



**VICERRECTORÍA DE ESTUDIOS DE POSGRADO
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA SUPERIOR**

**ESTUDIO DE LA PROBLEMÁTICA DE LOS NÚMEROS PRIMOS
Y LA HIPOTESIS DE RIEMANN**

Sustentante

Saúl Martínez de la Rosa

20130852

Asesor

MSc. Francesco Semerari

Santo Domingo, R.D.

Diciembre del 2014

“Los matemáticos han intentado en vano, hasta la actualidad,
descubrir algún orden en la secuencia de números primos, y tenemos
razones para creer que se trata de un misterio que la mente humana
nunca resolverá.”

Leonhard Euler, matemático suizo

Dedicatoria

Le dedico esta investigación a mis dos hijos: Ysaac y Sofia, que aunque esta última aún está por nacer, ya forma parte de mi vida, y quienes me producen mucha alegría y satisfacción. Dos grandes bendiciones para mí.

A mis futuros estudiantes de Análisis Funcional y de Teoría de Números.

Agradecimientos

A Jehová mi Dios, quien siempre me ha dado lo necesario para lograr mis metas y a quien espero no defraudar nunca.

A Sarah Samboy, mi amada esposa. Esa persona que está conmigo en todo lo que hago y me ayuda con entereza a cumplir con mis responsabilidades. Gracias de verdad, por existir y tenerme tanta paciencia en todo este camino.

A mis padres Silvia y Santiago que me dieron desde mi infancia: su cariño y atención y sobre todo su apoyo incondicional.

A mi asesor Francesco Semerari, porque desde el principio de este curso ha creído en mí. Además he visto el esfuerzo que ha hecho para ayudarnos.

Gracias también a mis compañeros de trabajo y de estudio: la gente de San Cristóbal. En honor a la verdad, sin su ayuda sin reservas no hubiese completado este programa de maestría.

A mi profesor Marino Brito Guillén. Quien cuenta con toda mi admiración y respeto. Le agradezco muchísimo por poner fe en mí cuando estuve lleno de muchas sombras en vez de claridades.

A mi profe Wendy Heredia que siempre me ha animado a seguir adelante y de quien tengo mucho que aprender.

Agradecer también a todos los matemáticos que con sus publicaciones aportaron para esta investigación

RESUMEN

En esta investigación se aborda la problemática de los números primos, haciendo un énfasis en las ideas de la hipótesis de Riemann. ¿Cómo han encarado los matemáticos a este monstruo? En este trabajo se explica claramente cómo han hecho cantar a los números primos. Por ejemplo, Gauss le deja a la humanidad un legado por sentar las bases para el teorema fundamental de los números primos. Claro está, antes de Gauss otros habían planteado una función para calcular la cantidad de números primos menores que un número n . El teorema que exhiben como un trofeo los matemáticos y que sin lugar a dudas es uno de los aportes más significativo de la teoría de números *establece con buena aproximación la cantidad $\pi(n)$ de números primos menores o iguales que n* . La Función Zeta de Riemann $\zeta(s)$ está definida para valores complejos con la parte real mayor que uno, por la serie de Dirichlet: .Esta serie es convergente y define una función que es analítica en esta región. Riemann se percató de que la Función Zeta puede extenderse de manera única por continuación analítica a una función homomorfa en el plano complejo con un único polo en $s = 1$. Esta misma es la función que está considerada en la hipótesis de Riemann. Se trata solamente de una hipótesis, ya que son doscientos años que esta hipótesis está a la espera de ser demostrada, constituyendo uno de los llamados problemas irresueltos del siglo.

INDICE

RESUMEN	iv
INTRODUCCIÓN	7
La Hipótesis	9
Las tareas de esta investigación	9
Marco de referencia teórico, histórico-lógico.	10
Metodología de la investigación	11
CAPITULO I: MARCO HISTÓRICO-LÓGICO,	13
1.1 Marco teórico	13
1.2 Marco Histórico.....	14
1.2.1 Recorridos de la Hipótesis de Riemann.....	16
1.2.2 Georg Friedrich Bernhard Riemann	20
1.2.3 David Hilbert	24
1.3 MARCO CONCEPTUAL	28
1.3.1 Los números Primos	28
1.3.2 El teorema fundamental de la aritmética	29
1.3.3 Letargo de los Números Primos.....	31
1.3.4 La infinitud de los Números Primos	32
1.3.5 Números Primos Gemelos	34
1.3.6. Tópicos de Números Complejos.....	36
Módulo y argumento de un número complejo.....	37
1.3.7 Serie de Potencia	38
1.3.8 Desarrollo en Serie de Taylor	38

1.3.9 Serie de Fourier	44
1.3.10 Función Holomorfa.....	49
1.3.11 Ceros y singularidades aisladas.	50
CAPITULO II. LA FUNCIÓN ZETA, LOS NUMEROS PRIMOS Y LA HIPOTESIS DE RIEMANN.....	52
2.1 La Función Zeta de Riemann.....	52
2.1.1 Serie Armónica.....	52
2.1.2 Extensión de la Función Zeta de Riemann	55
2.1.3 La Función Zeta de Riemann y Los Números primos	58
2.2.1 Distribución de los números primos.....	63
2.2.3 Análisis sobre de la Hipótesis de la Riemann (HR)	66
CAPITULO III ACTUALIDAD DE LOS NÚMEROS PRIMOS Y LA HIPOTESIS DE REIMANN	73
3.1 ¿Qué consecuencia tendría la demostración o refutación de HR y la problemática de los Números Primos?.....	73
3.2 El espectro del Riemannio.....	74
3.3 Relación de la Función Zeta de Riemann y La Electrodinámica Cuántica	75
CONCLUSIONES.....	79
RECOMENDACIONES	81
BIBLIOGRAFÍA	83
ANEXO.....	85
Tabla de los números primos estudiadas por Gauss.....	856

INTRODUCCIÓN

Es y ha sido, sin lugar a dudas, uno de los más complicados desafíos de las matemáticas, llevando a un nivel de apasionamiento excesivo a las mentes más brillantes de los siglos pasados. El autor se refiere a *la problemática de los números primos, su relación con la función de Riemann y su trascendencia al campo de las ciencias*. Se anticipa que no se abriga esperanza alguna en esta obra de resolver el enigma de los números primos y mucho menos la Hipótesis de Riemann. Mas, es su honor expresar en unas cuantas líneas los asombrosos descubrimientos de matemáticos de la altura de Euclides, Euler, Gauss, Riemann, Hilbert, Turint, entre otros, que han hecho de forma extraordinaria cambiar la manera de pensar de la humanidad.

El **problema científico** que está en la base de esta investigación es: esbozar de forma lógica y precisa la problemática de los números primos y su relación con la hipótesis de Riemann.

¿Qué mueve a hacer un abordaje de este tema? Con frecuencia algunas cuestiones en matemática se dejan abismadas, poco tratadas. Es el caso que en los últimos años se ha dimitido muy al margen en los programas y propuestas de estudios de las universidades del país en la carrera de matemática pura (y aún más en educación, mención matemática), el estudio de la teoría de número y, muy específicamente, el problema universal de los números primos. Esto ha dejado grandes lagunas en los profesionales de esta área del saber. Por tanto, está demás decir que en la República Dominicana hay muy pocos profesores de matemática que comprenden la teoría sobre los números primos y mucho menos la evolución histórica del desarrollo del pensamiento abstracto en busca de la solución al problema de

este problema y la inconmensurable importancia de la aplicación de estos en la seguridad informática.

En opinión del autor, esto debido, en parte a la forma poco atractiva y compleja en la que se ha abordado este asunto. Además, la mayoría de los autores en sus libros o en sus trabajos de investigación de teoría de números son muy directos, creando así un abismo entre un concepto y otro. De ahí el **objetivo** de esta investigación, a saber, describir cronológicamente algunas aportaciones puntuales de la matemática de estos dos siglos pasados que marcaron significativamente la comprensión del comportamiento de los números primos. Presentar de manera sencilla y elegante el desarrollo del pensamiento matemático en la búsqueda de una respuesta satisfactoria. Aunque bien es cierto que esta obra es de corte histórico, es la intención plantear la discusión de la actualidad de los números primos y algunas consecuencias mediáticas de una posible solución de su problema

La presente investigación tiene como **objeto** de estudio la teoría de números, delimitando el **campo de acción** en el estudio del problema de los números primos y la hipótesis de Riemann.

Pero, ¿cuál es el problema de los números primos? Para responder a esta pregunta, suponga que se pide hacer un ejercicio mental (sugerido en el libro: *“El Universo de los Números”*). Intente enlistar los números naturales menores que diez ¿Verdad que resulta fácil saber cuál es el siguiente número conociendo el anterior? La respuesta es bastante obvia. Trate ahora de hacer lo mismo con los números primos, es decir, enlistar los primeros números primos menores que cien (recuerde que un número primo es aquel que tiene exactamente dos divisores: el uno y el mismo número). Aunque no resulte tan fácil, aun así se puede lograr, de hecho, ya Eratóstenes (275-194 a.C.) dejó un legado con una criba que él mismo inventó y que lleva su

mismo nombre. El caso es, que se vuelve cada vez más difícil encontrar el siguiente número a medida que se va engrosando la lista.

Bueno, precisamente entre las muchas cuestiones en las que están vinculados estos asombrosos números, una de las más interesantes es su distribución entre los números enteros. ¿Cuántos primos hay entre un primo y otro? ¿Se diferencian de los compuestos de una forma meramente al azar? ¿O existe alguna regla, algún patrón discernible con el que ocurren los números primos? ¿Son infinitos o finitos? Entre otras cosas, estas interrogantes se contestarán en el discurrir de este trabajo.

La Hipótesis de la presente investigación consiste en que al analizar y caracterizar de manera clara y precisa la temática de los números primos, se contribuye a la búsqueda de un conocimiento profundo de un problema que todavía no ha encontrado solución en el arco de los últimos doscientos años.

Las Tareas de Esta Investigación

Más concretamente en este estudio se propone:

1. Caracterizar el contexto histórico del problema de los números primos.
2. Analizar brevemente algunos conceptos complejos.
3. Estudiar la conjetura de los números primos gemelos y la generalización de Polignac.
4. Analizar brevemente los aspectos generales sobre las series: serie de potencia, de Taylor, Maclaury y Fourier, en el campo complejo.
5. Analizar la Función Zeta de Riemann.
6. Analizar la distribución total de números primos en el plano complejo.
7. Establecer formalmente la relación entre la Función Zeta de Riemann y los números primos.
8. Estudiar el Teorema de los Números Primos

Marco de Referencia Teórico, Histórico-Lógico

Se ha desarrollado una serie de trabajos investigativos que guardan cierta relación con el tema de investigación. De hecho, es mucho lo que se ha escrito en foros, revistas científicas, en debates, en congresos matemáticos. Muchas de estas aportaciones, que también forman parte de los antecedentes que se tomaron como base referencial para desarrollar este trabajo, como son:

- 1) *La Función Zeta de Riemann* (Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **57**: 67–87, (2002). El cual tiene el objetivo de presentar un breve esbozo de algunas de las propiedades relativas a la denominada Función Zeta de Riemann y su relación con ciertos problemas de la teoría de los números.
- 2) *La Música de los Números Primos*. Interesante documental narrativo que muestra el desafío que han representado para los matemáticos los números primos y su trascendencia a la informática y las ciencias económicas. En el mismo, se presenta la participación de matemáticos como Euler, Gauss y el mismo Riemann, en búsqueda de descifrar el lenguaje o música (como le llaman en el vídeo) de los números primos. (Marcus du Sautoy, 2007)
- 3) *Los Ceros de las Sumas Parciales de la Función Zeta de Riemann* (1º Congreso Paraguayo de Matemática Pura y Aplicada. San Lorenzo (Paraguay), 03-05 Nov. 2011. En él se explica en unas cuantas páginas lo que Riemann quiso decir en su famosa conjetura.
- 4) *El Universo de las Matemáticas*. William Dunham (1995). Presenta los grandes teoremas matemáticos, enigmas, controversias y misterios irresolubles hasta ahora que discurren el fascinante mundo de las matemáticas en su contexto.

Marco Conceptual

Los números primos y la hipótesis de Riemann en su contexto conceptual, que se tratarán a continuación. Es cierto que no es posible mencionar todo lo prerequisites necesarios para desarrollar esta tesis, pues se llevaría varios compendios y enciclopedias. Sin embargo, eso se tratan algunos conceptos previos que se tendrán en cuenta como base para esta discusión, los cuales se enlistan a continuación:

- Los números primos y gemelos
- Algunas definiciones puntuales de números complejos
- Desarrollo Serie de potencia.
- Desarrollo Serie de Taylor.
- Desarrollo Serie de Fourier para complejo.
- Función analítica. Ceros y polos de una función analítica.

Metodología de la Investigación

En el proceso de investigación se utiliza una metodología documental y analítica.

Documental: porque está fundamentada en la revisión de diversas bibliografías de actualidad que argumentan sobre la temática de los números primos.

Analítica: Se profundiza en los alcances de una posible solución de la hipótesis de Riemann o una refutación de la misma.

Estructuración de los Capítulos

La presente investigación está estructurada en tres capítulos descritos de inmediato:

En el **Capítulo I** se muestra el marco históricos-lógico conceptual teórico. Una cronología desde Euclides hasta nuestros días, así como los aspectos generales sobre los números primos. Una breve biografía de Bernard Riemann como principal actor de esta discusión. Al mismo tiempo se desarrolla de forma esquemática un breve repaso de las series de Taylor y Fourier. No se estima necesario presentar un discurso amplio de sucesiones y series, sino aspectos elementales.

- Breve biografía de Bernard Riemann.
- Historia de los números primos.
- Breve repaso de los números complejos.
- Generalidades sobre los números primos.
- Breve repaso de las series de Taylor y Fourier

En el **Capítulo II** se propone estudiar la conjetura de los números primos gemelos y el teorema de los números primos. Analizar la distribución total de números primos en el plano complejo. Establecer formalmente la relación entre la Función Zeta de Riemann y los números primos.

En el **Capítulo III** se está induciendo al lector a ver la actualidad de los números primos. Además se presenta un breve análisis sobre las aplicaciones de la teoría de número a las ciencias y algunas consecuencias de la insinuación siquiera a la demostración de la famosa hipótesis de Riemann.

CAPITULO I: MARCO HISTÓRICO-LÓGICO, CONCEPTUAL Y TEÓRICO

A groso modo, ya en la introducción se ha mencionado la finalidad de este primer capítulo y en realidad lo que se persigue. En un primer momento, es mostrar los antecedentes históricos de manera cronológica desde Euclides hasta nuestros días, Haciendo un énfasis bien marcado en el desarrollo de la famosa hipótesis de Riemann. Así como en algunos aspectos generales sobre los números primos. Luego se estudian algunas series importantes.

1.1 Marco Teórico

Como se ha dicho, este tema ha acaparado la atención de las mentes más brillantes en el mundo de las matemáticas, por tanto, se ha escrito bastante sobre el mismo. Algunas de estas investigaciones más actuales han contribuido de manera significativa a la composición de este trabajo, principalmente a la secuenciación de los temas. Por ejemplo, la revista *Real Academia de Ciencias* en su artículo “*La Función Zeta de Riemann*” presenta un breve esbozo de algunas de las propiedades relativas a la denominada Función Zeta de Riemann y su relación con ciertos problemas de la teoría de los números.(zaragosa, 2002)

Por su parte, encontramos una elegante descripción de esta problemática: *La música de los números primos*. Interesante documental narrativo que muestra el desafío que ha representado para los matemáticos los números primos y su trascendencia a la informática y las ciencias económicas. En el mismo, se presenta la participación de matemáticos como Euler, Gauss y el

mismo Riemann en búsqueda de descifrar el lenguaje o música (como le llaman en el vídeo) de los números primos (Marcus du Sautoy, 2007).

Igualmente en el 2011 se sostuvo en Paraguay el primer congreso en matemática pura, donde se disertó la conferencia “*Los Ceros de las Sumas Parciales de la Función Zeta de Riemann*”. Se explica en unas cuantas páginas lo que Riemann quiso decir en su famosa conjetura con un cierto nivel de profundización (internet, 2011).

William Dunham hace una clara exposición de la historia de la matemática en su libro “*El Universo de las Matemáticas*”, donde hace desfilar los más importantes, en opinión del autor, teoremas matemáticos, enigmas, controversias y misterios irresolubles hasta ahora que discurren el fascinante mundo de las matemáticas en su contexto (Dunham, William, 1995).

Desde luego que se han desarrollado muchas más investigaciones inminentemente relacionadas con el presente trabajo. No obstante, se eligen aquellos que el autor considera que guardan mayor afinidad con sus objetivos planteados al principio.

1.2 Marco Histórico

Los números primos surgen conjuntamente con los números naturales ¿Por qué? Es sabido que los números naturales se presentan por la necesidad de contar y, como los números primos son de hecho, naturales por definición, también llegan de la misma forma.

Los números primos y sus propiedades fueron estudiados a profundidad y de manera consecencial por los matemáticos de la antigua Grecia. Marcus, menciona en su libro “*La Música de los Números Primos*”, que los matemáticos de la Escuela Pitagórica (500 a. C. a 300 a. C.) estaban

intensamente interesados en los números primos por su misticismo y sus propiedades número-lógicas (Marcus du Sautoy, 2003). Mostraron gran interés en dos casos muy simpáticos de los números primos: números perfectos y amigables.

Por su parte, Euclides, uno de los matemáticos y geómetras de todos los tiempos, había probado de manera muy especial algunos resultados de gran valor, a saber la infinitud de los números primos. La demostración que Euclides plantea se muestra en el primer capítulo de este trabajo. La misma es una de las primeras demostraciones, que dicho sea de paso, conocida hasta el día de hoy, en la que Euclides utiliza el método del absurdo para establecer un resultado (Marcus du Sautoy, 2003).

Es a Euclides también que se atribuye la demostración del Teorema Fundamental de Aritmética: “*Todo entero puede ser escrito como un producto único de primos*”. Euclides también demostró que si el número $2n - 1$ es primo, entonces el número $2n-1(2n- 1)$ es un número perfecto. El matemático Euler (más tarde, en 1747) pudo demostrar que todos, aún los números perfectos, tienen esta forma. Hasta el día de hoy no se sabe si existe algún número perfecto que sea impar.

Cerca del 200 a. C. el griego Eratóstenes ideó un algoritmo para calcular números primos llamado el Tamiz de Eratóstenes. Se da luego un gran vacío en la historia de los números primos que es usualmente llamado la Edad Oscura (Dunham, William, 1995).

1.2.1 Recorridos de la Hipótesis de Riemann

Todo comienza con la Función Z de Euler en 1737, pues éste demostró que la $\sum \frac{1}{n}$ serie armónica, que se analiza y se demuestra más adelante, cuando n es mayor que 1 es convergente y, además de eso, demostró que la serie coincide con el producto llamado de Euler. Entre los matemáticos se dice que sus demostraciones no son exactamente como les gustan ahora, era otra época, sin embargo él reconquistó bastante el sentido del rigor. Aun así, está claro que algunas de sus demostraciones eran un poco formales.

Ahora bien, retrocediendo unos 20 siglos antes, se encuentran los elementos de Euclides, mencionado arriba, donde se fijan los axiomas de la geometría con categoría de verdades evidentes. De sus éstas se deducen unos 500 teoremas, dedicados fundamentalmente a describir o comprender lo que es el mundo físico y, aparte de eso, se hallan cosas muy importantes, que son muchas propiedades de los números, algunas de ellas explicadas con grandísima sencillez, como por ejemplo, la existencia de infinitos números primos (Dunham, William, 1995). En la presente obra se provee la demostración un tanto parecida como la pensó Euclides.

Dejando a Euclides unos instantes, se hace la invitación a pensar en la siguiente cuestión: ¿Hay alguna posibilidad de encontrar una ley general que lleve a los números primos? Resultan muy ciertas las palabras de Euler, que con una elocuencia exquisita pronunció: *“Hay algunos misterios que la mente humana no penetrará jamás; para convencernos basta con que echemos un vistazo a las tablas de números primos y observaremos que en ellas no hay ni orden ni ley. Eso lo debemos a que bastantes quisieran sacar, si no todos los números primos, por lo menos muchos números primos”* (Euler, 1751).

Fermat, que era bastante aficionado a incluir cosas, en algunos casos asintió bien y otras un poco menos bien. Él dijo que los números primos eran de dos formas: una era de la forma $4n+1$ y otra $4n-1$. Claro que esto no viene a resolver el problema de encontrar una sucesión de primos, por la sencilla razón de que no se sabe que elección de n hacer para obtener el siguiente primo. Con todo, Fermat creyó erróneamente que $2^{2^n} + 1$ sería siempre un número primo, ¿Por qué lo creyó? Porque los 4 primeros valores de esa fórmula son los primos 5, 17, 257 y 65537, pero llegó Euler y éste demostró $2^{2^5} + 1$ es un número de 10 cifras que es múltiplo de 641. De todas formas, lo de Fermat lo tomó un gran genio como Gauss y le dio una rotación increíble, porque Gauss descubrió que si el número n es $2^{2^n} + 1$, si ese número n es primo entonces se puede construir un polígono regular usando regla y compás; la construcción con regla y compás del polígono de 17^2 la revisó Gauss, no con 17 años, sino con 19 años, y, además, entonces escribió que las matemáticas es la reina de las ciencias y que la aritmética es la reina de las matemáticas.

Otro que también tuvo mucho interés en conseguir muchos números primos fue el monje Marin Mersenne. En un libro llamado *Conjunctata Físico-Matemática*, también sin demostración, afirmó que $2^n - 1$ para todo $n = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 31, 67, 127$ y 257 . Para ese entonces, desde luego, cuando él hizo esta afirmación, nadie podía comprobar si $2^{257} - 1$ era un número primo o no.

Posteriormente, en 1876, Edward Lucas ideó un método para averiguar cuándo un número $2^n - 1$ era uno primo. Ese método lo perfeccionó luego Lambert en 1930 y consecuencia de eso, pues resulta que lo que afirmó Mersenne era falso para el 67 y para el 257 y además se le deja el 61, el 89 y el 107. Hoy día, en opinión del autor, números de la fórmula 2 elevado a

números n que sean primos se conocen 47 y el número 47 es el número que hay ahí, 2 elevado a 43,112609-1.

Si se entra en materia, hay tres figuras impresionantes en este tema que llaman la atención, que es otra vez Gauss, Chevyshev y Riemann. El famoso teorema de los números primos, que lo que pretende es contar la cantidad de números primos que hay menores que n , el primer resultado es de Gauss, con la famosa fórmula $\frac{x}{\ln x}$, esta fórmula la sacó en 1792 y si restamos parece que tenía 15 años. Según todas las crónicas, la culpa de esa fórmula la tiene una tabla de logaritmos que le regalaron, que detrás tenía un listado de números primos y entonces su capacidad de observación, que parece que no era la de un niño de 15 años, le llevó a darse cuenta que en el partido logaritmo de n no se lleva mucho de la cantidad de números primos menores que n . Luego de eso, pocos años después tenía otra fórmula: la famosa fórmula del logaritmo integral, pero la cosa más curiosa es que la fórmula de logaritmo integral no la comunicó hasta 1849, que se la comunicó a Johann Encke, que era un astrónomo, la noche de Navidad de ese año, y, claro Gauss tenía 72 años exactamente y, además, conjeturaba que en porcentaje la diferencia entre el número de números primos y el logaritmo integral iba decreciendo a medida que aumentaba n . Él lo conjeturaba porque n igual a 10 elevado a 6 la diferencia era el 0,17%, en tanto que para 10 elevado a 9, la diferencia se reducía a 3 milésimas por 100.

Hay muchas opiniones en cuanto a por qué tardó 57 años en comunicar esa fórmula. Hay quien dice que es porque en Gauss yace la revolución de la demostración, es decir, para Gauss nada tiene valor si no tiene una demostración totalmente rigurosa. De todas formas, él supo conjugar su pasión de la demostración con no ahogar la intuición, porque como muy bien decía Halamard: el objeto del rigor matemático es sancionar y legitimar las

conquistas de la intuición. Pero parece ser que la causa real de tanto retraso en comunicar ese descubrimiento no va por ahí, sino va, porque cuando el escribió las *Desquisiciones Aritméticas* por la Academia de París lo valoró como un libro oscuro y denso, probablemente como consecuencia de que la Revolución Francesa había impuesto que el progreso de la matemática debía de orientarse a la prosperidad del Estado. Ese principio se incrementó en la época napoleónica que regalado a la matemática como un instrumento para el desarrollo de sus horizontes aplicado a militares, solo así es posible entender lo que escribió el director del *École Polytechnique* de París, de Cauchy. Exageraba claramente con la enseñanza de la matemática pura del *École* y con una motivada extravagancia que era dañina para las demás disciplinas. Pese a eso, Francia no consiguió ahogar a los matemáticos puros y salieron matemáticos excelentes como, por ejemplo, Adrien Marie-Legendre.

Legendre intentó mejorar la primera estimación de Gauss y de ahí la corrección del denominador y lo mejoró un poquito, pero su fórmula no mejoró en lo absoluto la del logaritmo integral, porque para $n = 10$ elevado a 16 el error que da la fórmula integral de Gauss, es un millón de veces menor que el error que da la fórmula que da Legendre.

En otro orden, un eminente ruso, también de la Academia de Leningrado, Chebyshev, tuvo unas aportaciones realmente impresionantes, es decir, un año antes de la comunicación de Gauss a Encke de su fórmula, o sea, el 24 de mayo de 1848, en la Academia de San Petesburgo, dio una primera memoria sobre la distribución de números primos que se publicó en 1850. Realmente ahí está el primer estudio analítico de la teoría de números y ese primer estudio de $\pi(n)$ por métodos analíticos, él tomó logaritmos o la Función Z, obtuvo la expresión que vemos aquí, es decir que esa expresión

lo que venía a decir era lo siguiente: que si existía una representación de $\pi(n)$ debía ser de esa forma. Logró a partir del logaritmo integral de Gauss un método completamente diferente. Y en un segundo artículo consiguió resolver, más o menos la conjetura. La historia continua con Riemann.

1.2.2 Georg Friedrich Bernhard Riemann

Riemann nació en 1826, era hijo de un pastor protestante, y al parecer su principal ambición era, al igual que su padre, ser pastor luterano. En 1846 ingresó en la Universidad de Gotinga, que abandonó un año después para trasladarse a la de Berlín y estudiar bajo la tutela de, entre otros, Jakob Steiner, Carl Gustav Jacobi y Peter Gustav Lejeune Dirichlet, que ejerció una gran influencia sobre él.

Su carrera se interrumpió por la revolución de 1848, durante la cual sirvió al rey de Prusia. En 1851 se doctoró en Gotinga con una tesis que fue muy elogiada por Carl Friedrich Gauss. En ella Riemann estudió la teoría de las variables complejas y, en particular, lo que hoy se denominan superficies de Riemann, e introdujo en la misma los métodos topológicos (Miguel, G., 2012).

Las obras de Bernhard Riemann, pese a su número reducido, tienen todo un valor fundamental. En su corta vida contribuyó a muchísimas ramas de las matemáticas: integrales de Riemann, aproximación de Riemann, método de Riemann para series trigonométricas, matrices de Riemann de la teoría de funciones abelianas, Funciones Zeta de Riemann, hipótesis de Riemann, teorema de Riemann-Roch, lema de Riemann-Lebesgue, integrales de Riemann-Liouville de orden fraccional, entre otras cosas. Pese a todo esto, era muy humilde y tímido, este hecho se desprende de la carta que le escribe a su padre estando en Gotinga, refiriéndose a Dirichlet:

“Dirichlet menciona; Riemann ha pasado dos horas conmigo. Me dio sus notas, que necesitaba para la redacción de mi habilitación, y que están tan completas que me facilitan mucho el trabajo. En otro caso habría tenido que buscar largo tiempo en la Biblioteca algunas cosas. También ha revisado mi disertación conmigo y sobre todo ha sido muy amable, como apenas podría esperar con la distancia tan grande que hay entre nosotros. Espero que no se olvide de mí más adelante.”(Riemann, 1852).

Fue a Gotinga, porque allí era posible estudiar teología y filosofía, pero también estaba Gauss y entonces se pasó totalmente a estudiar matemáticas. Tuvo una suerte adicional, y es que conoció una época en Alemania en la que se estaba potenciando mucho el saber por el saber, en el cual había un ministro llamado Humbolt que influía mucho. En ese momento la posición científica en Alemania era muy diferente la posición científica en Francia. Fundaron nuevos institutos con profesorado muy universitario y en una secundaria de Luxemburgo cayó Riemann y su director que era Smarphus y este se dio cuenta de que Riemann no era nada normal, tenía unas cualidades muy excepcionales y le dio paso a la biblioteca y allí encontró un libro maravilloso: la Teoría de Números de Legendre y sus casi 900 páginas las devoró en unas pocas semanas (Guzmán, 2012).

A partir de ahí, Riemann se traslada a Berlín, donde conoce a Jacobi, Steiner y Legendre y allí se familiariza con dos elementos que luego va a adjuntar, es decir, por una parte la utilización por Disler de la Función Z de Euler para probar que si a y b son primos entre sí, la producción aritmética $a+b, n$ contiene infinito números primos, mejorando la intuición de Fermat, de que $1+p^n$ al variar n cuando p es primo, también tiene infinitos números primos, lo de Fermat es un caso particular, sin demostración, y, por otra parte, le pasa algo similar con los números de Legendre y es que empieza a conocer la variable compleja que Cauchy estaba publicando en Constrandis.

Riemann se emocionó con la obra de Cauchy y sus palabras fueron: “Esta es la nueva matemática”. Volvió a Gotinga en 1849, en el mismo año que en Gauss comunicó su fórmula integral a Engel, pero él no estaba preocupado por la teoría de números, sino por la variable compleja. En 1851 presentó su tesis doctoral, que Gauss la valoró como un trabajo propio de una mente creativa, activa, genuinamente matemática y de una originalidad magníficamente fértil.

Los años posteriores fueron muy malos porque se ganaba la vida dando clases particulares. Su situación mejoró un poquito cuando un físico eminente, Bebert, lo contrató como ayudante. Bebert, una de las cosas más notable que hizo fue la línea telegráfica entre su laboratorio y el observatorio de Gauss y profetizó que pronto el globo terráqueo estaría cubierta de rueda de hilos telegráficos que prestaría servicios comparables a los del sistema nervioso en el cuerpo humano.

En 1854 Riemann presenta la tesis de Habilitación, la aceleró un poquito porque le preocupaba el estado de salud del anciano Gauss, que aun pudo oír las ideas de Riemann sobre geometría y sus relaciones con la física, originadas por su colaboración con Bebert. Riemann estaba absolutamente convencido de que con matemáticas se podía contestar muchas de las preguntas fundamentales de física. Un año después muere Gauss y le sucede Disler quien ya en Berlin había conocido a Riemann y además le estimaba muchísimo, tanto por la originalidad de su trabajo como por su modestia.

Disler lo tuvo muy complicado para poder sacar a Riemann de la biblioteca, pero cuando lo sacó trató de darle su visión sobre la teoría de números. Esto es la hipótesis de Riemann, que aún no se sabe si es verdad o no, lo que sí se sabe es que hay muchas propiedades equivalentes a la hipótesis de

Riemann. A parte de eso, dio la cantidad de números primos y esos le llevó a dar la impresión de que el logaritmo integral de Gauss, parece que es mayor que la cantidad de números primos. Y por eso conjeturó dos cosas: por una parte, creyó que su nueva fórmula acotaría solo el logaritmo integral y por otra parte, que el logaritmo integral sobreestimaría la cantidad de números primos, lo cual, ninguna de las dos es cierto.

Hay tres personajes en esta historia de los números, los cuales no tienen otra forma de llamarlo que no sea: curiosos. Uno de ellos es Stieltjes, otro Hadamard y La Vallée Poussin. Stieltjes se ha hecho famoso debido a la hipótesis de Riemann, con la afirmación que había comprobado esta hipótesis.

Este era hijo de un notable parlamentario holandés y se dedicó totalmente a las matemáticas. El examen de ingreso de la universidad lo suspendió tres veces; como idolatraba a Gauss quería trabajar en un observatorio; su padre le proporcionó un puesto de trabajo en Leiden y allí se centró en comprender la matemática del movimiento celeste y en 12 años intercambió 400 cartas con Ermit y este impresionado con las cartas le consiguió una cátedra en la universidad de Tolous (Guzmán, 2012).

En 1875, nueve años después de haber descubierto a Riemann, él decía que había descubierto un método para demostrar la hipótesis y siempre le decía que faltaban ciertos detalles y Ermit decidió que ya por sí le iba a enseñar la demostración que tenía y para eso hizo que en el año 1890 la Academia de París dedicara el Gran Premio de Ciencias Matemáticas a la demostración de la conjetura de Gauss de la disminución porcentual de la diferencia de la cantidad de números primos y la aproximación mediante logaritmo integral; pero para demostrar eso no hacía falta demostrar la hipótesis de Riemann. Ermit estaba muy contento, pensando que por fin iba a conocer la

demostración, pero no, porque se le pasó el plazo y no se presentó al premio. Quien se presentó al premio fue Hadamard, este presentó un artículo por el cual le dieron el premio y el honor lo comparte con de La Vallée Poussin.

1.2.3 David Hilbert

Desfila por esta alfombra una figura absolutamente carismática, que es David Hilbert. Este era un admirador profundo de Riemann. Fundamentalmente admiraba que sus razonamientos siguiesen por última conceptual, más que por cálculos (aunque esto no es cierto 100%). Él quería seguir la estela de Riemann y tuvo varias ocasiones para implementar eso. En concreto, en 1893 la Sociedad de Matemática Alemana le dice que elabore un informe sobre la teoría de números, para recuperar el gran desarrollo que había ido desde las Disquisiciones Aritmética de Gauss. Le ayudó German Mincosky y había mucha gente que pensaba que un gran porcentaje lo estaba haciendo Mincosky (Bombal, 2014).

Hilbert ingresa a Gotinga y allí empieza su revolución, aunque abandona la teoría de números. Pero Hilbert se dio cuenta de una cosa: que si la aritmética era consistente entonces la geometría Euclidea sería también consistente, pero que de la consistencia de la aritmética también se deducía la consistencia de la geometría Euclidiana, pero también luego se da cuenta de un pequeño detalle y es que nadie había demostrado nunca que los axiomas de la aritmética fueran consistentes y es entonces cuando se dedica totalmente al tema de fundamentos. Hilbert hizo una gran revolución al hacer un escrito donde está su famosa lista de 23 problemas que inicialmente eran 24, lo que pasa es que el 24 no lo quiso publicar y en la conferencia de París no le dio tiempo a explicar los 24 y el octavo se lo dedicó a la hipótesis de Riemann y a la conjetura de Golpat. Se equivocó en algunas cosas de las

que dijo, por ejemplo, creía que lo de la hipótesis de Riemann se resolvería enseguida, en cambio creía que otras la trascendencia y no acertó mucho en las predicciones, pero su lista de problemas fue la que marcó la investigación del siglo XX y la hipótesis de Riemann continúa, de hecho es uno de los siete problemas del milenio.

David Hilbert se preocupó de que la plaza de Vincosky en Gotinga la ocupara Landau, de hecho hubo gente que le habló mal de éste, diciéndole que era muy polémico. Lo cierto es que Landau dio un primer resultado importante respecto a la hipótesis de Riemann.

El primer resultado espectacular, por lo menos esa fue la calificación que le dio Hilbert, fue un resultado de Hardy, quien demostró que la recta x es igual a $\frac{1}{2}$, el número de ceros de la Función Z es infinito. Hardy, aparte de hacer muchas matemáticas, tuvo bastante más vista de los que decían que Gilbert no haría nada y en 1910 el crítico Alitemburg, que era un matemático ocho años más joven que él y publicaron más de 100 artículos en conjunto con resultados absolutamente impresionantes.

Littelwood había sido otro estudiante muy brillante y al finalizar sus estudios le dijo a su tutor, que era Ernest Barnest, que le diera un problema para empezar a investigar, y este en un alarde de ignorancia de los esfuerzos hechos para demostrar la hipótesis de Riemann le escribió la definición de la Función Z y le dijo que durante el verano hallara los ceros de la Función Z. Como era de esperarse Littelwood fracasó, pero descubrió la relación entre la Función Z y los números primos, y Hardy, que era bien listo, fue el único que se dio cuenta, además de que probablemente en toda Inglaterra era el único que se dio cuenta lo que habían hecho Hadamart y La Vallée Pousse, de lo inteligente que Littelwood y le consiguió trabajo en el Trinity College (Guzmán, 2012).

En muy poco tiempo Littelwood consiguió resultados impresionantes, porque consiguió demostrar que la fórmula de Riemann para calcular la cantidad de números primos era mejor que la de Gauss en un intervalo muy grande de números. Y, por otra parte, también demostró en 1912 otra cosa: es que hasta los diez millones estaba demostrado que el logaritmo integral sobreestimaba la cantidad de números primos, pero Littelwood demostró teóricamente que se llegaría a una zona numérica en la se pasaría de sobreestimación a subestimación. Por si eso fuera poco, en 1932, Skiwest encontró donde se encuentra la subestimación, que está en un numerito que era del orden de 10 elevado a 10, elevado a 10 elevado a 34, admitiendo la hipótesis de Riemann. Pero en 1955 demostró que si no se admite la hipótesis de Riemann también hay una zona de subestimación un poquito más lejos.

Luego en 1966 Lemart consiguió demostrar que aproximadamente hay una cantidad de 10 elevado a 500 números donde se produce la subestimación. En 1994 Rubinstein y Sarnak consiguen demostrar que hay pocos valores en los que haya subestimación. En 2008 hay un resultado de Kotnik de la subestimación de 10 elevado a 14 y, el último resultado de Zegowitz, que en números más pequeños también hay subestimación.

Hardy y Littelwood todavía hicieron muchas más cosas: sacaron las Funciones Z generalizadas, o sea, las funciones, con las cuales los juegos que dieron han sido impresionantes. Dieron, además, otra conjetura mejor que la de Riemann, o sea que los ceros también están en la recta crítica. Demostraron un resultado realmente impresionante que hay un número en el subcero cada uno impar tiene su cero de tres números primos (ya se sabe que originalmente Golbach le dio la conjetura a Euler diciéndole que cada número era la suma de tres primos, que es lo mismo que decir que cada par es la suma de dos números primos).

Ramanujan, un pobre empleado del puerto de Madrás, con veinte libras anuales y con una formación matemática casi nula, se dedicaba ávidamente a intuir resultados de matemáticas. El libro que le regalaron a los 15 años de edad fue La Sinopsis de Resultados Elementales de Matemática Pura, que tiene 6,665 enunciados ordenados, apenas sin demostraciones. Un ingeniero de Madrás le envió una carta a Gil con sus descubrimientos, este le contesta con un gran entusiasmo y le recomienda ciertos estudios matemáticos, y luego escribe su famosa carta que lo dirigió a tres matemáticos, de los cuales uno fue Harvy, quien se reunió con Littelwood y se dieron cuenta que primero tenían que meterse dentro de la lógica de este señor y se dieron cuenta que estaban ante un genio. Ramanujan les envió teoremas tras teoremas, un tercio eran un gran descubrimiento, un tercio eran falsos. Por ejemplo, en la segunda carta, Littewood le pidió que enviara que la fórmula de los números primos y Littewood confesó que la acotación que hizo se inspiró en lo que leyó de Ramanujan aunque ahí no habían demostraciones.

Siegel no le pasó lo mismo que a Ramanujan, porque el padre de Landau vivía en la misma calle que Siegel en Berlin y este le regaló el libro de su hijo. Siegel pensaba estudiar astronomía, porque pensaba que en la astronomía no tendría que ver nunca con la guerra, pero el retraso en el decomiso del curso de astronomía le hizo empezar unos cursos de matemáticas y se dedicó a explorar el universo de los números. Se negó a ir a la guerra y lo metieron en un manicomio y el padre de Landau lo sacó del manicomio y, ya licenciado en matemáticas, tuvo una cena con Landau hijo y este le contó los últimos teoremas que estaba haciendo, algo muy complicado. Y Siegel, camino a su casa, hizo una demostración del teorema de Landau, que se la envió al otro día en el reducido espacio de una tarjeta postal.

Siegel comentó a Gilbert las ideas que tenía sobre las hipótesis de Riemann y este le consiguió un puesto en la universidad de Franford y, además, le facilitó el acceso a los escritos inéditos de Riemann y así se le vino el mundo a los pies, cuando se dio cuenta de la gran cantidad de folios completamente repletos de cálculos. Siegel tuvo la paciencia de encontrar lo que hoy llamamos la función Riemann-Siegel, para calcular valores de la Función Z, que es lo que utilizaba Riemann para obtener los ceros. Es decir, que Siegel se dio cuenta que ese mundo conceptual de Riemann realmente estaba sobre la base numérica realmente impresionante (Guzmán, 2012).

En 1933 sucedió una cosa curiosa y es que las clases de Landau eran boicoteadas porque le acusaban de judío. Entonces abandonó la cátedra de Gotinga y le sustituyó Siegel, pero este en 1940 se fue a Estados Unidos. Selvert era un matemático de Oxford, formado en la soledad de los libros de la biblioteca de su padre, donde encontró un artículo de Ramanujan que le emocionó y su padre le regaló otros libros de Ramanujan y gracias a esto, cuando entró a la universidad de Oslo ya tenía artículos originales de investigación. Releyendo a Hary y Littelwood, consiguió que la densidad de cero en la Función Z entre k y $2k$ no tiende a cero cuando k tiende a infinito, o sea, que por mucho que nos alejemos vamos a ir encontrando ceros.

1.3 MARCO CONCEPTUAL

1.3.1 Los números Primos

Aunque se ha mencionado bastante sobre los números primos en la introducción y la historia, ha llegado el momento de concretizar algunas cosas sobre ellos, que servirán de base para la comprensión del desarrollo lógico de la temática de los números primos y la Hipótesis de Riemann.

Definición. Se define un número natural $p > 1$ como *primo* si no existen divisores suyos d satisfaciendo $1 < d < p$. Los números que no son primos se llaman *compuestos*. Por ejemplo: el número 5 es primo, pues los únicos divisores son el mismo 5 y la unidad. Pero el número 20 no lo es, ya que existen otros números distintos de 1 y de 20 que también lo dividen.

Los números primos aparecen de forma inadvertida, en muchos casos, y en otro darían la impresión de que están ordenados, cosa que cambia drásticamente.

Se tiene que la propiedad más importante de los números primos es que constituyen los átomos básicos en los que se descompone cualquier número natural. Este hecho se establece en un teorema llamado teorema fundamental de álgebra.

1.3.2 El teorema Fundamental de la Aritmética.

“Todo números entero se puede escribir de forma única como producto de números primos”

Para resolver este teorema, se necesita recordar o reconocer previamente unos lemas:

1. Si p y q son primos y $\frac{p}{q}$, entonces $p = \pm q$
2. Si p es primo y $\frac{p}{ab}$, entonces $\frac{p}{a}$ ó $\frac{p}{b}$
3. Si „ $p \in \mathbb{Z}$ es compuesto, entonces existe un primo, p , que lo divide, es decir, $\frac{p}{n}$

Entiendo esos lemas, se puede afrontar entender el Teorema Fundamental de la Aritmética. Se puede hacer en dos partes:

1. En que todo número se puede descomponer en factores primos.
2. Toda descomposición es única.

En cuanto al primero, se puede considerar que $p \in Z$ es un número compuesto, por el resultado anterior, entonces existe un primo que lo divide: $p_1 \in Z$ tal que $p_1 \mid n$ y es el primo más pequeño que divide a n . Si $p_1 \mid n$ entonces podemos expresar $n = p_1 n_1$, con $n_1 \leq n$.

Con n_1 se plantea una duda: ¿es compuesto o primo? Si es primo ya tendríamos la demostración de que n se puede descomponer en factores primos; pero si es compuesto, entonces se puede hacer lo mismo que se ha dicho antes $n = p_1 n_1$, entonces $n_1 = p_2 n_2$, con $n_2 \leq n_1 \leq n$ y $n = p_1 p_2 n_2$. La segunda cuestión es la unicidad de la descomposición factorial.

Descomposición en Factores Primos

Sea $n \in Z^+$ un número compuesto

$$n = p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_k^{n_k} \tag{0.1}$$

$$0 \leq n_k \leq \dots \leq n_4 n_3 n_2 n_1 n \tag{0.2}$$

n_k será primo. En consecuencia, alguno tiene que llegar a ser primo, porque si todos fuesen compuestos, habría una sustitución de números que se acerca a 0, no pueden ser todos compuestos, tiene que haber uno que sea

primo; por lo tanto, podemos expresar que n como producto de números primos.

Se puede ver que esa descomposición es única, por lo que se hace es suponer que hay dos descomposiciones, sea $n = p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_r = q_1 q_2 q_3 q_4 \dots q_s, r \leq s$. Si tenemos las dos descomposiciones, se puede ver que

$$\frac{p_1}{n}, \text{ por tanto, dado que tenemos } p_1 \frac{p_1}{(n = q_1 q_2 q_3 q_4 \dots q_s)} \Rightarrow \exists q_j; \frac{p_1}{q_j}, \text{ por}$$

eso, y atendiendo a lo se ha visto anteriormente en los lemas, podemos reordenar los índices y asignar $j=1 \quad q_1 = u_1 p_1$. Y eso daría que n se puede expresar de esa forma.

Como en ambos casos de la igualdad existe p_1 , se puede simplificar y eso resultaría que $p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_r = u_1 q_2 q_3 q_4 \dots q_s$. Si se simplifica todo, se llegaría a la conclusión 1 a simplificarlo todo es $1 = u_1 u_2 \dots u_r q_r + 1 \dots q_s$, porque se había supuesto que $r \leq s$. Pero hay un problema, porque si 1 es igual a un producto de números enteros, a la fuerza, todos tienen que ser la unidad a la fuerza, $q_r + 1 \dots q_s$ son unidades, por eso, ambas descomposiciones llegarían a ser la misma que era lo que se buscaba.

1.3.3 Letargo de los Números Primos

Los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,... están situados en la sucesión de los naturales N en una forma muy especial y parece ser que cuanto es más grande es el número que estamos buscando, se crea un especie de agujero negro que lo desapareciera y de repente... emergen. Para ver esto más claro piense en el siguiente hecho: se puede verificar que existen sucesivos números compuestos, formados por al menos n números

naturales. Esta verificación se obtiene siguiendo una línea argumental como la que se muestra en las siguientes líneas.

Dado n se considera el número $(n+1)!+2$ y basta observar que es múltiplo de 2, ya que el factorial de $(n+1)$ contiene seguramente el factor 2, o sea es par. Y la suma de dos números par es par. Por ejemplo, si n es 4, entonces $(4+1)!+2=5.4.3.2.1+2=122$, como se ha dicho es divisible por dos, luego es compuesto. De la misma manera, $(n+1)!+3$ es múltiplo de 3. Por tanto, se puede asumir, sin perder la generalidad, que para cada m natural $2 \leq m \leq (n+1)$, se verifica que $(n+1)!+m$ es múltiplo de m . Por tanto, los N números consecutivos $(n+1)!+m$, $2 \leq m \leq (n+1)$ son compuestos.

Siguiendo un procedimiento parecido con $6.000.001!+2$ produciría seis millones de números consecutivos y, esto es, sin ningún número primo entre ellos ¡Imagínese! Se puede lograr con la misma facilidad seis mil millones o cinco billones consecutivos de números compuestos. Estas observaciones tienen una asombrosa consecuencia: existen “hoyos” arbitrariamente profundos entre los números primos. Y desde luego esto lleva a varias preguntas: ¿Son infinitos realmente los números primos? ¿Existirán números primos cuya diferencia a lo sumo sea $2k$?

Al parecer, resultan obvias las respuestas a estas dos cuestiones. Como es natural no se pueden contestar ambas a la vez. Se dará respuesta de inmediato a la primera pregunta: ¿Son infinitos realmente los números primos?

1.3.4 La infinitud de los Números Primos

Euclides afirmó que los números primos son infinitos y tanto él como Euler proveyeron una demostración cada uno a su manera. Se presenta en

seguida una de las demostración registrada con el método de reducción al absurdo, formulado por el ingenioso Euclides y que es muy parecida a la ya vista para probar la descomposición única de los números naturales.

Demostración:

Supóngase que la sucesión de números primos es finita y denótese esta lista por $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$. Multiplíquense estos números primos unos con otros: $(q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \dots q_k)$ y adiciónese 1 a este producto, de esta manera se obtiene un nuevo número, N:

$$N = (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \dots q_k) + 1 \tag{0.3}$$

Al ser $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ los únicos número primos, se puede multiplicar de esta manera. Un número infinito de números primos no podría haberse multiplicado de dicho modo. Obviamente, N es mayor que cualquiera de los números primos individuales $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$, y por tanto N es diferente de todos ellos. Puesto que estos números son los únicos números primos existentes, se deduce que que N no es un número primo. Luego, si N no es primo, entonces es compuesto.

Además, si N es compuesto, tiene algún divisor primo, pero como se agotó la cantidad de primos, esto contradice que sea compuesto. Por tanto, no es cierto que $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ sea la lista acabada de los números primos. Esto conduce pensar que son infinitos.

Con respecto a la segundo pregunta: ¿Existirán números primos cuya diferencia a lo sumo sea $2k$? Se tienen los siguientes resultados que por años fueron no demostrables. Se le invita ver una demostración interesante aun no confirmada sobre esta conjetura por Niceto Valcárcel (<http://casanchi.com/mat/pgemelos02.pdf>). Pero antes, algunas observaciones sobre los números gemelos, mencionados en la introducción.

1.3.5 Números Primos Gemelos

Existen parejas de números muy especiales impares consecutivos como 3 y 5, 17, 19 y 29, 31, formadas por números primos. Son los llamados primos gemelos. Si se asume un número p primo, la conjetura postula que existe una cantidad infinita de primos tales $p+2$ que también es un número primo. Dicha afirmación se conoce como la conjetura de los números primos gemelos.

En 1849, el matemático francés, Alphonse de Polignac enunció una conjetura aún más general, la cual establece que para todo número natural existen infinitos pares de números primos tales que su diferencia es igual a $2k$.

Sean p y q dos números primos, entonces la conjetura de Polignac se puede expresar como: $p + 2k = q; \forall k > 0 \in N$. Se aclaró que esta conjetura aún no está demostrada. No es la intención, por lo tanto, dar aquí una demostración de la conjetura de Polignac. Sin embargo, es la intención probar que existen infinitos valores k para los que es cierta la conjetura.

Bueno, en este punto es imperativo conocer el postulado de Bertrand. Dicho postulado afirma que:

$$\forall n \in N > 3; \exists k \text{ tal que } n < p < 2k - 2 \quad (0.4)$$

Donde p es un número primo.

Sea T_0 una sucesión infinita cuyos términos son todos los números primos impares.

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...

Considere T_1 una sucesión infinita cuyos términos son todos los números primos impares sumados a uno.

4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24...

Considere T_2 una sucesión infinita cuyos términos son todos los números primos impares sumados a dos.

5, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25...

También, suponga la sucesión T_m infinita cuyos términos son todos los números primos impares sumados a

$$(3+m), (5+m), (7+m), (11+m), (13+m), (17+m), (19+m) \dots \quad (0.5)$$

Suponga las sucesiones una sobre otras como se muestra a continuación:

T_m ...

$T_3 = 6, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26 \dots$

$T_2 = 5, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25 \dots$

$T_1 = 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24 \dots$

$T_0 = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 \dots$

Este arreglo de números dispuestos en las columnas está ordenado consecutivamente. Si la conjetura de Polignac es verdadera, entonces deben existir infinitos números primos en cada una de las sucesiones. De no ser así la conjetura, por su generalidad, resultaría ser falsa.

Como la conjetura no ha sido demostrada, no se puede afirmar que existen infinitos primos en cada una de las sucesiones mostradas. Pero, podemos asumir que cada sucesión contiene una cantidad finita de números primos, es decir, asumimos que la conjetura de Polignac es falsa.

Si la conjetura de Polignac es falsa, entonces la cantidad de números primos en cada una de las sucesiones es finita. Considerando el argumento, como

la cantidad de números primos, en cada una de las sucesiones, es finito; si tomamos una cantidad finitas de sucesiones, debe existir un número primo que sea el mayor de las sucesiones tomadas.

Entonces, en las sucesiones tomadas, todos los términos mayores que son compuestos. Y puesto que: $p_{x+1} < (p_x + 1)$ podemos afirmar que: $(p_x + 1)$ y todos los números mayores que él, son compuestos. Es preciso señalar que las sucesiones tomadas son ordenadas, es decir son consecutivas con relación al subíndice. Esto significa que los términos, dispuestos en vertical, también son consecutivos.

Escójase un número donde es un número natural mayor o igual a 1. Si se multiplica por 2 y a dicho número resultante le restamos 2, entonces por el postulado de Bertrand: entre y debe existir por lo menos un número primo. Esta afirmación contradice el argumento original, por lo que resulta ser falso dicho argumento y debemos concluir que existen infinitas sucesiones que contienen infinitos números primos y por tanto existen infinitos números para los cuales se verifica la conjetura de Polignac.

Es necesario puntualizar, que con lo que se ha expuesto en este escrito no se ha demostrado la conjetura de Polignac, pues lo mostrado no es válido para todos los valores N. Aunque resulte extraño se han calculado hasta la fecha muchos números primos gemelos. Los primos gemelos más grandes conocidos son $242206083 \times 2^{38880} \pm 1$.

1.3.6. Tópicos de Números Complejos

Definición Un número complejo se puede expresar en la forma $z = a + bi$ donde a es parte real y b es la parte imaginaria. Ejemplo $z = 2 + 3i$. Si

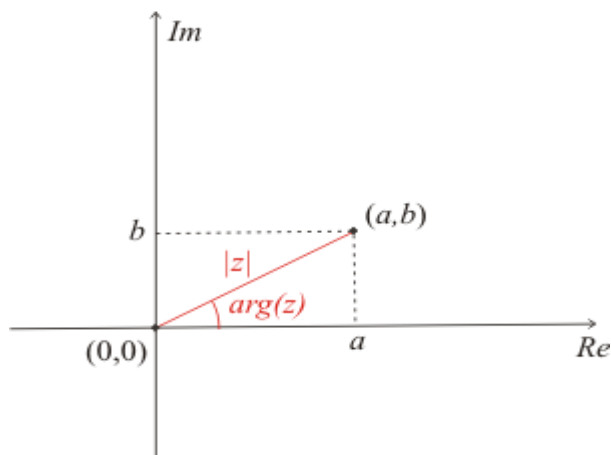
$z = a + bi$ es un número complejo se llama conjugado del número z , al número $\bar{z} = a - bi$, es decir, al número complejo que tiene la misma parte real que z pero la parte imaginaria de signo opuesto. *Ejemplo.* Si $z = 3 + 2i$, entonces $\bar{z} = 3 - 2i$ y si $z = 3 - 2i$, entonces $\bar{z} = 3 + 2i$.

Módulo y Argumento de un Número Complejo

Sea $z = (a, b) = a + bi$ un número complejo cualquiera. Se llama *módulo* del número complejo z , al número real dado por $\sqrt{a^2 + b^2}$ y se denota por $|z|$. El módulo se interpreta como la distancia al origen del número z .

Por otra parte, llamaremos *argumento* del número complejo $z = a + bi$, al ángulo comprendido entre el eje x y el radio vector que determina a $|z|$. El argumento de z se denota por $\arg(z)$ y se calcula mediante la expresión:

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



(0.6)

Hasta aquí los números primos. Se considera, a continuación, algunas cuestiones puntuales sobre las series en el plano complejo.

1.3.7 Serie de Potencia

Definición. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} + \dots$ puede considerarse

como una serie de potencias ordinaria en la variable $\frac{1}{z}$. Será convergente

en el exterior de una circunferencia $|z| = R$. La convergencia será uniforme en toda región $|z| \geq \rho > R$.

La serie representa una función analítica en $|z| > R$ y en este dominio será derivable e integrable término a término. Lo anterior es extensible a series

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$. Combinando la $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ con la $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ se obtiene una serie más

general: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$

Se dice que es convergente, si convergen por separado las $\sum_{n=-\infty}^1 a_n z^n$ y

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Como la 1ª converge en una región $|z| > R_2$ y la 2ª en $|z| < R_1 \Rightarrow$

existe región común de convergencia $R_2 < |z| < R_1$ sólo si $R_2 < R_1$ y

entonces la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ representa una función analítica en la corona

$R_2 < |z| < R_1$.

1.3.8 Desarrollo en Serie de Taylor

Se ha visto que una serie de potencias representa una función (su suma) analítica en $|z| < R$. A continuación se va a establecer un recíproco, fundamental en la teoría de funciones de variable compleja.

Si $f(z)$ es analítica en un círculo abierto $|z - z_0| < r_0$, admite en dicho dominio una representación en serie:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad (0.7)$$

La misma se puede escribir: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ con $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.

Esta serie de potencias también se le llama desarrollo de $f(z)$ en serie de Taylor en un entorno de z_0 . Si $z_0 = 0$ la serie de Taylor se conoce como serie de MacLaurin de $f(z)$.

A continuación se da una demostración.

Suponga que z está en el interior del disco a C . Será $|z - z_0| = r < r_0$

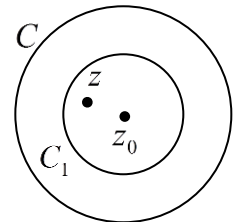
Sea la circunferencia C_1 de centro z_0 y radio r_1 , de modo que

$$r < r_1 < r_0.$$

$f(z)$ es analítica en C_1 e interior y z es interior a C_1 .

Luego por la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (0.8)$$



$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)} \frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}$$

(0.9)

Pero.

Además, como $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{r}{r_1} < 1$

resulta:
$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

Luego:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} f(\xi) d\xi$$

Como la serie de potencias $1 + Z + Z^2 + \dots + Z^n + \dots$ converge uniformemente en cualquier círculo cerrado interior a $|Z| = 1$, tomando $Z = \frac{z - z_0}{\xi - z_0}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \text{ converge uniformemente en el interior de } C_1.$$

Y como $\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$ es continua sobre C_1 , por el teorema sobre integración

generalizado, es:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (0.10)$$

Aquí se completa la demostración

Puede demostrarse que:

- El desarrollo en serie de una función en torno a z_0 , es único y coincide con el de Taylor.
- El radio de convergencia de la serie de Taylor de $f(z)$ en torno a z_0 , es la distancia de z_0 al punto más próximo en el que $f(z)$ no es analítica.

Ejemplos: Desarrollos Usuales

Utilizando la definición de desarrollo de Taylor (ó de MacLaurin) se obtiene:

- Sea $f(z) = e^z$. Es entera y $f^{(n)}(z) = e^z$, $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Luego: } e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad R = \infty \quad (0.11)$$

Análogamente:

$$\bullet \quad \operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad R = \infty$$

$$\bullet \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty$$

$$\bullet \quad \operatorname{Sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = \infty; \quad \operatorname{Ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad R = \infty$$

Como consecuencia de los anteriores es inmediato que por ejemplo:

- $e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \quad R = \infty \quad e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n!} \quad R = \infty$
- $e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \quad R = \infty \quad \operatorname{sen} 5z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = \infty$

A partir de la serie geométrica

- $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad R = 1$

Pueden obtenerse de forma inmediata:

- $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad ; \quad R = 1$
- $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad ; \quad R = 1$
- $\frac{1}{9-z^2} = \frac{1/9}{1-(z/3)^2} = \frac{1}{9} \left[1 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^4 + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{3^{2n+2}} \quad R = 3$

Pueden también obtenerse desarrollos por derivación o integración de los términos de otro desarrollo conocido y con el mismo círculo de convergencia.

- $\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz} [1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots] = 1 + 2z + 3z^2 \dots + nz^{n-1} + \dots$
 $|z| < 1$
- $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad |z| < 1$
- $\operatorname{Log}(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+z} dz = \int_0^z \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right] dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < 1$

Se tiene que tener en cuenta en el caso de funciones multiformes como por ejemplo $(\arctg) z$ o $\log(1+z)$ que será necesario escoger antes una rama bien definida. En los ejemplos anteriores se han tomado las ramas de $\arctg (z)$ o $\log(1+z)$ que en $z = 0$ toman el valor cero.

En el caso de una función racional, es conveniente usar la descomposición en fracciones simples

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{z}{z^2 - z - 2} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-2} \right) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots \right) - \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n \right] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{2^n} \right] z^n \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la fórmula de MacLaurin, se obtiene:

$$\begin{aligned} \bullet \quad (1+z)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z| < 1 \text{ siendo } \alpha \in \mathfrak{R}, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}; \\ \binom{\alpha}{0} &= 1 \end{aligned}$$

Desarrollo en un punto $z_0 \neq 0$

Los desarrollos anteriores han sido hechos en torno a $z_0 = 0$. Como ejemplo de desarrollo en torno a otro punto:

Desarrollo de $\frac{1}{z}$ en torno a $z_0 = 2$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{(z-2)}{2}\right)} \quad \text{Y según lo visto para la geométrica:}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^n + \dots \right) \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^n$$

$$|z-2| < 2$$

1.3.9 Serie de Fourier

Definición. Cualquier función del tiempo $f(t)$, real, periódica de período T o frecuencia

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n \omega_1 t)$$

donde $\omega_1 = 2\pi / T$, continua, puede ser expandida en una serie infinita de senos y cosenos de frecuencias ω_n múltiplos de ω_1 , es decir, $\omega_n = n \omega_1$,

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = A_0$$

con $n=1,2,\dots,\infty$. En forma de ecuación tenemos, que para obtener A_0

calculamos el promedio temporal de $f(t)$, sustituyendo la anterior serie en la integral del promedio y tomando en cuenta que el promedio temporal de los senos y cosenos son cero. El valor de t_0 normalmente es cero pero más adelante convendrá tomarlo como $-T/2$.

Para calcular los coeficientes A_m con $m=1,2,\dots,\infty$, se calcula el promedio de una nueva función $f(t) \cos(m \omega_1 t)$:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(m\omega_1 t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_0 \cos(m\omega_1 t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t) dt$$

La primera integral del lado derecho es cero, porque es el promedio de un coseno. Para las siguientes dos podemos considerar que los senos y cosenos son buena gente y permiten intercambiar los signos de sumatoria e integral sin mayores traumas. Entonces, calculemos primero la última integral usando que el producto $(\sin\alpha)(\cos\beta)$ se puede escribir como $[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]/2$, resultando así dos promedios que se anulan en un período, para todo valor de α y β , es decir para todo valor de n y m , y así ningún B_m saldrá en el resultado.

Para calcular la segunda integral usamos que el producto $(\sin\alpha)(\cos\beta)$ se puede escribir como $[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2$, resultando así dos promedios que se anulan en un período, para todo valor de α y β , es decir para todo valor de n y m , excepto para el caso $n=m$ que solo se anula el promedio de $\cos(\alpha+\beta)$, porque $\cos(\alpha-\beta)=\cos(0)=1$, cuyo promedio es 1.

En resumen, solamente quedará el valor $A_m/2$, o cambiando la letra del índice:

(0.12)

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

Similarmente obtenemos:

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}(n \omega_1 t) dt$$

(0.13)

Note que la distancia entre dos frecuencias consecutivas es:

$$\Delta\omega = (n+1) \omega_1 - n \omega_1 = \omega_1 = 2 \pi / T.$$

(0.14)

Serie de Fourier Complejas

Llegado a este punto es correcto decir que la ecuación de la Serie de Fourier puede ser modificada como tal en términos de exponenciales complejas, usando para ello la fórmula de Euler.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \text{sen}\theta$$

(0.15)

Para ello escríbase la serie de la siguiente manera:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega_1 t + \phi_n)$$

(0.16)

Donde se cumplen las relaciones:

$$A_n = C_n \cos \phi_n,$$

$$B_n = - C_n \text{sen} \phi_n;$$

Quedando así:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2} (e^{j(n\omega_1 t + \phi_n)} + e^{-j(n\omega_1 t + \phi_n)})$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n e^{j\phi_n}}{2} e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n e^{-j\phi_n}}{2} e^{-jn\omega_1 t}$$

(0.17)

la cual podemos escribir como:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{-\infty} D_{-n} e^{jn\omega_1 t}$$

(0.18)

Tomando un solo signo de sumatoria:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n e^{jn\omega_1 t}$$

(0.19)

Donde las G_n se obtienen a partir de $f(t)$ usando la integral:

$$G_n = \begin{cases} \frac{C_{-n} e^{-j\phi_{-n}}}{2} & n < 0 \\ A_0 & n = 0 \\ \frac{C_n e^{j\phi_n}}{2} & n > 0 \end{cases}$$

(0.20)

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

(0.21)

Transformada de Fourier: Para extender la serie de Fourier a funciones que no son periódicas, se puede considerar que las funciones no son periódicas con período infinito. En realidad es un proceso límite si consideramos que la función no periódica se aproxima por una que se repite a una distancia (tiempo) muy lejana de nosotros, mucho más lejana de cualquiera que podamos imaginar.

Cuando se tiene $T \rightarrow \infty$, la distancia entre dos frecuencias del espectro ($\Delta\omega$) tiende a cero, es decir, el espectro de frecuencias no es discreto, sino continuo; y desde la frecuencia cero hasta una frecuencia genérica ω existen n ω_1 frecuencias con $n \rightarrow \infty$, pero $n \omega_1 \rightarrow \omega$. Similarmente $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi / T \rightarrow d\omega$.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j n \omega_1 t} dt \right) e^{j n \omega_1 t} \quad (0.22)$$

A partir de la Serie de Fourier compleja:

y tendiendo T a infinito, obtenemos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (0.23)$$

La expresión entre corchetes es una integral definida de t y es por eso que solo depende de ω . Por lo tanto, es posible escribir el par de integrales conocidas comúnmente como las Transformadas de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (0.24)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (0.25)$$

El significado de estas expresiones es que una función no periódica también se puede escribir como una suma (integral) de funciones (diferenciales) sinusoidales. Note que la función $F(\omega)$ se calcula completamente a partir de la función $f(t)$ y que la función $f(t)$ se puede reconstruir completamente a partir de la función $F(\omega)$. Es decir, toda la información que tenemos en el dominio del tiempo también está en el dominio de la frecuencia y podemos usar indistintamente cualquier dominio según nuestra conveniencia.

1.3.10 Función Holomorfa

Definición En el análisis de funciones complejas, el estudio de las funciones holomorfas es el principal objetivo. Estas funciones están definidas en un subconjunto abierto del plano complejo C y con valores en C .

Una característica fundamental de las funciones holomorfas es que son complejo-diferenciables en cada punto. Es bueno mencionar que esta condición es mucho más fuerte que la diferenciabilidad que en análisis de variable real e implica que la función es infinitamente diferenciable.

Se usa a menudo el término función analítica en vez del de “función holomorfa”, especialmente para cuando se trata de la restricción a los números reales de una función holomorfa. Una función que sea holomorfa sobre todo el plano complejo se dice función entera.

Más específicamente que una función sea “holomorfa en un punto a ”, significa no sólo diferenciable en a , sino diferenciable en todo un disco abierto centrado en a , en el plano complejo.

1.3.11 Ceros y singularidades aisladas.

Función racional.

Una función racional es un cociente de dos polinomios no idénticamente nulos, con coeficientes complejos:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Está definida y es holomorfa en todos los puntos del plano complejo que no sean raíces del polinomio $Q(z)$. Siempre se puede suponer que los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ son primos entre sí, esto es, si no tienen raíces comunes. En realidad, si ambos polinomios tienen alguna(s) raíz(es) z_0 en común, dividiendo ambos entre $(z - z_0)$ tantas veces como sea necesario, alguno de ellos, o ambos, deja de tener a z_0 como raíz.

Por el teorema fundamental del Álgebra, $P(z)$ es un polinomio, entonces tiene tantas raíces $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ como su grado n (repetiendo cada raíz tantas veces como su multiplicidad). Entonces dividiendo sucesivas veces el polinomio entre $z - z_i$ se factoriza el polinomio. Llamando $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, a las raíces de $P(z)$ (repetiendo cada una tantas veces como su multiplicidad) y llamando p_1, p_2, \dots, p_m a las raíces de $Q(z)$, se obtiene:

$$Q(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

$$P(z) = b(z - s_1)(z - s_2)\dots(z - s_m)$$

donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$ son los coeficientes de los términos de mayor grado de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ que tienen grado n y m respectivamente. (Alguno

de los dos polinomios o ambos puede tener grado 0. Si ambos tienen grado 0, la función racional $\frac{P(z)}{Q(z)}$ es constante)

$$\text{Se tiene que: } f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b(z-s_1)(z-s_2)\dots(z-s_m)}{a(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)} \quad (0.26)$$

Extendiendo continuamente la función racional $f(z)$ al plano compactificado \mathbb{C} , se estará definiendo:

$$f(s_i) = \lim_{z \rightarrow s_i} f(z) \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, m$$

Además si asumimos que $m > n$

$$m > n \rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0 \quad \text{Definido } f(\infty) = 0$$

Si asumimos que $m = n$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a}{b} \quad \text{Definido } f(\infty) = \frac{a}{b}$$

Si asumimos que $m < n$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \infty \quad \text{Definido } f(\infty) = \infty$$

CAPITULO II. LA FUNCIÓN ZETA, LOS NÚMEROS PRIMOS Y LA HIPOTESIS DE RIEMANN

En este capítulo se propone estudiar la distribución de los números primos y el teorema de los números primos. Está dedicado al análisis de la Función de Euler o mejor conocida la Función Zeta de Riemann, esto así por la extensión que este último hizo de ésta función al plano complejo. Se contesta la pregunta más común en los debates de este tema: ¿qué relación hay entre la Función Zeta de Riemann y los números primos? Y, desde luego, una descripción de la Hipótesis Riemann a través de una analogía de un paisaje.

2.1 La Función Zeta de Riemann

La función que lleva el nombre de Función Zeta de Riemann fue usada por primera vez por el ingenioso matemático Leonard Euler en 1737. Pero antes de analizar esta función se dará consideración a la **serie armónica**.

2.1.1 Serie Armónica

Definición: Llamaremos serie armónica a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$,

dónde cada término es media armónica de sus dos adyacentes.

Teorema: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Demostración: sea $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots >$

(0.28)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1} \text{ términos}} + \dots$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_p + \dots = 1 + \frac{p}{2} \text{ y como } p \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim S_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

$$\text{Teorema: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow \begin{cases} \text{converge} \Leftrightarrow p > 1 \\ \text{diverge} \Leftrightarrow 0 < p < 1 \end{cases}$$

$$\text{Demostración: sea } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \leq$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(2^m)^p} + \dots \frac{1}{(2^m)^p} + \dots =$$

$$1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \dots + \frac{2^m}{(2^m)^p} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \dots + \frac{1}{(2^m)^{p-1}} + \dots$$

que es geométrica de razón $\frac{1}{2^{p-1}}$ si $\frac{1}{2^{p-1}} < 1 \Leftrightarrow p > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p$

> 1 . si $\frac{1}{2^{p-1}} > 1 \Leftrightarrow p < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge $\Leftrightarrow p < 1$.

Estos resultados serán muy útiles para desarrollar la idea que tuvo Euler con ingeniosa función que inventó cómo se relaciona con los números primos.

Definición. La Función Zeta de Riemann es una función de variable compleja “z” definida en el semiplano $R(z) > 1$ porque es una serie absolutamente convergente. Esto último se demuestra al considerar $s = a + ib$ donde $a, t \in R$. El hecho que se diga en la definición que $R(s) > 1$ implica que

$a > 1$. Entonces $\left| \frac{1}{n^s} \right| = \left| \frac{1}{e^{s \ln n}} \right| = \frac{1}{e^{a \ln n}} = \frac{1}{n^a}$. Como se ha demostrado que

$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge para $a > 1$, por tanto la serie $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ en el semiplano $a > 1$.

Algunos resultados muy conocidos desde Euler son, por ejemplo:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

El método inicial de Euler para obtener este valor fue bastante ingenioso. En realidad, lo que hizo fue extender resultado de algunos polinomios finitos, considerándolos igualmente válidos para series infinitas. Recordando el desarrollo de la serie de Taylor.

Sea $\text{Sin}(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ Considere tiene $\sin x = 0$

$$0 = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Si se hace

$$t = x^2$$

$$0 = 1 - \frac{t}{3!} + \frac{t^2}{5!} - \frac{t^3}{7!} + \dots$$

Como la ecuación original tenía ceros en $x = n\pi$, entonces la segunda ecuación tiene ceros en $t = n^2\pi^2$ y si hacemos $\mu = \frac{1}{t}$, luego por álgebra elemental se tiene que la suma de las raíces de la ecuación en t es el segundo coeficiente

$$0 = 1 - \frac{1}{3!w} + \frac{1}{5!w^2} - \frac{1}{7!w^3} + \dots$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Por otro lado, si se quiere este resultado por una serie de Fourier. Considere

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \quad (0.29)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \text{Sen}(nx) dx}{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

$$\frac{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)}{\pi} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x^2}{\pi} \frac{1}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \quad (0.30)$$

Y de aquí

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (0.31)$$

Hay otras fórmulas, igual de interesantes:

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots = 1.20205690$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} \quad (0.32)$$

2.1.2 Extensión de la Función Zeta de Riemann

A través de una extensión de continuación analítica se puede escribir una nueva función en la que se puede estudiar las propiedades de una a través de la otra.

Ya para el año 1859, Bernard tuvo la idea de definir esta función para todo complejo Z , mediante continuación analítica. Esta idea es verdaderamente importante y juega un papel central en el estudio de la distribución de los números primos. Algunas técnicas permiten extender el dominio de definición

de la Función Zeta, pues la continuación es independiente de las técnicas usadas, debido a su unicidad. Obsérvese una definición a partir de la llamada *Función Zeta alternada*:

$$\zeta_a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \tag{0.33}$$

$$\begin{aligned} \zeta_a(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} \dots \\ &= (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} \dots) - 2(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots) \\ &= (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} \dots) - 2(\frac{1}{(2 \cdot 1)^s} + \frac{1}{(2 \cdot 2)^s} + \frac{1}{(2 \cdot 3)^s} + \dots) \\ &= (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} \dots) - \frac{2}{2^s} (\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{2^{s-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \frac{1}{2^{s-1}} \zeta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) \end{aligned}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \zeta_a(s) \tag{0.34}$$

Como se mencionó esta es una extensión de la Función Zeta al semiplano $Re\{s\} > 0$.

Otra forma de obtener la Función Zeta es por medio de la integral

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{s+1}} du &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{n}{u^{s+1}} du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{-s} \frac{1}{u^s} \Big|_n^{n+1} = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^s} - \frac{n}{(n+1)^s} \right) = \\ &= \frac{1}{s} \left[\left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} \right) + \left(\frac{2}{2^s} - \frac{2}{3^s} \right) + \left(\frac{3}{3^s} - \frac{3}{4^s} \right) + \dots \right] = \frac{1}{s} \zeta(s) \end{aligned} \tag{0.35}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du \quad (0.36)$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{u-n}{u^{s+1}} du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{u^s} - \frac{n}{u^{s+1}} du = \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{1}{1-s} \frac{1}{u^{s-1}} + \frac{n}{s} \frac{1}{u^s} \right|_n^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-s} \frac{1}{(n+1)^{s-1}} + \frac{n}{s} \frac{1}{(n+1)^s} \right) - \left(\frac{1}{1-s} \frac{1}{n^{s-1}} + \frac{n}{s} \frac{1}{n^s} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \left(\frac{n+1}{1-s} + \frac{n}{s} \right) - \frac{1}{n^s} \left(\frac{n}{1-s} + \frac{n}{s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^s} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) - \frac{n}{n^s} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{1-s} \frac{1}{(n+1)^s} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) \left(\frac{n}{(n+1)^s} - \frac{n}{n^s} \right) + \frac{1}{1-s} \frac{1}{(n+1)^s} \\ &= \left[\left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{1^s} \right) + \frac{1}{1-s} \frac{1}{2^s} + \right. \\ &\quad \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) \left(\frac{2}{3^s} - \frac{2}{2^s} \right) + \frac{1}{1-s} \frac{1}{3^s} + \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) \left(\frac{3}{4^s} - \frac{3}{3^s} \right) + \frac{1}{1-s} \frac{1}{4^s} + \dots \right] \\ &= - \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) \zeta(s) + \frac{1}{1-s} (\zeta(s) - 1) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du &= - \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) \zeta(s) + \frac{1}{1-s} (\zeta(s) - 1) \\ \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du &= - \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right) \zeta(s) + \frac{1}{1-s} \zeta(s) - \frac{1}{1-s} \\ \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du &= - \frac{1}{s} \zeta(s) - \frac{1}{1-s} \\ \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du \quad (0.37) \end{aligned}$$

Resumiendo estos resultados en:

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{s+1}} du$$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du$$

(0.38)

2.1.3 La Función Zeta de Riemann y Los Números primos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(0.39)

Como ya se ha demostrado, todo número compuesto se puede expresar como el producto de números primos, entonces $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} p_4^{e_4} \dots p_k^{e_k}$

Por eso se puede decir:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \dots)(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \dots)(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \frac{1}{5^{3s}} + \dots) \dots$$

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

(0.40)

De esto se desprende un hecho de mucha importancia: *Función Zeta no se anula si $Re\{s\} > 1$* . Pero, si se deriva la última expresión se tiene

$$\ln \zeta(s) = \ln \prod_{p \text{ primo}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = - \sum_{p \text{ primo}} \ln(1 - \frac{1}{p^s})$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{p \text{ primo}} \frac{\frac{1}{p^s} \ln p}{(1 - \frac{1}{p^s})} = - \sum_{p \text{ primo}} \frac{\ln p}{(p^s - 1)}$$

(0.41)

De esta manera se expresa una fórmula que comunica los números primos con la función de Riemann, pero que más adelante cuando se esté hablando de la Hipótesis de él, se retomará.

2.1.4 Ecuación Funcional

Cuando se habla de los ceros triviales y no triviales de la Función Zeta, precisamente se pueden calcular a partir de otra extensión que hiciera Riemann de esta función

¿Qué motivó a Riemann a construir una ecuación funcional? Bueno, quizás la famosa relación de Euler, que expresa los valores de la función de Riemann para los números pares, tanto positivos como negativos:

$$\zeta(2n) = \frac{(2n)^{2n} (-1)^{n+1} B_{2n}}{2(2n)!}, \text{ donde los } B_{2n} \text{ son los llamados números de Bernulli,}$$

que vienen definidos como los coeficientes del desarrollo de potencias

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \tag{0.42}$$

En particular se tiene el resultado que arriba demostramos $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ que era uno de los problema que tenía Bernoulli, pero que Euler demostró satisfactoriamente.

Riemann usó una forma muy rigurosa para la matematica de ese entonces.

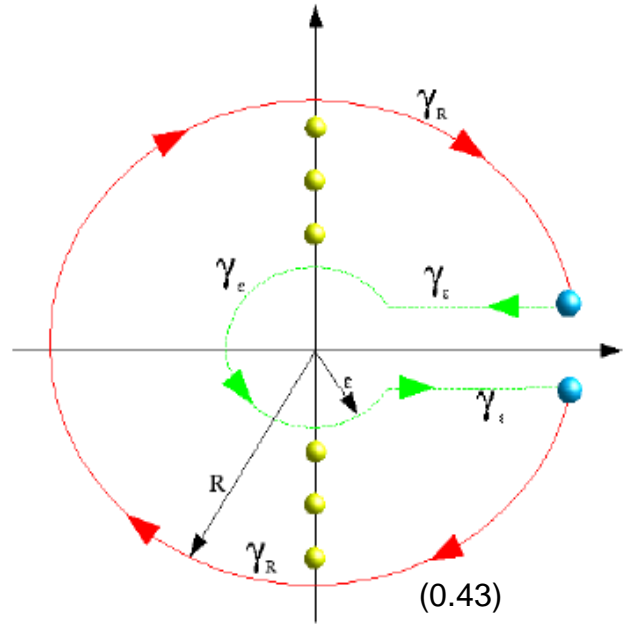
Uso una circunferencia exterior que se llamará γ_R y otra interior en un recorrido γ_ε , también $\gamma = \gamma_R + \gamma_\varepsilon$ (ver gráfica).

Para γ_R , se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} (e^\omega - 1)^{-1} \frac{(-\omega)^s}{\omega} d\omega \\ &= \sum_{k=-n, \dots, n} \operatorname{Res}((e^\omega - 1)^{-1} \frac{(-\omega)^s}{\omega}, \omega = 2\pi i k) \\ &= -\sum_{k=1}^n ((2\pi i k)^{s-1} + (-2\pi i k)^{s-1}) \end{aligned}$$

Como $i^{s-1} + (-i)^{s-1} = \frac{1}{i} (e^{s \log(i)} - e^{s \log(-i)})$

$$= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{s\pi}{2} \right)$$



En conclusión, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int (e^\omega - 1)^{-1} \frac{(-\omega)^s}{\omega} d\omega = 2(2\pi)^{s-1} \operatorname{sen} \left(\frac{s\pi}{2} \right) \sum_{k=1}^n k^{s-1} \quad (0.44)$$

Se observa en la gráfica que en la circunferencia γ_R la función $|e^s - 1|$ está acotada independientemente de R.

$$\left| \frac{(\omega^s)}{\omega} \right| \leq |\omega|^{\Re(s)-1} \quad (0.45)$$

Así que se puede reemplazar γ_R por γ_R como camino de integral.

Por extensión analítica se puede extender para todo $s \neq 1$

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \quad (0.46)$$

En su trabajo Riemann hizo aparecer la Gaussiano comentando que la simetría de la Función Zeta que él descubrió a partir de la ecuación funcional le llevó a considerar $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ en lugar de $\Gamma(s)$. Bueno, en la región de la parte real mayor que 1.

$$r\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx = (\pi n^2)^{\frac{s}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt \quad (0.47)$$

Cambiando el orden de integración como se hace en sumatoria y definiendo

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \quad \text{se tiene las siguientes identidades:}$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} r\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt$$

$$= \int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt + \int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt \quad (0.48)$$

Considere la función:

$$\theta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi m^2 t} = 1 + 2\omega(t) \tag{0.49}$$

La fórmula de sumación de Poisson aplicada a la función $f(x) = e^{\pi x^2 t}$, que tiene por transformada

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{n\xi^2}{t}} \tag{0.50}$$

Produce la identidad:

$$\theta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi m^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{t}} \tag{0.51}$$

Expresado de otro modo:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right) = \theta(t), \quad \omega\left(\frac{1}{t}\right) = \omega(t) \sqrt{t + \frac{\sqrt{t-1}}{2}} \tag{0.51}$$

Ahora si procede evaluar la identidad $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-t} \omega(t) dt$

$$\int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt = \int_t^{\infty} t^{\frac{1+s}{2}} \omega(t) dt + \int_1^{\infty} t^{-1-\frac{s}{2}} \frac{\sqrt{t-1}}{2} dt = \int_1^{\infty} t^{-\frac{1+s}{2}} \omega(t) dt + \frac{1}{s(s-1)} \tag{0.52}$$

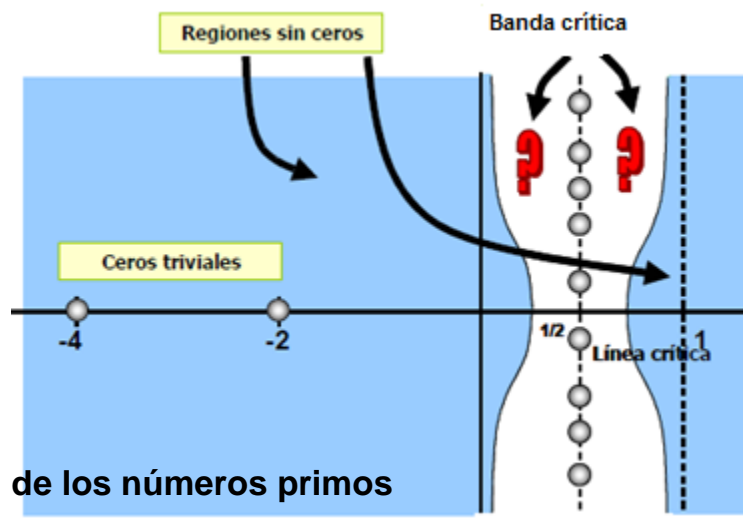
Sustituyendo este valor obtenemos:

$$\begin{aligned} \pi^{\frac{s}{2}} r\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(t^{-\frac{1+s}{2}} + t^{-\frac{s}{2}-1} \right) \omega(t) dt \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + G(s) \end{aligned} \tag{0.53}$$

Se ve que la ecuación anterior es la ecuación funcional observando que la relación $G(1-s) = G(s)$ produce:

$$\begin{aligned} \pi^{\frac{1-s}{2}} r\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) &= \frac{1}{s(s-1)} + G(s-1) \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + G(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} r\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \end{aligned} \tag{0.54}$$

Una consecuencia inmediata que se puede deducir de la ecuación funcional, como se resaltará en la próxima sección es que, a parte de los ceros triviales, los únicos ceros que tiene la función zeta, están todos situados en la región $\{s \in \mathbb{C}; 0 < \zeta(s) < 1\}$, llamada también banda crítica



2.2.1 Distribución de los números primos

Gauss, apasionado por los números primos. Se fijó que al final de un libro de matemática había una lista de números con la que se obsesionó desde el principio, eran números primos y se pasaba horas escudriñando esos números para intentar descifrar sus secretos. Al final hizo un descubrimiento memorable. Por más que miraba esa lista de números primos, Gauss, al igual que otras generaciones de matemáticos anteriores, no encontraba un patrón para ellos, una manera de predecir dónde están. Daba la sensación de que los números primos se sucedían completamente al azar.

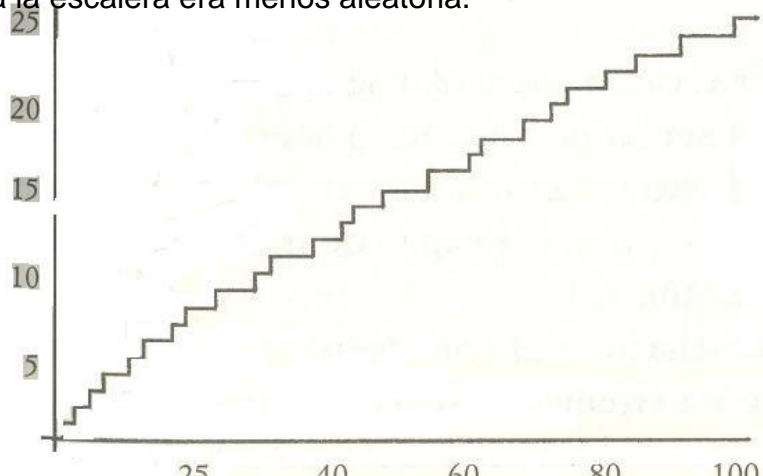
Gauss, cambió el problema ancestral al plantear otra pregunta, en lugar de intentar predecir qué números son primos, Gauss se preguntó cuántos números primos había. Éste solía contar cuántos números primos había en cada bloque de mil. Digamos que era a lo que más tiempo dedicaba y se cuenta que sólo tardaba 15 minutos para estudiar los primos existentes en cada uno de dichos bloques de mil, llegando a acumular tablas y tablas de números primos. Ver tabla anexa.

Gauss encontró que la forma que disminuían los números primos es

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{0.55}$$

Asi por ejemplo, $\pi(1) = 0, \pi(2) = 1, \pi(3) = 2, \pi(4) = 2, \pi(5) = 3$

Como se ve en la gráfica a medida que era la mayor cantidad de números que se analiza la escalera era menos aleatoria.



Gráfica de la función $\pi(x)$

De ahí el teorema de los números primos, que se puede enunciar de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1 \quad (0.56)$$

Aunque esta aproximación es sencilla, no es demasiado buena. Una de las mejores es la siguiente

$$R(n) = 1 + \sum \frac{1}{K \zeta(K+1)} \frac{(\log n)^k}{n!} \quad (0.57)$$

siendo $K \zeta(k+1)$ la Función Z de Riemann. La tabla siguiente da los valores de $\pi(n)$ y de $R(n)$, y permite comparar ambas funciones, que como se observa es sólo un poco mejor que la anterior.

n	$\pi(n)$	R(n)
100 000 000	5761455	5761552

200 000 000	11078937	11079090
300 000 000	16252325	16252355
400 000 000	21336326	21336185
500 000 000	26355867	26355517
600 000 000	31324703	31324622
700 000 000	36252931	36252719
800 000 000	41146179	41146248
900 000 000	46009215	46009949

Otra aproximación $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$

2.2.3 Análisis sobre de la Hipótesis de la Riemann (HR)

La revista “Obstinados Navegantes en Océanos de incertidumbre”, en la publicación de Ramanujan, se hace una exposición muy atrayente sobre la maravilla de esta hipótesis, se anima al lector a consultarla.

Bueno, para entender lo que dice HR es preciso pensar como lo pensó Bernard. Se ha mostrado ya que Riemann mezcló los números imaginarios con la nueva forma de la Función Zeta que había descubierto. Pero la Función Zeta tiene dominio los números complejos y rango también, por lo tanto para su representación se necesita cuatro dimensiones. Esto quiere decir que lo verdaderamente importa es la geometría de la gráfica.

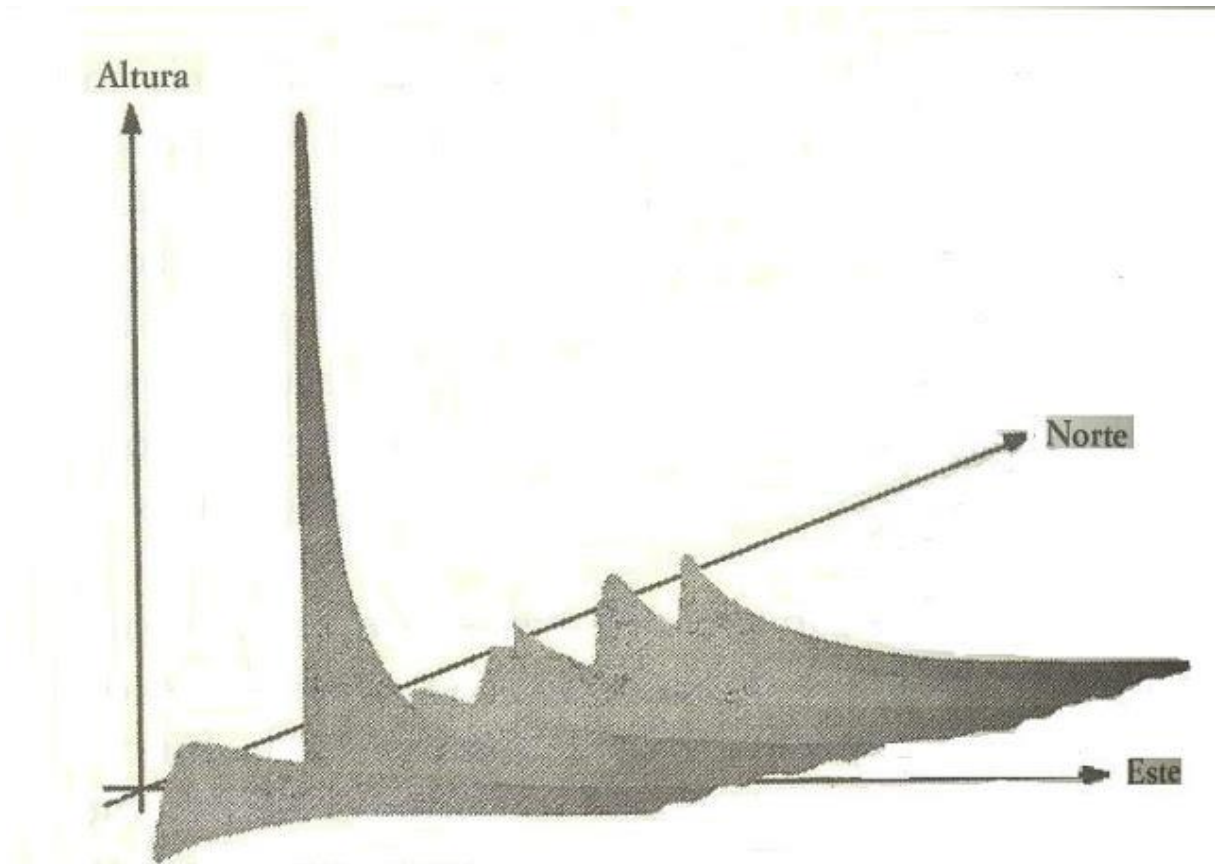
Para resolver este problema se puede pensar en la sombra que proyectamos: es una imagen bidimensional de nuestro cuerpo tridimensional. Si la observamos desde algunas perspectivas una sombra puede ofrecer poca información, pero vista de perfil, por ejemplo, la silueta de una persona puede revelar la información necesaria para reconocer una cara.

De forma similar se puede construir una “sombra” tridimensional del espacio de cuatro dimensiones que Riemann creó utilizando la “Función Zeta” con “números imaginarios”. Una “sombra” que conserve información suficiente para permitirnos captar las ideas de Riemann.

Basta con pensar en el mapa bidimensional de los números complejos que ideó Gauss da una representación gráfica de los números que introducimos en la “Función Zeta”. El eje norte-sur marca el número de pasos a dar en la dirección imaginaria, mientras que el eje este-oeste representa los números reales. En total cuatro dimensiones.

Si se extiende el mapa resultante sobre una mesa, lo que se pretende es crear un paisaje físico situado en el espacio que está sobre ese mapa. Una “sombra” tridimensional del espacio de cuatro dimensiones. La “sombra” de la “Función Zeta” se transformará entonces en un objeto físico, cuyas cumbres y valles podremos explorar.

La “altura” debe ser el resultado de entrar un número complejo en la “Función Zeta”.



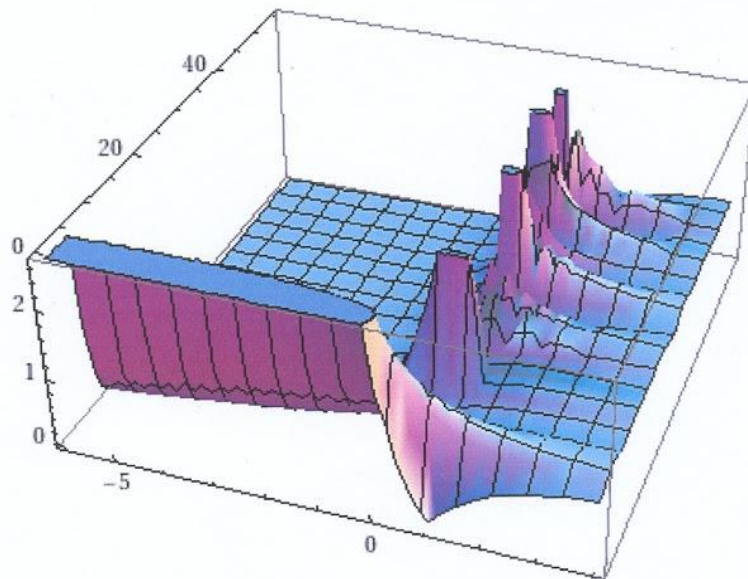
Paisaje de Riemann al obtener la "sombra" de la "Función Zeta" en tres dimensiones.

Como se ve en la gráfica el "este" es una llanura uniforme. En la dirección "oeste", se alcanza a ver una "cresta de alturas onduladas" que va de norte a sur. Las cimas de estas montañas están situadas por encima de la línea que cruzaba el eje este-oeste por el número 1. Por encima de este punto de intersección había un pico que subía al cielo. Era, en efecto, infinitamente alto, cuando se inserta el número 1 en la "Función Zeta" se obtiene un resultado que tiende al infinito, es decir un polo simple. Si se dirige hacia el norte o hacia el sur de esta altura infinita, se encuentran otros picos pero todos ellos eran, sin embargo de altura finita. El primer pico aparecía a poco menos de diez pasos hacia el norte, correspondiente al número

¿Es posible que no hubiera nada al oeste de esa frontera? Si tenía que hacer caso sólo de las ecuaciones, se diría que no se podía construir otro paisaje que el que se encuentra al “este” de 1. Las ecuaciones carecían de sentido cuando se insertaban números situados al “oeste” de 1.

Riemann descubrió una fórmula que podía usar para construir el paisaje que faltaba al “oeste”. Este nuevo paisaje podía encajarse perfectamente con el paisaje original. Estas son todas las ecuaciones analizadas en secciones anteriores, ahora con esas nuevas ecuaciones se puede del “mundo imaginario”, pasar tranquilamente, a la región definida por la fórmula de la “Función Zeta” de Euler, al paisaje creado por la fórmula de Riemann sin tener siquiera conciencia de cruzar una frontera.

Los puntos que están sobre el “nivel del mar” reciben el nombre de “ceros” de la “Función Zeta”.



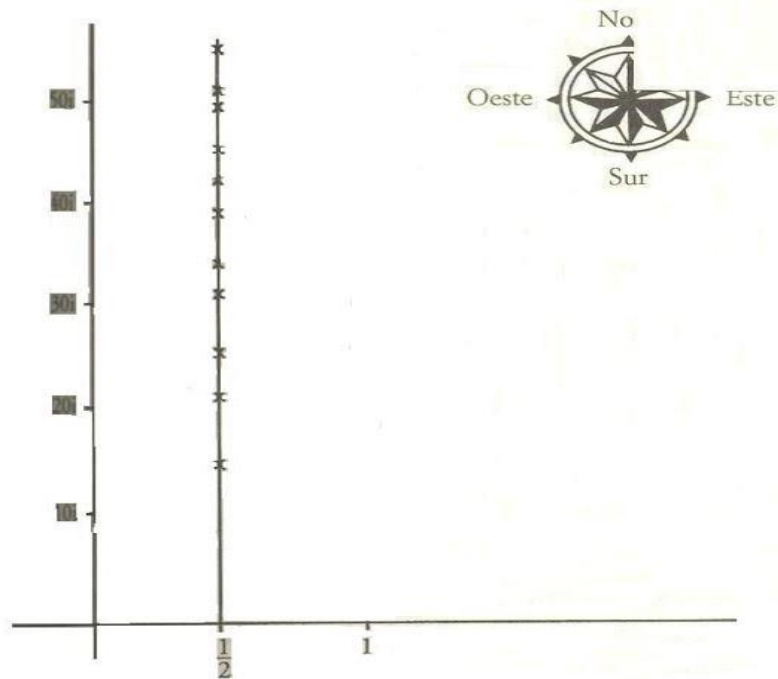
“Paisaje completo de Riemann”

Riemann sabía que lo único que tenía que hacer era marcar todos los puntos del mapa en los cuales la altura del “paisaje zeta” fuera igual a cero. Las coordenadas de todos estos “puntos situados al nivel del mar” darían información suficiente para reconstruir todas las alturas y valles sobre el nivel del mar.

La fórmula explícita que Riemann había descubierto utilizando el “paisaje zeta” expresaba un nexo directo entre los “números primos” y los “ceros”. La fórmula se interpretaba como una forma de comprender los “números primo” a través del análisis de los “ceros”. Cuando se iba hacia el norte los “ceros” se repelían unos a otros, a los “ceros” no les gusta nada la compañía. Al contrario de lo que sucede con los números primos, a un “cero” nunca le siguen otros “ceros en rápida sucesión.

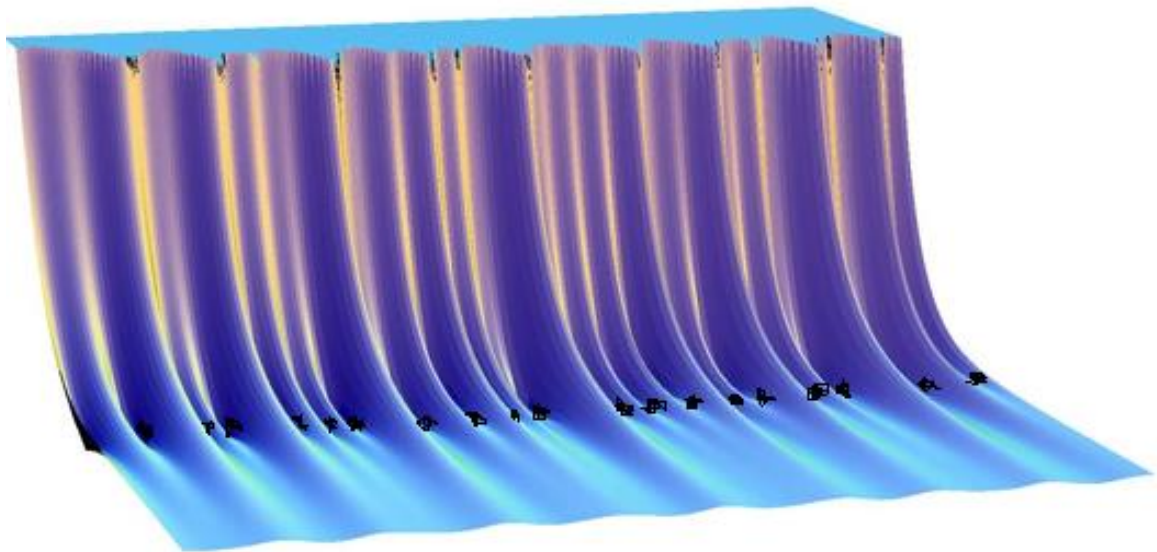
Aunque la nueva función de Riemann representaba una mejora en relación a la “función logaritmo” de Gauss, seguía produciendo algunos errores. Riemann comprendió que usando los puntos del mapa de los “número complejos” que señalaban los lugares en los que el “espacio zeta” estaba al nivel del mar, podía deshacerse de los errores y obtener ¡una fórmula exacta para contar los números primos! Ese fue el segundo ingrediente clave de su fórmula.

Como se vio, la ecuación funcional de Riemann satisface la Función Zeta. De esta ecuación se sigue que los enteros pares negativos $-2n$, anulan a $\zeta(s)$. En la búsqueda de los “ceros” resulta un hecho pasmoso: en lugar de distribuirse de manera aleatoria por todo el mapa, los “ceros” se disponen milagrosamente sobre una recta que cruza el paisaje en dirección norte-sur.



Recta mágica de Riemann o “línea crítica” donde se encuentran todos los “ceros” hasta ahora hallados.

¡Es como si cada punto situado al nivel del mar tuviera la misma coordenada este-oeste, igual a $\frac{1}{2}$! Este hecho se desprende simetría de la ecuación funcional que sugiere que los ceros están en la franja crítica $0 \leq s \leq 1$. Riemann pensó que si era cierto, aquello significaba que todas las ondas estaban perfectamente equilibradas, que ninguna de ellas producía una nota más intensa que las demás. Por esta última expresión se habla de la música de los números primos.



Línea de “puntos al nivel del mar” observada desde el oeste del paisaje de Riemann

los primeros puntos que halló tenían coordenadas $(1/2, 14134\ 725 \dots)$, medio paso al “este” y 14134 725.. pasos al “norte”, los siguientes $(1/2, 21022\ 040 \dots)$, $(1/2, 25010\ 856 \dots)$ que indicaban que se encontraban a lo largo de una “recta crítica” que cruzaba el espacio. Aunque es cierto que solo halló unos pocos de “ceros”, estaba convencido de que todos los infinitos “ceros” estaban alineados sobre dicha recta.

Desde luego que Riemann no logró demostrar que todos los “ceros” se hallan sobre la “recta crítica” y aunque no se ha logrado encontrar jamás ninguno que se encuentre fuera de ella, aunque siempre sería posible que alguno cayese fuera si no se ha demostrado; en matemáticas las afirmaciones sólo se consideran verdaderas cuando pueden ser demostradas. Desde Riemann han sido múltiples los intentos por conseguirlo y aunque la gran mayoría de los matemáticos consideran verdadera la “hipótesis de “Riemann” está pendiente de demostración en cuyo caso el afortunado recibiría un premio de un millón de dólares otorgado por el Instituto Clay de Estados Unidos.

CAPITULO III ACTUALIDAD DE LOS NÚMEROS PRIMOS Y LA HIPOTESIS DE REIMANN

Como se mencionó en la introducción Hilbert se equivocó en sus cálculos sobre la perdurabilidad de la inmutable conjetura de Riemann. Hoy, a más de 100 años de distancia en el tiempo, sigue hablando sobre esta hipótesis. Computadoras super potentes han verificado millones de ceros no triviales corroborando la conjetura.

3.1 ¿Qué consecuencia tendría la demostración o refutación de HR y la problemática de los Números Primos?

De más está decir que muchas funciones, como las aritméticas, las de Mbius. Incluso la primera demostración de Poussin y Hadamard fue asumiendo que la hipotesis de Riemann es cierta.

De no ser cierta HR se derrumbarían teorías enteras sobre análisis funcional, que al ver los matemáticos la exactitud con que se ha cumplido en miles de caso la han admitido como válida.

¿Qué se puede decir sobre la problemática de los números primos y, por ejemplos la informática? Desde 1977 se ha desarrollado un sistema de encriptar basado precisamente y la impenetrabilidad de los números primos, nos referimos al sistema RSA. La seguridad del criptosistema RSA está basado en dos problemas matemáticos: el problema de factorizar números grandes y el problema RSA. El descifrado completo de un texto cifrado con RSA es computacionalmente intratable, no se ha encontrado un algoritmo eficiente todavía para ambos problemas. La seguridad de este algoritmo

radica en el problema de la factorización de números enteros. Los mensajes enviados se representan mediante números, y el funcionamiento se basa en el producto, conocido, de dos números primos grandes elegidos al azar y mantenidos en secreto. Actualmente estos primos son del orden de 10^{200} , y se prevé que su tamaño crezca con el aumento de la capacidad de cálculo de los ordenadores. Descifrar estos como es separar una mezcla de pintura en los dos colores básicos que se utilizaron.

De poderse encontrar una forma de factorizar números muy grandes en el producto de números primos, implicaría un desastre informático. Como el mundo bancario depende de la seguridad informática. Esto dejaría también indefenso el sistema bancario mundial.

3.2 El espectro del Riemannio

Por pura casualidad en 1972 se juntan Hugh Montgomery y Freeman Dyson. Montgomery, experto en teoría de números y Dyson, físico, estaban trabajando en teorías prácticamente equivalentes, lo que cambiaba era el objeto de estudio.

¿De qué se trata? Montgomery plantea que la correlación de pares de puntos de los ceros de la función zeta de Riemann obedece

$$1 - \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \right)^2$$

Por su lado, Dayson, ve en esta expresión la función de correlación de autovalores de una matriz hermítica aleatoria y un modelo de los niveles de energía de un núcleo pesado. La función de correlación trae consigo una repulsión entre niveles de los ceros, exactamente igual que ocurre en el núcleo, con la consiguiente deficiencia de ceros muy separados. Hay toda

una discusión bien amplia sobre este asunto, se le invita al lector que le gusta la teoría de análisis numérico, a participar de ella.

3.3 Relación de la Función Zeta de Riemann y La Electrodinámica Cuántica

La Función Zeta de Riemann no se ha quedado como ya se ha dicho en una escena o capítulo de las matemáticas, sino que ha permeado otras cuestiones de ciencias aplicadas como la electrodinámica cuántica.

El estado de mínima energía de un sistema cuántico recibe el nombre de “estado de vacío”. El vacío cuántico tiene fluctuaciones de energía, que en determinadas circunstancias actúan sobre objetos materiales ordinarios. Por acción de condiciones externas tenemos el efecto CASIMIR:

“Dos placas metálicas paralelas a las que las fluctuaciones del vacío, por la presión que ejercen sobre su anverso y su reverso, tienden a acercarse entre sí.”

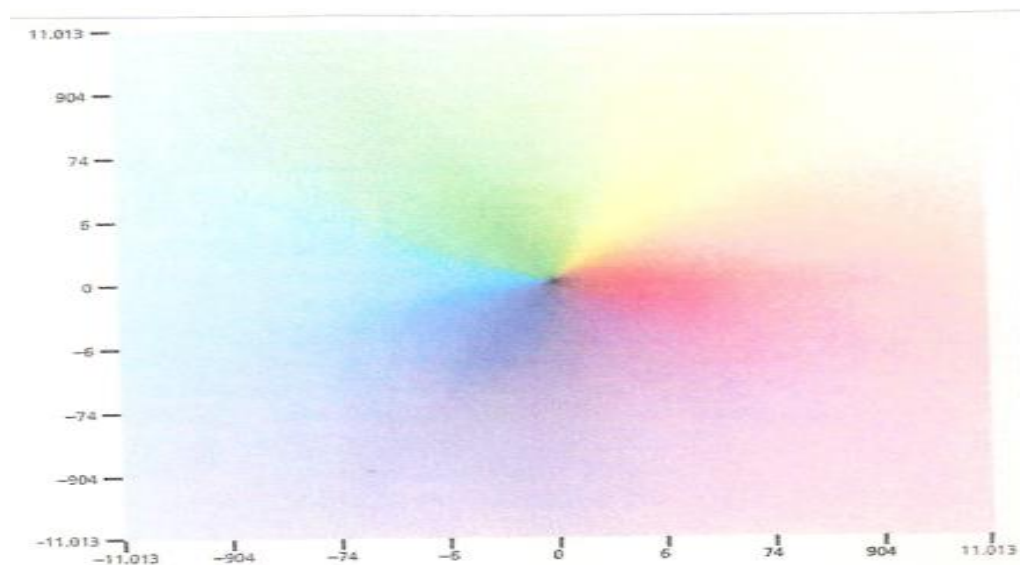
Lo que hace interesante, según Emilio Elizalde, este fenómeno es que asigna una fuerza que surge del vacío, de la nada y no obstante, es medible en experimentos reales. Como explican los expertos en esta materia en algunos procedimientos regularizadores que preceden a la re normalización se usa la *Función Zeta de Riemann*.

Se aprecia q, si la suma de la serie $1+1+1+1+1+\dots = -1/2$, sería adecuada, a pesar de que nos parezca absurda esta respuesta y contraria a nuestra intuición. Euler y Bernoulli demostraron en valores reales que la suma de infinitos términos no será infinita.

La serie $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \dots$, siendo s la misma potencia y mayor que 1.

Riemann dio un paso fundamental extendió el dominio de esta serie al plano complejo, llamada ahora $\zeta(s)$, que hoy recibe el nombre de Función

Zeta de Riemann $\zeta(r) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^r + \left(\frac{1}{3}\right)^r + \dots$, Así cuando $r=0$, la suma de la serie $1+1+1+1+\dots = -1/2$.



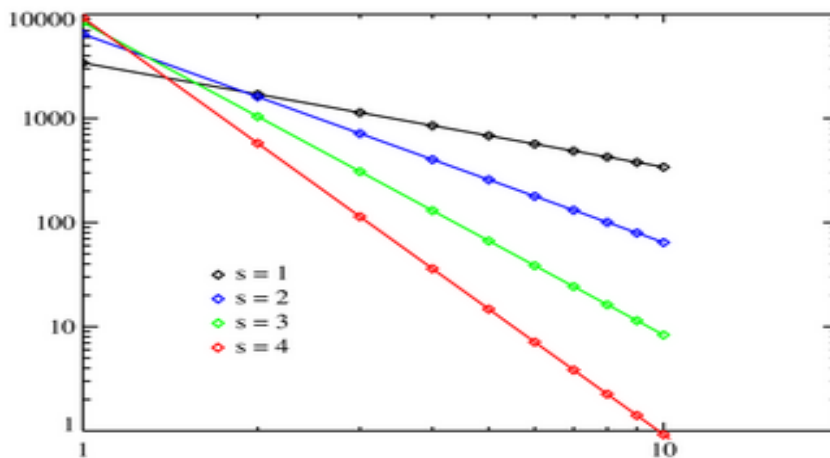
En toda la región del plano complejo s que está a la derecha de la línea vertical de abscisa 1, en ese dominio la serie es convergente y se puede hacer una continuación analítica única a todo el plano complejo: una función matemática con valores finitos.

Los resultados no se pueden representar en coordenadas cartesianas de manera directa, pero si en colores. En el eje horizontal se representa la componente real de (s) y la intensidad de color, el modulo, de suerte que, cuanto más intenso sea, menor será el módulo. Así, se puede calcular el

valor de las energías mínimas de un oscilador, en física se ha construido una refinada teoría para regularizar y luego normalizar dichas series con un éxito espectacular, que alcanza las 14 cifras decimales de aproximación, al comparar los resultados obtenidos con los experimentos de electrodinámica cuántica, para dar explicación al efecto CASIMIR.

Existen muchas más aplicaciones de la función zeta en distintos escenarios. Por ejemplo, posee aplicaciones en estadística, análisis numérico análisis computacional, música, mecánica cuántica y teoría de cuerdas entre otros.

En Estadística se aplica por ejemplo en la *Ley de Zipf*. Se trata de una ley experimental. Si los datos de un experimento se encuentran en una relación aproximadamente lineal logarítmica, se dice que se tiene una *distribución Zipfiana* de frecuencia vs rango.



Esto es, una distribución obedece a la ley de *Zipf* si por ejemplo, se ordenan los datos respecto a frecuencias, y el segundo más frecuente, solo aparece $\frac{1}{2}$ de las veces del más frecuente, el tercero $\frac{1}{3}$ de las veces, y así el n-ésimo $\frac{1}{n}$ de las veces del primero.

Si se toma como población las palabras de un idioma, y se ordenan conforme a frecuencias de utilización, se ha comprobado experimentalmente que la frecuencia de la k-ésima palabra más frecuente es proporcional a $\frac{1}{n^s}$

Con s ligeramente mayor que 1, es por eso que se utiliza la *Zeta* para hallar el valor de la suma de frecuencias, tomando el número de palabras que tienda al infinito

CONCLUSIONES

Pues, arribando a la conclusión de toda esta discusión, ¿qué se puede decir? ¿Se ha logrado una profundización amplia en este asunto, contestando las cuestiones planteadas al principio, a saber?:

- ¿Son infinitos los números primos? Como se presentó, la infinitud de los números primos fue resuelta desde los días de Euclides y en la página 36 se ha incluida una demostración muy sencilla por el método de reducción al absurdo.
- ¿Se puede escribir una función que genere la sucesión de los números primos? Precisamente esta es la pregunta que ha provocado la discusión eterna y la respuesta está marcada en casi toda la investigación. Es evidentemente que a la fecha no tenemos una única función que genere todos los números primos. Fermat, mencionado arriba, sugiere dos formas de obtener algunos primos: los primos de la forma $4n-1$ y los de la forma $4n+1$. Pero ¿qué elección de n se debe hacer para obtener el siguiente número? Se ha dejado claro que esto no resuelve el problema.
- ¿Cómo están distribuidos en la sucesión de los enteros los números primos? Como se mostró a través de fórmulas, la distribución de los números primos está dada por un estudio general de ellos y no por separados. Por varios métodos analíticos se probó que la aproximación Riemann fue más exacta para calcular la cantidad de números primos menor o igual que unos números x .
- Sobre todo, en esta investigación se ha abierto la discusión sobre la trascendencia del estudio de la distribución los números primos.

En muy pocas investigaciones sobre este asunto en las que se han incluido los alcances de la Hipótesis de Riemann y los Números Primos en una misma obra, es decir, es fácil ver por separados la problemática de los números primos y por otro lado la teoría de correlación de Montgomery – Dyson o la relación con la teoría de la electromecánica. Por eso es una pequeña contribución de este trabajo enunciar de forma coherente y sistemática estas cuestiones.

Enfrentarse a los desafíos ha caracterizado a los matemáticos por siglos. Como se apreció en la introducción; resolver la problemática de los números primos es un pleito entre los matemáticos y la matemática. De hecho, es innegable que se ha hecho un grandísimo esfuerzo por descubrir unos de los más grandes misterios de la matemática; el cual ha comenzado “contando piedrecitas” y que indiscutiblemente está colocado en el estudio de las galaxias.

RECOMENDACIONES

Como se ha visto el estudio sobre la distribución de los números primos ha permeado otras ciencias como la física. Sería importante seguir indagando para entender mejor la correlación entre estas teorías: teoría de números y niveles de energía de un núcleo pesado.

Este tema de los números primos no se queda con la hipótesis de Reimann, siendo este último tan solo uno de los problemas que están planteados sobre la distribución de los misteriosos números. Aún hay cuestiones sobre los números primos que están sin resolver, como por ejemplo, tras observar las siguientes igualdades:

$4 = 1 + 3$	$10 = 3 + 7$	$16 = 5 + 11$
$6 = 1 + 5 = 3 + 3$	$12 = 5 + 7$	$18 = 5 + 13$
$8 = 3 + 5$	$14 = 7 + 7$	$20 = 3 + 17$

¿Ve algo extraño en ellas? Claro que si al parecer los números pares, con excepción del número dos, se pueden escribir como la suma de números primos, y hasta también en este caso, si se acepta al 1 como número primo, como efectivamente hacen muchos matemáticos ¿Será cierto esto? No se sabe. Esta conjetura lleva el nombre de “conjetura de Goldbach” está sin demostrar. Resulta muy interesante que ni con los ordenadores más potentes se ha encontrado un contraejemplo a dicha conjetura. Se hace la invitación al lector a entrar a la discusión de esta conjetura y hacer sus

aportaciones ya sea a través de describir con detalles esta problemática o mejor aun planteando una solución. Hemos sido testigos en los últimos tiempos las grandes demostraciones de cuestiones que por años fueron veladas sus comprobaciones formales, pero que ahora se tienen por todo los ancho; es el caso, por ejemplo de la conjetura de Poicaré.

Existen otras cuestiones dignas de atención, como son:

- ¿Cuántos números primos cuyas cifras sean todas “unos”, existen? No se sabe. Pudieran ser en número finito o en número infinito.
- Se sabe que para todo número entero $n > 1$ existe un primo entre n y $2n$. ¿Pasa lo mismo para n^2 y $(n+1)^2$? No se sabe.
- ¿Habrá infinitos números primos de la forma $n^2 + 1$ siendo n un entero? Otra vez, no se sabe.

BIBLIOGRAFÍA

1. Apostol, T. M. (1984). *Introducción a la Teoría analítica de Números*. Barcelona: Reverté.
2. Argimiro, A. (2000). *La hipótesis de Riemann para Jóvenes Estudiantes*.
3. Bombieri, E. (2000). *La Hipótesis de Riemann - Problema Oficial*. Borwein al.
4. Camarena, P. (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*. México: ESIME-IPN.
5. Cardona, C. (2004). *La Hipótesis de Riemann*.
6. Courant, R. (1985). *Introducción al cálculo y al análisis Matemático*. México: Limusa.
7. Dawson, J. (2001). *Los Dilemas Lógicos: Vida y Obra de Kurt Gödel*. AK Peter.
8. Duhnann, W. (1995). *El Universo de los Números*. Ediciones Piramides.
9. Enrique, G. (2010). *Los números Primos: Un largo Camino al Infinito*. Barcelona España: RBA Libros.
10. Fernando, L. F. (1996). *Funciones Analíticas Multiforme*. Valladolid, España.
11. Günergün, Feza (2010). *Science Between Europe and Asia: Historical Studies on the Transmission, Adoption and Adaptation of Knowledge (en inglés)*. Vol. 275 de la serie «Boston Studies in the Philosophy of Science» (1ª edición). Springer. pp. 207–208
12. James, C. (2006). *El Premio Problemas del Milenio*. New York: Sociedad Americana de Matemática 2006.
13. James, Stewart (2008). *Cálculo de una Variable Transcendente Temprana*. Estados Unidos Connecticut: Cengage Learning.

14. Miguel, G (2012). Hipotesis de Riemann. Aportaciones a la Hipotesis de Riemann. México.

15. Mora, G. (2011). *Los Ceros de la sumas Parciales de la Funcion Zeta de Riemann (conferencia)*. Paraguay, San Loranzo.

16. Morsche, E. (2008). *Bolzano's theory of functions*.

17. Paul, Hoffman(1998); *The man who loved only numbers*. Hyperion. ISBN 0-7868-6362-5.

18. Rudin, w. (1988). *Analisis Real y Complejo*. Madrid: Mc. Graw Hill.

19. Satoy, M. D. (2013). *Gaussianos*. Obtenido de gaussianos.com/documental-la-musica-de-los-mumeros-primos

20. Sautoy, M. D. (2003). *El Enigma de Los Numeros Primos*. Milan: RCS Libri S.p.A.

21. Schechter, Bruce (2000). *My brain is open*. Touchstone. ISBN 0-684-85980-7

22. Sierra, G. (2013). La Hipotesis de Riemann y la Fisica. *La Forntera de la Fisica Fundamental*. Madrid: Instituto de Fisica teorica IFT.

23. Soprounov, I. (1998). *A una Pequeña prueba del Teorema de los Numeros Primos por Progresion Aritmetica*.

24. Stuik, D. (1981). *Hisotria Concisa de la Matemática*. Bologna: G. Bell and Sons.

25. Wiles, A. (1990). «*The Iwasawa Conjecture for Totally Real Fields*», *Annals of Mathematics (Annals of Mathematics)* 131 (3): 493–540, doi:10.2307/1971468, <http://jstor.org/stable/1971468>.

ANEXO

Tabla de Gauss

CRIBA DE ERATÓSTENES PARA LOS PRIMEROS 1000 NÚMEROS NATURALES										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	4
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	4
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	2
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	2
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	3
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	2
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	2
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	3
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	2
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	1
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	4
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	1
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	1
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	3
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	1
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	2
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	2
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	2
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	1
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	4
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	0
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	1
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	3
231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	2
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	1
251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	2
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	2
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	2
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	2
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	1
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	1
311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	3
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	0
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	2
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	2
351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	1
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	1
371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	2
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	2

391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	1
401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	2
411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	1
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	1
431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	3
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	2
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	1
461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	3
471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	1
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	1
491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	2
501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	2
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	0
521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	2
531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	0
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	2
551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	1
561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	2
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	2
581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	1
591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	2
601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	2
611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	3
621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	0
631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	1
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	3
651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	2
661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	1
671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	2
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	1
691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	1
701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	2
711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	1
721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	1
731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	2
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	1
751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	2
761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	2
771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	1
781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	1
791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	1

Gauss comenzó a estudiar cuántos números primos exactamente había hasta el diez, cuántos hasta el cien, cuántos hasta el mil, etc.