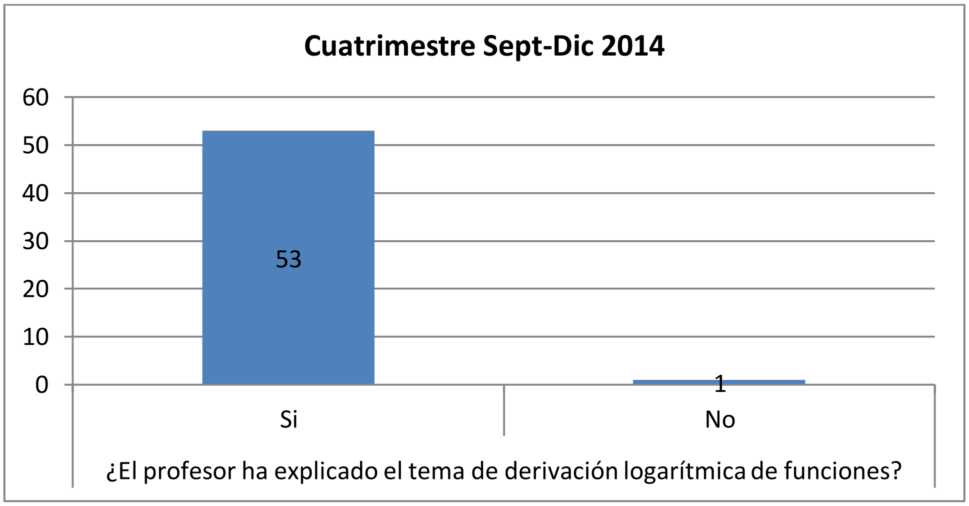
1-Resultados de la primera pregunta del cuestionario efectuado al discente:



Como se podrá observar de 54 encuestados el 100% conoce las propiedades logarítmicas.

Evidentemente el tema de las propiedades logarítmicas se imparte en las dos primeras matemáticas previas al Cálculo II, donde el estudiante visualiza nuevamente la aplicación de estas propiedades. El objetivo de ello es que el estudiante obtenga la base necesaria para poder responder satisfactoriamente los temas a tratar en matemáticas posteriores.

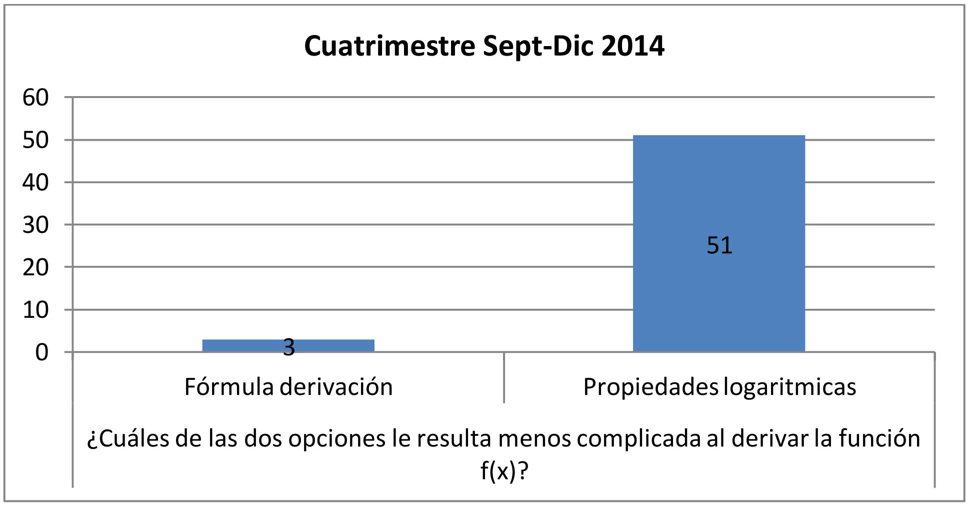
2 Resultados de la segunda pregunta del cuestionario efectuado al discente



Como se podrá observar el 98% de los estudiantes afirmaron que el tema de la derivación logarítmica les fue explicado. Este tema de derivación logarítmica debe ser explicado al estudiante, ya que forma parte del programa de la materia Cálculo II.

El mismo es necesario para trabajar las funciones trascendentes

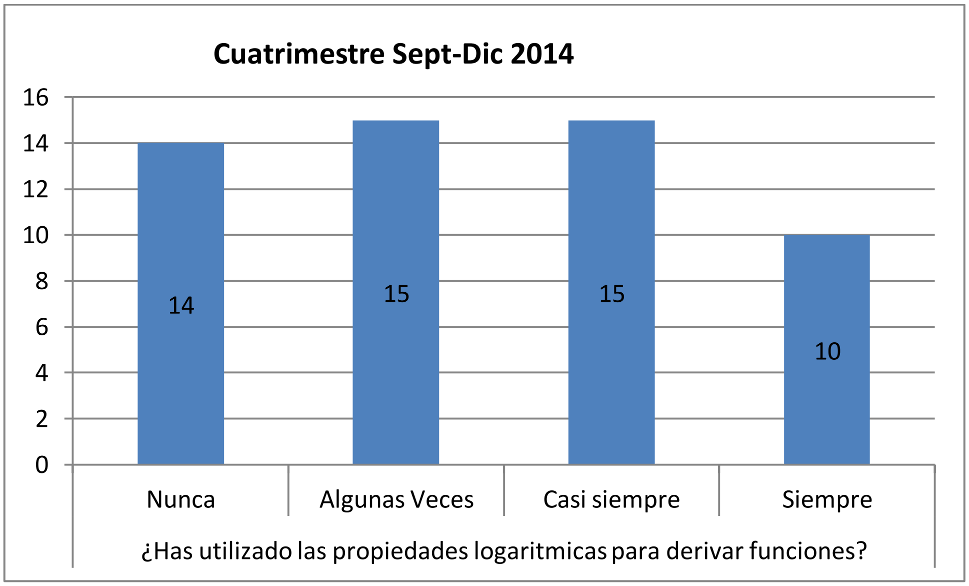
3- Resultados de la tercera pregunta del cuestionario efectuado al discente



Se le desarrolló al estudiante la derivación de la función: $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}$ a través de las fórmulas de derivación y aplicando la derivación logarítmica, como una manera de que pudieran comprobar la laboriosidad en la ejecución de ambos métodos.

Se evidenció que el 94% de los estudiantes visualizaron que era mucho menos laboriosa la solución de esta derivación a través de la derivación logarítmica, en contraste con un 6% que visualizaron menos laborioso el uso de las fórmulas de derivación.

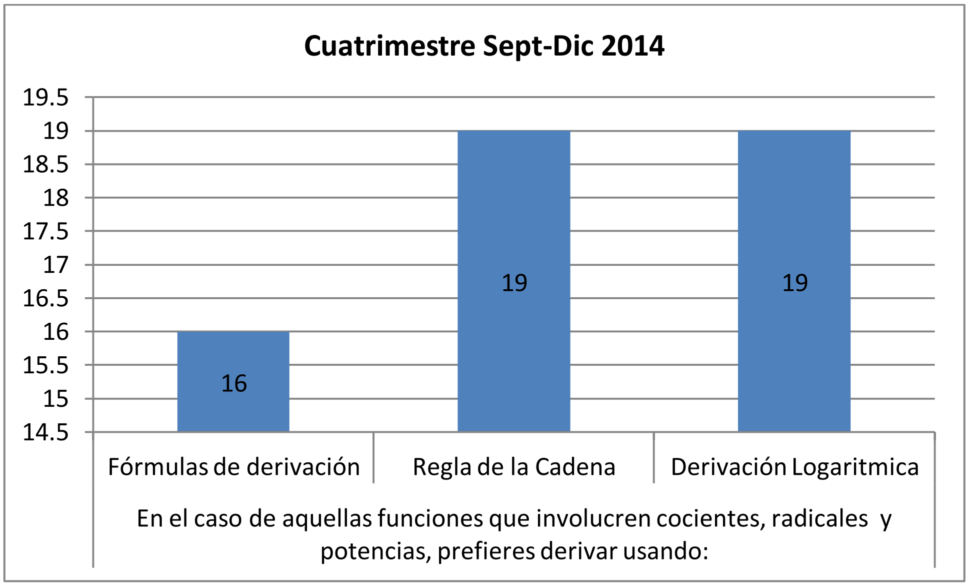
4- Resultados de la cuarta pregunta del cuestionario efectuado al discente



El Siguiente resultado evidencia que un porcentaje de 26% de estudiantes nunca han utilizado propiedades logarítmicas para derivar funciones que impliquen potencias y radicales. Un 28% sólo lo ha utilizado algunas veces, otro 28% casi siempre y un 18% siempre ha utilizado las propiedades logarítmicas para derivar funciones que impliquen potencias y radicales.

Aquí también se visualiza el limitado uso de toda la potencialidad de la derivación logarítmica, si tomamos en cuenta que sólo un 18% de los estudiantes siempre han utilizado la derivación logarítmica.

5- Resultados de la quinta pregunta del cuestionario efectuado al discente

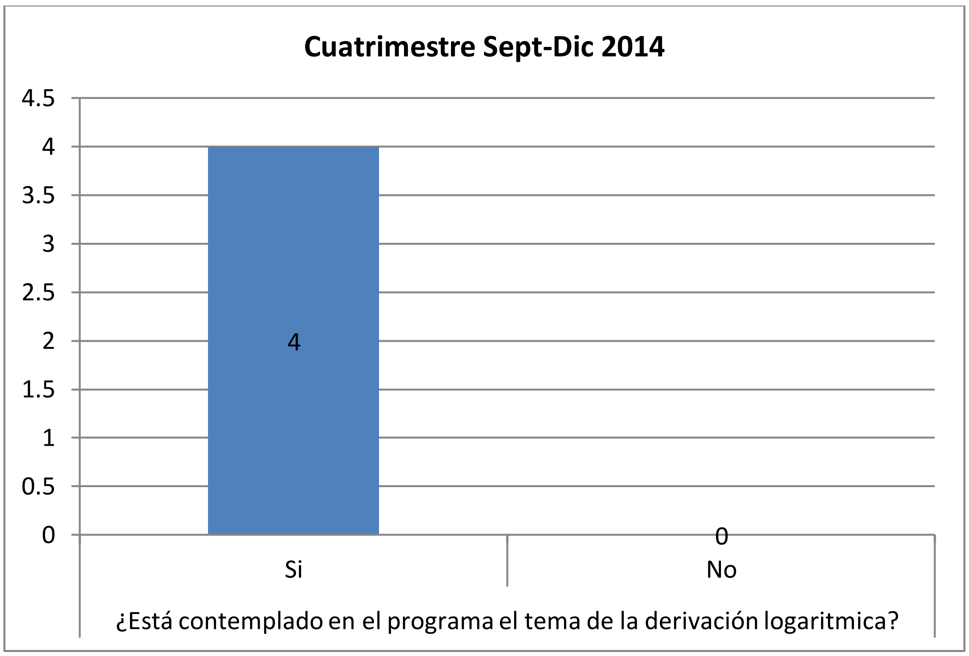


En la siguiente grafica se observa que un 30% prefiere utilizar las fórmulas de derivación en aquellas funciones que involucren cocientes, radicales y potencias. Un 35% prefiere la regla de la cadena y otro 35% prefiere utilizar el método de la derivación logarítmica. En otras palabra un 35% prefiere utilizar la derivación logarítmica en constraste con un 65% que prefiere utilizar otros métodos. Aquí se visualiza la preferencia por otros métodos de derivación en contraste con el método de derivación logarítmica.

Este instrumento de investigación también se le aplicó al docente.

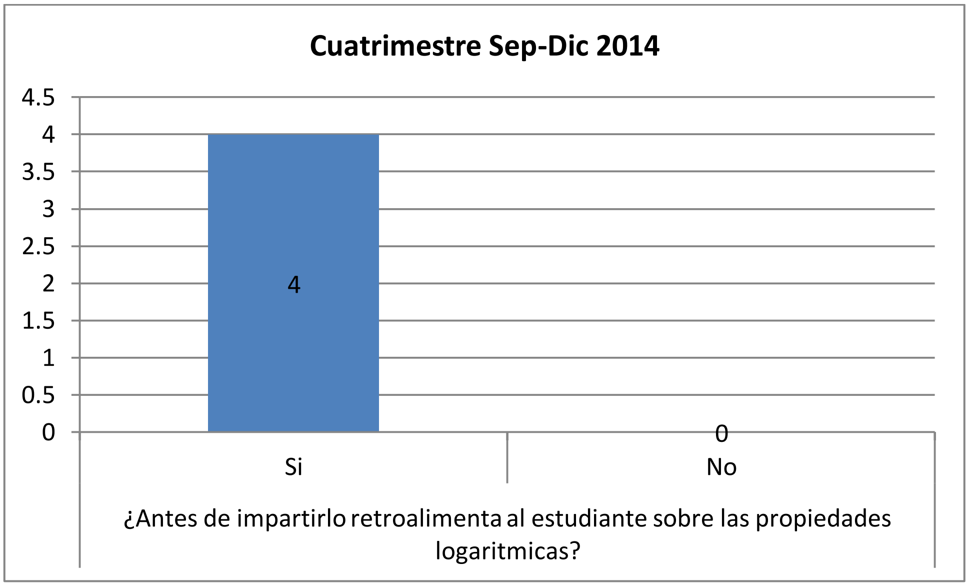
De un total de 5 grupos existentes de Cálculo II en este cuatrimestre septiembre-diciembre 2014, los cuales estaban asignados a 5 docentes, se les efectuó esta prueba diagnóstica a 4 docentes, dando los siguientes resultados:

1-Resultado primera pregunta efectuada al docente



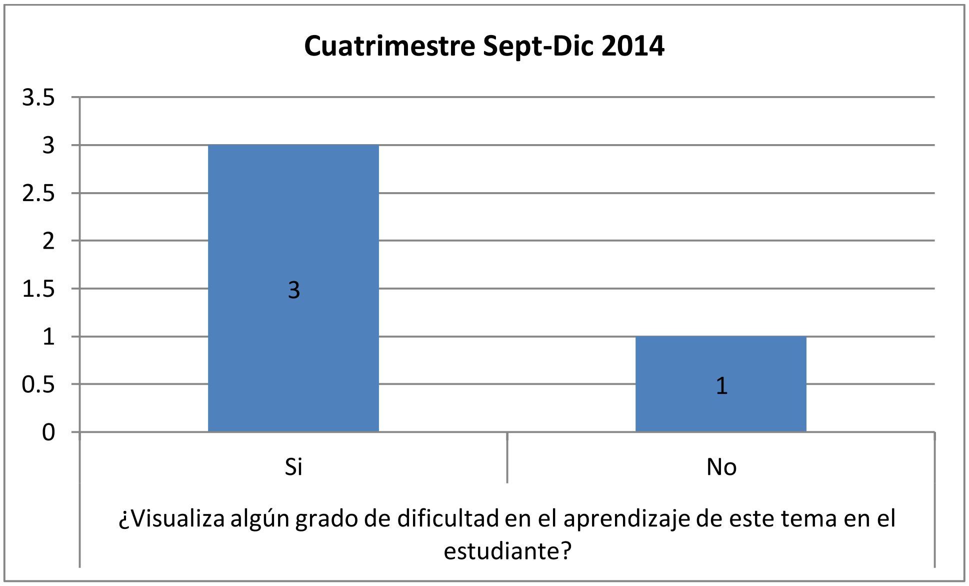
El 100% de los docentes coincidió con la respuesta. Este tema está contemplado en el programa de Cálculo II

2-Resultado segunda pregunta efectuada al docente:



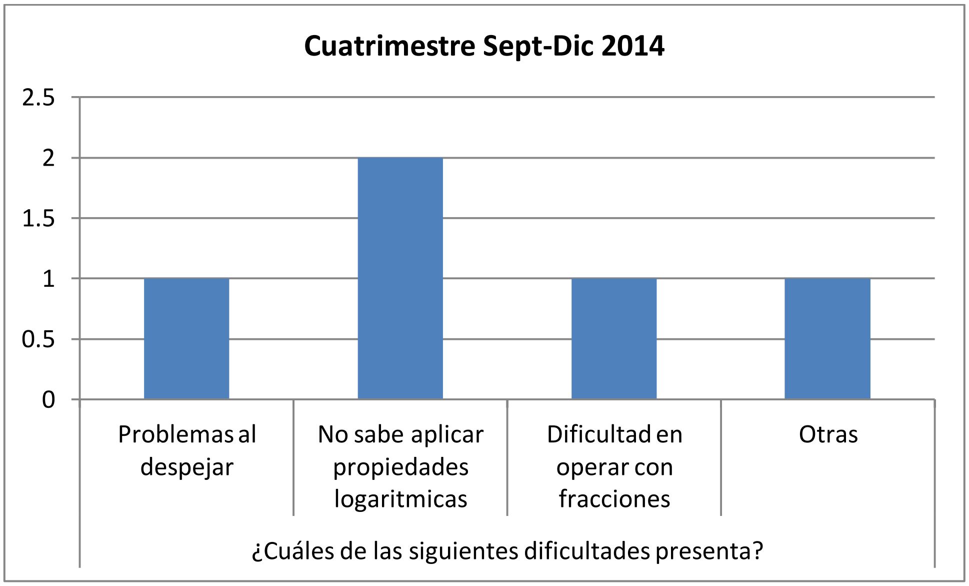
Por lo que se puede observar el 100% de los docentes retroalimenta al estudiante sobre las propiedades logarítmicas antes de impartir el tema de derivación logarítmica. Esto se hace necesario, a pesar de que el estudiante ha dado este tema en cursos anteriores. Ya que el mismo suele olvidar estos conceptos.

3-Resultado tercera pregunta efectuada al docente:



De un total de 4 docentes, tres docentes, lo que representa un 75%, visualizan algún grado de dificultad en el aprendizaje del tema de derivación logarítmica. En contraste con un (1) docente, para un 25%, el cual no visualiza ningún grado de dificultad en el aprendizaje de este tema.

4-Resultado cuarta pregunta efectuada al docente



Dentro de los problemas que visualizaron los docentes en al aprendizaje del desarrollo del tema de derivación logarítmica estuvieron:

- Problemas al despejar
- No saben aplicar las propiedades logarítmicas
- Dificultad en operar con fracciones
- Otras: No recuerdan la propiedad del logaritmo de una potencia ni la relación entre la potencia de exponente fraccionario y la raíz

Aquí se visualiza la necesidad de establecer estrategias didácticas que permitan al discente superar estos inconvenientes.

Conclusiones del Capítulo II

Mediante una metodología comparativa, en la cual se derivaron funciones utilizando las fórmulas de derivación y el método de derivación logarítmica se pudo comprobar la laboriosidad en la ejecución utilizando fórmulas de derivación.

Las posibilidades de cometer errores tanto operativos como de conocimientos se incrementan sobremanera al utilizar las fórmulas de derivación. Sobre todo cuando derivamos funciones complicadas de producto, cociente y potencia.

A través del instrumento de investigación, cuestionario, se pudo comprobar la problémica de esta investigación consistente en las grandes potencialidades de la derivación logarítmica y su limitado uso. Donde se pudo visualizar que el discente no utiliza en toda su potencialidad las propiedades logarítmicas.

El discente prefiere utilizar otros métodos tales como: Fórmulas de derivación o la regla de la cadena para resolver funciones que impliquen productos, cocientes y potencias complicadas. Ello muy a pesar de tener todas las herramientas para ejecutar estas derivaciones aplicando la derivación logarítmica.

CONCLUSIONES GENERALES

Al derivar funciones, uno de los primeros pasos que debe saber el discente es que tipo de función va a derivar. Es de fundamental importancia que el mismo posea los conocimientos necesarios que le permitan identificarlas.

La derivación de funciones complicadas que impliquen productos, cocientes y potencias suelen traerle inconvenientes al estudiante a la hora de derivarlas. Para este tipo de funciones es mucho menos laborioso aplicar el método de la derivación logarítmica, la cual conlleva la aplicación de propiedades logarítmicas. Tal como se pudo observar en el método comparativo de derivaciones de funciones expuesto en la presente investigación.

El estudiante aún presenta bastantes inconvenientes a la hora de aplicar propiedades logarítmicas, por lo que se hace necesaria una estrategia para la identificación y aplicación de la derivación de aquellas funciones que sean complicadas.

Para esto se hace necesario que el docente establezca estrategias de enseñanza-aprendizaje para la identificación y aplicación de la derivación logarítmica de funciones complicadas que le permita al discente identificar cuando aplicar o no la derivación logarítmica.

Para ello se proponen las siguientes estrategias didácticas:

1-Puesta del tema con anterioridad de manera que el estudiante al momento de la clase tenga una idea de lo que se esté tratando. De ser posible bajar archivos a la plataforma de aprendizaje de la institución con los contenidos del tema o indicarle al estudiante donde ubicar el tema a tratar de la próxima clase. De esta forma el mismo se sentirá más comprometido con la clase.

2-Planteamiento de los objetivos: Se debe plantear con claridad el objetivo del tema de derivación logarítmica. Se debe indicar hacia dónde vamos y lo que queremos al desarrollar este tema.

3-Conceptualización del tema: Indicar con la mayor nitidez posible todos los conceptos relacionados a la derivación logarítmica de funciones.

4-Retroalimentación de conocimientos previos, tales como propiedades de la potencia, propiedades de la igualdad, propiedades logarítmicas. Esta retroalimentación debe conllevar la realización de ejercicios por parte del discente.

5-Resumen final del tema, donde se expone de manera sintetizada el mismo. Realizarle un esquema o cuadro donde se expongan las propiedades logarítmicas, así como los pasos para la derivación logarítmica de funciones.

6-Exposición de ejercicios durante la clase, mostrándose una comparación entre la derivación de funciones utilizando las fórmulas de derivación y la derivación logarítmica.

7-Mantenimiento de la atención y motivación del estudiante durante la clase, involucramiento del mismo con ejercicios propuestos para realizar durante la clase, tanto individual como en grupo.

Recomendaciones:

1-Antes de iniciar con el tema de derivación de funciones, al estudiante se le retroalimente con los diferentes tipos de funciones, de manera que pueda identificarlas.

2-Se debe continuar retroalimentando al discente sobre las propiedades logarítmicas, de manera que puedan ver dichas propiedades como algo cotidiano

3-Realizar ejercicios con expresiones en las cuales se apliquen propiedades logarítmicas de forma individual y en grupo.

4-Que el estudiante identifique la cantidad de factores que tenga un producto. Aquellas que tengan más de dos factores, debe utilizar la derivación logarítmica. Igual para el caso de aquellos cocientes complicados.

5-Se le debe realizar ejercicios de derivación de funciones con cocientes complicados tanto utilizando las fórmulas de derivación como la derivación logarítmica, de manera que él pueda palpar la conveniencia del método de derivación logarítmica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Apóstol, T. (2006). Cálculo con funciones de una variable con una introducción al Álgebra Lineal, volumen #1. Barcelona, España. Editorial Reverté

2. Camacho, A. (2012). Cálculo Diferencial. Madrid, España. Ediciones Díaz de los Santos, S. A

3. Casteleiro V., J. (2006). Introducción al Análisis Matemático I. Madrid, España.ESIC editorial.

4. Diccionario Real Academia Española (RAE).(2001). Vigésima segunda edición. Madrid, España.

5. Engler A., D. M. (2005). Funciones. Santa Fe, Argentina. Ediciones UNL

6. Espinosa H., J. E.;Canals, N.;Meda, M.; Pérez F., R.; Ulín, C.´(2008) Cálculo Diferencial e Integral I. México, D.F. Editorial Reverté.

7. Ferrante,J .(2009). Análisis Matemático I. Buenos Aires, Argentina. Editorial de la Universidad Tecnológica Central

8. Ferrante, J. (2009). En Análisis Matemático que nos enseñaron nuestros maestros. Buenos Aires, Argentina. Editorial de la Universidad Tecnológica Central

9. Fleming. W.; Dewar, J. (1991). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México. Prentice Hall

10. Levin, R. (2004). Estadística para Administración y Economía, séptima edición. México. Editorial Prentice Hall

11. Mazón R., J.M. (2008). Cálculo Diferencial: Teoría y Problemas. Valencia, España. Editorial universidad de Valencia.

12. Moreno, F.J.(mayo 2003).www.mat.uson.mx/dpto./publicaciones/apuntes.

13. Prado, S.; Gómez, Q.; Zúñiga, P. (2006). Cálculo Diferencial para Ingeniería. México. Editorial Pearson Educación.

14. Purcell , E.; Varberg, D. (2010).Cálculo Diferencial e Integral. México. Editorial Pearson Prentice Hall.

15. Robayo, Y. A. (2011). Desarrollo del Concepto de la Derivada sin la Noción del Límite, trabajo de grado. Bogotá, Colombia. Fundación Universitaria Konrad Lorenz

16. Semerari, F (2011). Análisis Matemático Real. Santo Domingo

17. Sobel, M. A. (2006). Precálculo, sexta edición. México. Prentice Hall

18. Stewart, J. (2007). Precálculo. México. Editorial Thomson

19. Villa, G. B. (2011). El concepto de Derivada y sus Aplicaciones. Madrid, España. Akal ediciones.

20. Villalba, J. M. (2006). Introducción al Análisis Matemático I. Madrid, España. ESIC editorial

ANEXOS

Estimado(a) docente:

Como parte del trabajo de tesis correspondiente a la maestría en Matemática superior impartida en la universidad APEC, estamos interesados en saber su opinión con relación a la derivación logarítmica de funciones.
Le pedimos con mucho respeto que complete la información del presente cuestionario.
Muchas gracias.

INFORMACIÓN GENERAL:

1. Género a. Masculino ☐ b. Femenino ☐

2. Nombre de la institución donde imparte docencia_____________________________________

3. Materia que imparte__________________________________

Favor encierre en un círculo la respuesta que considere adecuada:

1. ¿Está contemplado en el programa el tema de la derivación logarítmica? (en caso negativo, favor obviar las restantes preguntas)

a) Si b) No

2. Antes de impartirlo retroalimenta al estudiante sobre las propiedades logarítmicas?

a) Si b) No

3. ¿Visualiza algún grado de dificultad en el aprendizaje de este tema en el estudiante? (en caso negativo favor obviar la siguiente pregunta)

a) Si b) No

4. En caso afirmativo cuales de las siguientes dificultades presenta?

a. Problemas al despejar_____

b. No sabe aplicar propiedades logarítmicas___

c. Dificultad en operar con fracciones_____

d. Otras______________

Estimado(a) estudiante:

Como parte del trabajo de tesis correspondiente a la maestría en Matemática superior impartida en la universidad APEC, estamos interesados en saber su opinión con relación a la derivación logarítmica de funciones.

Le pedimos con mucho respeto que complete la información del presente cuestionario. Muchas gracias.

INFORMACIÓN GENERAL:

1. Género a. Masculino ☐ b. Femenino ☐

2. Nombre de la institución donde estudia______________________________________

3. Periodo que cursa_______________________4.Carrera que estudia_______________________

Favor encierre en un círculo la respuesta que considere adecuada:

1. ¿Conoces las propiedades logarítmicas?

a. Si b. No

2. ¿El profesor ha explicado el tema de derivación logarítmica de funciones?

a. Si b. No

3. Cuáles de las dos opciones le resulta menos complicada al derivar la siguiente función

$f(x) = Ln\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}$, utilizando:

a. Fórmulas derivación: $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x+1}\right)}{\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{(x+1)2-2x)(1)}{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}}} = \frac{1}{3x(x+1)}$

b. Propiedades logarítmicas: $f(x) = \frac{1}{3}[\ln 2x - \ln(x+1)], f'(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{2x} - \frac{1}{x+1}\right] = \frac{1}{3x(x+1)}$

4. ¿Has utilizado el ítem 3b como una opción para derivar funciones?
a. Nunca b. Algunas veces c. Casi Siempre d. Siempre

5. En el caso de aquellas funciones que involucren cocientes, radicales y potencias prefieres derivar usando:
a. Fórmulas de derivación b. Regla de la cadena c. Derivación logarítmica

Tabla de derivadas

Función	Derivada	Ejemplos	
Constante			
y=k	*y'=0*	*y=8*	*y'=0*
Identidad			
y=x	*y'=1*	*y=x*	*y'=1*
Funciones potenciales			
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$	$y = (2x^2+1)^3$	$y' = 3(2x^2+1)^2 \cdot 4x$
$y = \dfrac{1}{u^m}$	$y' = -\dfrac{mu'}{u^{m+1}}$	$y = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$	$y' = -\dfrac{6}{(2x+1)^4}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \dfrac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}}$
Funciones exponenciales			
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^u$	$y' = u'a^u La$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} L5$
Funciones logarítmicas			
$y = Lu$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = L(x^2+7x)$	$y' = \dfrac{2x+7}{x^2+7x}$
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$	$y = \log_2(5x+7)$	$y' = \dfrac{5}{5x+7}\log_2 e$
Funciones trigonométricas			
$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u'\cos u$	$y = \operatorname{sen} 5x$	$y' = 5\cos 5x$
$y = \cos u$	$y' = -u'\operatorname{sen} u$	$y = \cos 3x^2$	$y' = -6x\,sen3x^2$

$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \sec^2 u$	$y = \operatorname{tg} 7x$	$y' = 7\sec^2 7x$
$y = \cot g u$	$y' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$	$y = \cot g\,(4x+5)$	$y' = -4 \operatorname{cosec}^2 (4x+5)$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \cdot \operatorname{tg} u$	$y = \sec x^3$	$y' = 3x^2 \sec x^3 \operatorname{tg} x^3$
$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -u' \operatorname{cosec} u \cot g u$	$y = \operatorname{cosec} x^2$	$y' = -2x \operatorname{cosec} x^2 \cot g x^2$
$y = \operatorname{arcsen} u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \operatorname{arcsen} x^2$	$y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$y = \arccos u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arccos 3x$	$y' = \dfrac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	$y = \operatorname{arctg} 3x$	$y' = \dfrac{3}{1+9x^2}$
Derivadas de sumas, restas, productos y cocientes de funciones			
$y = ku$	$y' = ku'$	$y = 3x^5$	$y' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = 3x^2 - 2x + 5$	$y' = 6x - 2$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = x^2 \cos x$	$y' = 2x \cos x + x^2(-\operatorname{sen} x)$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \dfrac{2x^2}{x^3 - 1}$	$y' = \dfrac{4x(x^3-1) - 2x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2}$

DERIVADAS DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS COMPUESTAS E HIPERBÓLICAS INVERSAS COMPUESTAS

Función	Derivada
y= senh u	y'= u' cosh u
y= cosh u	y'= u' senh u
y= tanh u	y'= u' sech^2 u
y= cotgh u	y'= -u' csch^2 u
y= csch u	y'= -u' csch u cotgh u
y= sech u	y'= -u' sech u tanh u
y= arc senh u	$y' = u' \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$
y= arc cosh u	$y' = u' \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$
y= arc tanh u	$y' = u' \frac{1}{1-u^2}$
y= arc coth u	$y' = u' \frac{-1}{u^2-1}$
y= arc sech u	$y' = u' \frac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{1-u^2}}$
y= arc csch u	$y' = u' \frac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}}$